Математические заметки

том 78 выпуск 5 ноябрь 2005

УДК 512.543

ФИНИТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО СОПРЯЖЕННОСТИ НИСХОДЯЩИХ HNN-РАСШИРЕНИЙ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Е. В. Соколов

Доказано, что произвольное нисходящее HNN-расширение конечно порожденной абелевой группы финитно аппроксимируемо относительно сопряженности.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Напомним, что если A – некоторая группа и φ – ее инъективный эндоморфизм, то *нисходящим* HNN-*расширением* группы A с проходной буквой t называется группа

$$G = \langle A, t;\ t^{-1}At = A\varphi\rangle,$$

которая в системе порождающих, состоящей из всех образующих группы A и элемента t, определяется соотношениями группы A и всеми соотношениями вида $t^{-1}at = a\varphi$, где $a \in A$ (введенные обозначения далее предполагаются фиксированными).

Напомним также, что группа F называется *финитно аппроксимируемой относительно предиката* ρ, если для любых элементов и множеств элементов из F, не находящихся в отношении ρ, существует гомоморфизм группы F на конечную группу, при котором образы этих элементов и множеств по-прежнему не состоят в отношении ρ. Если ρ представляет собой отношение равенства двух элементов, то упоминание о нем обычно опускают и говорят просто о финитной аппроксимируемости группы F.

Нисходящее HNN-расширение представляет собой частный случай расширения Хигмана–Нейман-Неймана, возникающий, если хотя бы одна из связанных подгрупп совпадает с базовой группой. Специфика этого случая объясняется тем, что доказательства значительного числа результатов о произвольных HNN-расширениях существенным образом используют различие базовой группы и связанных подгрупп (см., например, [1]–[4]), так что непосредственное их применение к конструкциям данного типа невозможно. В то же время для нисходящих HNN-расширений решение ряда вопросов приобретает более законченный вид, как показывают, например, работы [5] и [6].

В настоящей статье рассматривается ситуация, когда базовая группа A является конечно порожденной абелевой. В этом случае HNN-расширение G оказывается метабелевой группой и потому его финитная аппроксимируемость следует из известной теоремы Ф. Холла. Поскольку для HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп, не являющихся нисходящими, обычная финитная аппроксимируемость равносильна свойству финитной аппроксимируемости относительно сопряженности (ФАС)

[2], [4], естественно предположить, что G будет и ФАС-группой. Однако подтвердить это предположение, получив соответствующий результат для метабелевых групп, невозможно ввиду контрпримера, построенного М. И. Каргаполовым и Е. И. Тимошенко в [7].

С другой стороны, если эндоморфизм φ группы A в действительности является автоморфизмом, то HNN-расширение G оказывается обычным расщепляющимся расширением группы A при помощи бесконечной циклической группы с порождающим t. В случае конечно порожденной абелевой группы A это означает, что G – полициклическая группа, финитно аппроксимируемая относительно сопряженности согласно результата В. Н. Ремесленникова [8].

О. Е. Сенкевич [9] показал также, что HNN-расширение G обладает свойством ФАС, если базовая группа A является свободной абелевой и содержит такую систему свободных порождающих $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что $a_i\varphi = a_i^{k_i}$ для некоторых целых чисел k_i, отличных от нуля. Частный случай этого утверждения для циклической группы A был доказан ранее в [10].

Настоящая статья продолжает до некоторой степени работу Сенкевича, и основной ее результат выглядит следующим образом.

Теорема. *Произвольное нисходящее* HNN*-расширение конечно порожденной абелевой группы финитно аппроксимируемо относительно сопряженности.*

Ввиду общего замечания, сделанного А. И. Мальцевым в [11], из сформулированной теоремы вытекает, в частности, что произвольное нисходящее HNN-расширение конечно порожденной абелевой группы имеет разрешимую проблему сопряженности. Необходимо отметить, однако, что этот результат получен ранее Г. А. Носковым [12] другими методами.

2. Предварительные замечания. Прежде всего введем несколько определений, необходимых для дальнейшего изложения.

Пусть A – конечно порожденная абелева группа и φ – ее инъективный эндоморфизм (данные обозначения предполагаются фиксированными до конца раздела). Будем говорить, что элементы $a, b \in A$ *φ-эквивалентны*, записывая этот факт в виде $a \sim_\varphi b$, если существуют целые неотрицательные числа m и n такие, что $a\varphi^m = b\varphi^n$.

Очевидно, что введенное отношение действительно является эквивалентностью. Класс всех элементов группы A, φ-эквивалентных некоторому фиксированному элементу $a \in A$, будем далее обозначать через $a\Phi$. Поскольку эндоморфизм φ является инъективным, произвольный элемент множества $a\Phi$ либо совпадает с образом элемента a относительно некоторой степени отображения φ, либо сам переходит в a под действием эндоморфизма φ^n для подходящего n. Поэтому множество $a\Phi$ естественно назвать *φ-орбитой* элемента a.

Подгруппу B группы A назовем *φ-допустимой*, если $B\varphi \leqslant B$, и *φ-изолированной*, если для каждого элемента $a \in A$ из $a\varphi \in B$ следует, что $a \in B$. Семейство всех φ-допустимых φ-изолированных подгрупп группы A будем обозначать символом $\Omega_\varphi(A)$. Кроме того, через $\Omega_\varphi^f(A)$ обозначим семейство всех подгрупп из $\Omega_\varphi(A)$, имеющих конечный индекс в группе A.

Заметим, что если подгруппа $B \leqslant A$ φ-допустима, то эндоморфизм φ индуцирует эндоморфизм факторгруппы A/B (переводящий смежный класс aB в смежный класс

$(a\varphi)B)$, который мы будем обозначать через φ/B. При этом φ-допустимость подгруппы B является не только достаточным, но и необходимым условием корректности определения данного эндоморфизма.

Заметим также, что φ-допустимая подгруппа B является φ-изолированной, т.е. принадлежит семейству $\Omega_\varphi(A)$ тогда и только тогда, когда эндоморфизм $\bar{\varphi} = \varphi/B$ инъективен. Поэтому для каждой подгруппы $B \in \Omega_\varphi(A)$ мы можем определить на факторгруппе A/B отношение $\bar{\varphi}$-эквивалентности, а на группе A – отношение φ-эквивалентности по модулю B.

Более точно, будем говорить, что элементы $a, b \in A$ *φ-эквивалентны по модулю подгруппы* $B \in \Omega_\varphi(A)$ и писать $a \sim_\varphi b \pmod{B}$, если существуют целые неотрицательные числа m и n такие, что $a\varphi^m \equiv b\varphi^n \pmod{B}$.

Наконец, следуя общему определению, назовем группу A *финитно аппроксимируемой относительно φ-эквивалентности* (или сокращенно ФАφ-группой), если имеет место утверждение

$$\forall a, b \in A \ \ (a \nsim_\varphi b \implies \exists B \in \Omega_\varphi^f(A) a \nsim_\varphi b \pmod{B}).$$

Будем говорить также, что группа A *регулярно финитно аппроксимируема относительно φ-эквивалентности* (короче, является *РФАφ-группой*), если A – ФАφ-группа и для любых неединичного элемента $a \in A$ и натурального числа n можно указать такую подгруппу $B \in \Omega_\varphi(A)$, что индуцированный эндоморфизм $\bar{\varphi} = \varphi/B$ факторгруппы A/B является автоморфизмом конечного порядка, кратного n, и мощность $\bar{\varphi}$-орбиты элемента aB совпадает с порядком автоморфизма $\bar{\varphi}$.

Следующее утверждение, принадлежащее Сенкевичу, объясняет, какое отношение понятие финитной аппроксимируемости относительно φ-эквивалентности имеет к рассматриваемой задаче.

Предложение 1. *Нисходящее* HNN-*расширение* $G = \langle A, t; t^{-1}At = A\varphi\rangle$ *группы A финитно аппроксимируемо относительно сопряженности тогда и только тогда, когда A является* ФАφ-*группой.*

Доказательство. Проверим сначала *достаточность*. Пусть g и h – произвольные несопряженные элементы группы G. Нам нужно лишь указать гомоморфизм группы G на полициклическую группу, при котором классы сопряженности элементов g и h остаются различными. Согласно упоминавшемуся результату В.Н. Ремесленникова [8] его всегда можно будет продолжить до гомоморфизма на конечную группу, сохраняющего это различие.

Из леммы Бриттона для произвольных HNN-расширений (см., например, [13, гл. IV, § 2]) легко следует, что каждый элемент группы G однозначно представим в виде $t^m a t^{-n}$, где $a \in A$, m, n – целые неотрицательные числа и, если $m > 0$ и $n > 0$, то $a \notin A\varphi$. Поэтому, заменяя g и h подходящими сопряженными с ними элементами, мы можем считать, что $g = t^k a$ и $h = t^l b$ для некоторых $k, l \in \mathbb{Z}$, $a, b \in A$. Более того, поскольку сопряженность элементов g и h равносильна сопряженности элементов g^{-1} и h^{-1}, можно предполагать также, что $k \geqslant 0$.

Если $k \neq l$, то искомым будет естественный гомоморфизм группы G на ее циклическую факторгруппу по нормальному замыканию подгруппы A. Образы элементов g и h относительно этого гомоморфизма, очевидно, различны и, следовательно, несопряжены.

Пусть $k = l$. Положим $A_k = \{c\varphi^k c^{-1} \mid c \in A\}$. Легко видеть, что для любого неотрицательного k множество A_k является подгруппой и принадлежит семейству $\Omega_\varphi(A)$. Докажем теперь одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Элементы $u = t^q c$ и $v = t^q d$ группы G сопряжены в этой группе тогда и только тогда, когда $c \sim_\varphi d \pmod{A_q}$.*

Доказательство. В самом деле, если $u = w^{-1}vw$, то, записывая элемент w в виде $t^m f t^{-n}$ для подходящих неотрицательных чисел m, n и элемента $f \in A$, мы получаем соотношение $t^{-q} f t^q t^{-n} c t^n = t^{-m} d t^m f$, равносильное соотношению $f\varphi^q c\varphi^n = d\varphi^m f$, которое в свою очередь означает, что $c \sim_\varphi d \pmod{A_q}$.

Таким образом, поскольку элементы g и h не сопряжены в группе G, $a \nsim_\varphi b \pmod{A_k}$.

Рассмотрим теперь отдельно ситуацию, когда $k = 0$. В этом случае согласно лемме элементы a и b не являются φ-эквивалентными в группе A и, так как последняя представляет собой ФАφ-группу, существует подгруппа $B \in \Omega^f_\varphi(A)$ такая, что $a \nsim_\varphi b \pmod{B}$. Обозначим через q порядок индуцированного автоморфизма φ/B (конечной) факторгруппы A/B. Тогда, очевидно, $A_q \leqslant B$ и, стало быть, $a \nsim_\varphi b \pmod{A_q}$.

Пусть группа $\overline{G}$ представляет собой нисходящее HNN-расширение $\langle \overline{A}, \tau;\ \tau^{-1}\overline{A}\tau = \overline{A}\bar{\varphi} \rangle$, где $\overline{A} = A/A_k$, если $k > 0$, $\overline{A} = A/A_q$, если $k = 0$, и $\bar{\varphi}$ – эндоморфизм, индуцированный в факторгруппе $\overline{A}$ эндоморфизмом φ. Тогда при отображении $\rho\colon G \to \overline{G}$, продолжающем естественный гомоморфизм $\varepsilon\colon A \to \overline{A}$ и переводящем элемент t в τ, все определяющие соотношения группы G переходят в равенства, справедливые в группе $\overline{G}$. Поэтому отображение ρ, в свою очередь, может быть продолжено до гомоморфизма на группу $\overline{G}$, который мы будем обозначать той же буквой. Покажем, что этот гомоморфизм и является искомым.

В самом деле, в силу соотношений $a \nsim_\varphi b \pmod{A_k}$ (при $k \neq 0$) и $a \nsim_\varphi b \mod A_q$ (при $k = 0$) $\bar{\varphi}$-орбиты элементов $a\rho$ и $b\rho$ в группе $\overline{A}$ не совпадают. Поскольку и при $k = 0$, и при $k \neq 0$ $\overline{A}_k = 1$, отсюда следует, что $a\rho \nsim_{\bar{\varphi}} b\rho \pmod{\overline{A}_k}$ и, стало быть, согласно лемме элементы $g\rho$ и $h\rho$ не сопряжены в группе $\overline{G}$. Остается лишь вспомнить, что при любом k эндоморфизм $\bar{\varphi}$ является автоморфизмом конечного порядка группы $\overline{A}$ и потому $\overline{G}$ – полициклическая группа. Тем самым, доказательство достаточности закончено.

Необходимость условия предложения с учетом отмеченного выше проверяется совсем легко.

Пусть a и b – произвольные элементы группы A, не являющиеся φ-эквивалентными. Согласно лемме эти элементы не сопряжены в группе G и в силу свойства ФАС продолжают оставаться таковыми в некотором конечном гомоморфном образе $\overline{G} = G/H$ группы G. Отображение $\bar{\varphi}$ подгруппы $\overline{A} = AH/H$ в себя, переводящее элемент aH в $(a\varphi)H$, совпадает, очевидно, с автоморфизмом этой подгруппы, порожденным сопряжением при помощи элемента tH. В частности, оно корректно определено и инъективно, и это означает, что ядро B гомоморфизма группы A, получающегося ограничением на A естественного гомоморфизма $\varepsilon\colon G \to \overline{G}$, принадлежит семейству $\Omega^f_\varphi(A)$. Остается заметить, что $\bar{\varphi}$-орбиты элементов aH и bH совпадают с их классами сопряженности в группе $\overline{G}$ и потому различны. Таким образом, $a \nsim_\varphi b \pmod{B}$.

Из предложения 1 и финитной аппроксимируемости относительно сопряженности произвольной полициклической группы сразу же вытекает

Предложение 2. *Если эндоморфизм φ является автоморфизмом, то группа A финитно аппроксимируема относительно φ-эквивалентности.*

Следующее утверждение показывает, что свойства ФАφ и РФАφ являются наследственными, а также, с учетом некоторых ограничений, сохраняются при переходе к конечным расширениям. Поскольку далее речь будет идти исключительно об абелевых группах и векторных пространствах, мы перейдем к аддитивной записи групповой операции.

Предложение 3. *Пусть A_1 – φ-допустимая подгруппа группы A и φ_1 – ограничение эндоморфизма φ на подгруппу A_1. Тогда*

(i) *если A – ФАφ-группа (РФАφ-группа), то и A_1 – ФАφ_1-группа (соответственно РФАφ_1-группа);*

(ii) *если группа A – без кручения, а подгруппа A_1 имеет конечный индекс в A и является ФАφ_1-группой (РФАφ_1-группой), то и вся группа A обладает соответствующим свойством.*

Доказательство. (i) Пусть сначала a и b – произвольные элементы подгруппы A_1, удовлетворяющие условию $a \nsim_{\varphi_1} b$. Так как φ_1 является ограничением эндоморфизма φ, то, очевидно, $a \nsim_{\varphi} b$ и в силу финитной аппроксимируемости группы A относительно φ-эквивалентности существует такая подгруппа $B \in \Omega_{\varphi}^{f}(A)$, что $a \nsim_{\varphi} b \pmod{B}$.

Положим $B_1 = B \cap A_1$. Поскольку обе подгруппы B и A_1 являются φ-допустимыми, этим свойством обладает и подгруппа B_1. Очевидно также, что она φ-изолирована в группе A_1. Таким образом, $B_1 \in \Omega_{\varphi_1}^{f}(A_1)$ и $a \nsim_{\varphi_1} b \pmod{B_1}$ ввиду включения $B_1 \leqslant B$.

Предположим теперь, что A является РФАφ-группой и a – произвольный ненулевой элемент подгруппы A_1, n – натуральное число. Как и выше, выберем такую подгруппу $B \in \Omega_{\varphi}(A)$, что индуцированный эндоморфизм $\bar{\varphi} = \varphi/B$ факторгруппы A/B оказывается автоморфизмом, порядок q которого конечен и удовлетворяет условиям $n \mid q$ и $(a+B)\bar{\varphi}^{k} \neq a+B$ при $0<k<q$. Полагая $B_1 = B \cap A_1$, мы видим, что с точностью до изоморфизма факторгрупп $(A_1+B)/B$ и A_1/B_1 автоморфизм $\bar{\varphi}_1 = \varphi_1/B_1$ последней является сужением автоморфизма $\bar{\varphi}$. Поэтому его порядок оказывается ограниченным с одной стороны порядком q автоморфизма $\bar{\varphi}$, а с другой – мощностью $\bar{\varphi}_1$-орбиты элемента $a + B_1$, которая также не меньше q ввиду включения B_1 в B. Таким образом, $|\bar{\varphi}_1| = q$ и подгруппа B_1 является искомой.

(ii) Пусть $n = [A : A_1]$ и ρ – гомоморфизм группы A, переводящий каждый элемент $a \in A$ в элемент na. Так как группа A без кручения, отображение ρ задает изоморфизм этой группы на подгруппу $A_2 = nA \leqslant A_1$. Полагая $\varphi^{\rho} = \rho^{-1}\varphi\rho$, мы переносим в соответствии с этим изоморфизмом эндоморфизм φ в группу A_2. Поэтому (регулярная) финитная аппроксимируемость группы A относительно φ-эквивалентности оказывается равносильной свойству ФАφ^{ρ} (соответственно, РФАφ^{ρ}) группы A_2.

Заметим теперь, что ввиду перестановочности отображений ρ и φ на элементах подгруппы A_2 эндоморфизм φ^{ρ} в действительности является сужением эндоморфизма φ. Так как к тому же $A_2 \leqslant A_1$, отображение φ^{ρ} можно рассматривать и как ограничение на группу A_2 эндоморфизма φ_1. Стало быть, для доказательства необходимых свойств группы A_2 мы можем воспользоваться первой частью настоящего предложения.

Следующее утверждение позволяет несколько упростить проверку свойства финитной аппроксимируемости относительно φ-эквивалентности, снимая требование конечности индекса подгруппы B, по модулю которой элементы должны оставаться неэквивалентными.

Предложение 4. *Группа A финитно аппроксимируема относительно φ-эквивалентности тогда и только тогда, когда для любых элементов $a, b \in A$, $a \nsim_\varphi b$, существует такая подгруппа $B \in \Omega_\varphi(A)$, что $a \nsim_\varphi b \pmod B$ и мощности орбит элементов $a+B$ и $b+B$ факторгруппы A/B относительно индуцированного эндоморфизма φ/B конечны.*

Доказательство. *Необходимость* данного утверждения очевидна, проверим *достаточность*.

Пусть a и b – произвольные элементы группы A, не являющиеся φ-эквивалентными. Ввиду условия мы можем сразу же считать их φ-орбиты конечными. Поэтому воспользуемся обычной финитной аппроксимируемостью группы A и выберем в ней подгруппу C конечного индекса, не содержащую ни одного элемента из множества $M = \{u - v \mid u \in a\Phi,\ v \in b\Phi\}$ (для обоснования возможности такого выбора нужно еще заметить, что $a\Phi \cap b\Phi = \varnothing$ и, следовательно, $0 \notin M$). Не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать также, что подгруппа C имеет вид nA для некоторого подходящего натурального числа n и, таким образом, является φ-допустимой.

Обозначим через B φ-изолятор подгруппы C в группе A, т.е. наименьшую φ-изолированную подгруппу группы A, содержащую C. Легко видеть, что эта подгруппа совпадает с множеством $\{a \in A \mid \exists n\ a\varphi^n \in C\}$ и, стало быть, принадлежит семейству $\Omega_\varphi^f(A)$. Так как $M\varphi \subseteq M$, отсюда следует также, что подгруппа B по-прежнему не содержит ни одного элемента множества M. Поэтому $a \nsim_\varphi b \pmod B$, что и требовалось.

Перейдем теперь к доказательству основного утверждения данного раздела, которое, в частности, дает возможность сводить вопрос о финитной аппроксимируемости группы A относительно φ-эквивалентности к изучению ее прямых слагаемых.

Предложение 5. *Пусть B – некоторая подгруппа из семейства $\Omega_\varphi(A)$, φ_B – ограничение эндоморфизма φ на подгруппу B и $\bar\varphi = \varphi/B$ – эндоморфизм факторгруппы $\overline{A} = A/B$, индуцированный отображением φ. Пусть также $\overline{A}$ является* РФА$\bar\varphi$*-группой. Тогда*

(i) *если B – ФАφ_B-группа, то A – ФАφ-группа;*
(ii) *если B – РФАφ_B-группа, то A – РФАφ-группа.*

Доказательство. (i) Пусть a и b – произвольные неэквивалентные элементы группы A. С учетом предыдущего предложения нам достаточно указать подгруппу $F \in \Omega_\varphi(A)$, по модулю которой φ-орбиты этих элементов конечны и не совпадают.

Обозначим через $\bar a$ и $\bar b$ образы элементов a, b в группе $\overline{A}$ и рассмотрим три возможности.

1) $\bar a = \bar b = 0$. В этом случае элементы a и b принадлежат подгруппе B. Воспользуемся ее аппроксимируемостью и найдем такую подгруппу $F \in \Omega^f_{\varphi_B}(B)$, что $a \nsim_{\varphi_B} b \pmod F$. Так как подгруппа B φ-изолирована в группе A, подгруппа F также является φ-изолированной в A и, стало быть, принадлежит семейству $\Omega_\varphi(A)$. Кроме того, отсюда следуют равенства $a\Phi = a\Phi_B$ и $b\Phi = b\Phi_B$. Поэтому мощности φ-орбит элементов a, b по модулю F конечны, и подгруппа F оказывается искомой.

2) Хотя бы один из элементов $\bar a$, $\bar b$ отличен от нуля и $\bar a \nsim_{\bar\varphi} \bar b$. Здесь достаточно использовать аппроксимируемость группы $\overline{A}$, указав подгруппу $\overline{F} \in \Omega^f_{\bar\varphi}(\overline{A})$, по модулю

которой сохраняется соотношение $\bar{a} \nsim_{\bar{\varphi}} \bar{b}$. В качестве искомой подгруппы F теперь следует взять прообраз подгруппы $\overline{F}$ относительно естественного гомоморфизма $\varepsilon\colon A \to \overline{A}$.

3) Хотя бы один из элементов $\bar{a}$, $\bar{b}$ отличен от нуля и $\bar{a} \sim_{\bar{\varphi}} \bar{b}$. Заменяя при необходимости элементы a и b их образами относительно подходящих степеней эндоморфизма φ, мы можем считать, что $\bar{a} = \bar{b} \neq 0$.

Положим $g = a - b$. Так как a и b неэквивалентны, этот элемент отличен от нуля и в силу сделанного предположения о равенстве элементов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ принадлежит подгруппе B. Ввиду аппроксимируемости последней найдется подгруппа $D \in \Omega^f_{\varphi_B}(B) \subseteq \Omega_\varphi(A)$, не содержащая элемента g.

Предполагая, что для некоторых неотрицательных чисел m и n $a\varphi^m \equiv b\varphi^n \pmod{D}$, и переходя к факторгруппе $\overline{A}$, мы получаем, что $\bar{b}\bar{\varphi}^m = \bar{a}\bar{\varphi}^m = \bar{b}\bar{\varphi}^n$ и в силу инъективности эндоморфизма $\bar{\varphi}$ $\bar{b}\bar{\varphi}^{|m-n|} = \bar{b}$. Теперь следует заметить, что в регулярно финитно аппроксимируемой группе, каковой является группа $\overline{A}$, мощность орбиты произвольного отличного от нуля элемента делится на любое наперед заданное натуральное число и, следовательно, бесконечна. Таким образом, $m = n$ и $g\varphi^n = a\varphi^m - b\varphi^n \in D$. Но подгруппа D φ-изолирована, поэтому $g \in D$.

Полученное противоречие доказывает, что $a \nsim_\varphi b \pmod{D}$ и, стало быть, мы с самого начала могли считать подгруппу B конечной.

Обозначим через r порядок (теперь уже заведомо автоморфизма) φ_B. Ввиду регулярной финитной аппроксимируемости группы $\overline{A}$ найдется такая подгруппа $\overline{C} \in \Omega^f_{\bar{\varphi}}(\overline{A})$, что эндоморфизм $\bar{\bar{\varphi}} = \bar{\varphi}/\overline{C}$ факторгруппы $\overline{A}/\overline{C}$, индуцированный отображением $\bar{\varphi}$, является автоморфизмом и его порядок q конечен, делится на r и совпадает с мощностью $\bar{\bar{\varphi}}$-орбиты элемента $\bar{b} + \overline{C}$.

Положим $F = \{f\varphi^q - f \mid f \in A\}$. Как уже было отмечено при доказательстве предложения 1, множество F является подгруппой и принадлежит семейству $\Omega_\varphi(A)$. Поскольку отображение $\bar{\varphi}^q$ по модулю подгруппы $\overline{C}$ является тождественным, подгруппа $\overline{F} = (F + B)/B$ содержится в $\overline{C}$. Покажем, что $F \cap B = 0$.

В самом деле, пусть d – произвольный элемент подгруппы $F \cap B$. Запишем его в виде $d = f\varphi^q - f$ для подходящего элемента $f \in A$.

Так как $d \in B$ и r делит q, отображение φ^q действует на элемент d тождественно. Поэтому, обозначая через s порядок группы B, мы получаем, что $f\varphi^{qs} = f + sd = f$. Напомним теперь, что в силу регулярной финитной аппроксимируемости группы $\overline{A}$ все ненулевые $\bar{\varphi}$-орбиты в ней бесконечны. Следовательно, $f \in B$ и $d = f\varphi^q - f = 0$.

Для завершения доказательства утверждения (i) нам осталось проверить, что элементы a и b не являются φ-эквивалентными по модулю подгруппы F.

Предположим противное: пусть для некоторых целых неотрицательных чисел m и n $a\varphi^m - b\varphi^n \in F$. Тогда $\bar{b}\bar{\varphi}^m - \bar{b}\bar{\varphi}^n = \bar{a}\bar{\varphi}^m - \bar{b}\bar{\varphi}^n \in \overline{F} \leqslant \overline{C}$ и, так как порядок $\bar{\bar{\varphi}}$-орбиты элемента $\bar{b}$ по модулю подгруппы $\overline{C}$ равен q, то $m \equiv n \pmod{q}$. Отсюда следует, что $b\varphi^m \equiv b\varphi^n$ и $g\varphi^m \equiv a\varphi^m - b\varphi^n \equiv 0 \pmod{F}$. Тем самым, мы получаем ненулевой элемент $g\varphi^m$, одновременно принадлежащий подгруппам F и B, что противоречит доказанному выше. Утверждение (i) доказано.

(ii) Финитная аппроксимируемость относительно φ-эквивалентности группы A здесь обеспечивается частью (i), поэтому нам нужно лишь проверить справедливость дополнительного условия регулярности.

Пусть a – произвольный ненулевой элемент группы A, $n \in \mathbb{N}$. Если элемент a не принадлежит подгруппе B, то образ его в группе $\overline{A}$ отличен от нуля и подгруппу, по модулю которой эндоморфизм φ и элемент a будут обладать всеми необходимыми свойствами, можно найти, пользуясь регулярной финитной аппроксимируемостью группы $\overline{A}$.

Пусть $a \in B$. Так как группа B регулярно финитно аппроксимируема, мы можем считать, что φ_B является автоморфизмом и его порядок q конечен, делится на n и совпадает с мощностью φ_B-орбиты элемента a.

Как и выше, проверяется, что подгруппа $F = \{f\varphi^q - f \mid f \in A\} \in \Omega_\varphi(A)$ тривиально пересекается с B. Поэтому мощность фактормножества $(a\Phi + F)/F$ по-прежнему равна q и, стало быть, совпадает с порядком индуцированного в факторгруппе A/F автоморфизма φ/F. Это означает, что подгруппа F является искомой.

3. Доказательство основной теоремы. Этот раздел, как и предыдущий, начнем с необходимых определений.

Пусть A – свободная абелева группа конечного ранга и φ – ее инъективный эндоморфизм. Если зафиксировать некоторую систему свободных порождающих группы A, то эндоморфизму φ по аналогии с обычным линейным оператором конечномерного векторного пространства можно сопоставить невырожденную целочисленную матрицу M_φ. Характеристический многочлен χ_φ этой матрицы (не зависящий уже от выбора базиса группы A) называют *характеристическим многочленом* эндоморфизма φ.

Если отображение φ в действительности является автоморфизмом, то матрица M_φ^{-1} также оказывается целочисленной и, следовательно, свободный член χ_0 многочлена χ_φ (совпадающий с определителем матрицы M_φ) должен быть равен ± 1. Верно, разумеется, и обратное: если $|\chi_0| = 1$, то φ – автоморфизм группы A.

В связи с этим имеет смысл ввести специальный термин для обозначения целочисленного унитарного многочлена, свободный член которого равен ± 1. Мы назовем такой многочлен *сверхунитарным*.

Далее, под *минимальным многочленом* комплексного алгебраического числа будем понимать (однозначно определенный) унитарный минимальный многочлен этого числа над полем $\mathbb{Q}$. Напомним, что алгебраическое число, минимальный многочлен которого имеет целые коэффициенты, называется *целым алгебраическим*.

Если c – некоторое ненулевое целое алгебраическое число, то через Z_c мы будем обозначать аддитивную группу кольца $\mathbb{Z}[c]$, а через φ_c – эндоморфизм этой группы, осуществляющий умножение каждого ее элемента на c. Поскольку при любом выборе числа c в кольце $\mathbb{Z}[c]$ нет делителей нуля, эндоморфизм φ_c всегда является инъективным и мы можем сформулировать

Предложение 6. *Пусть c – ненулевое целое алгебраическое число, минимальный многочлен которого не является сверхунитарным. Тогда Z_c является* РФАφ_c*-группой.*

Доказательство. Пусть $g(x) = x^q - g_{q-1}x^{q-1} - \dots - g_1x - g_0$ – минимальный многочлен элемента c и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ – все его комплексные корни. Будем считать, что $|\lambda_j| > 1$ при $1 \leqslant j \leqslant r$, $|\lambda_j| = 1$ при $r + 1 \leqslant j \leqslant r + s$, $|\lambda_j| < 1$ при $r + s + 1 \leqslant j \leqslant q$, и положим для удобства $\mu_j = \lambda_{r+j}$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $\nu_j = \lambda_{r+s+j}$, $1 \leqslant j \leqslant t$, где $t = q - r - s$. Поскольку многочлен g – целочисленный и не является сверхунитарным, $r \geqslant 1$, в то время как числа s и t могут быть равны нулю.

Из неприводимости многочлена g (здесь и далее отношения делимости и неприводимости многочленов рассматриваются над кольцом $\mathbb{Z}$) следует, что элементы $c^0, c^1, \dots,$

c^{q-1} составляют базис группы Z_c. Для каждого элемента $a \in Z_c$ через M_a будем обозначать матрицу, которая соответствует в этом базисе эндоморфизму φ_a (умножающему всякий элемент группы Z_c на a), и через $N(a)$ – модуль определителя матрицы M_a.

Поскольку при любом a M_a – целочисленная матрица, значениями функции $N(\,\cdot\,)$ будут целые неотрицательные числа. При этом $N(a) = 0$ тогда и только тогда, когда нулю равна некоторая нетривиальная линейная комбинация элементов $a, ac, \ldots, ac^{q-1}$ с целыми коэффициентами, что ввиду отсутствия в кольце $\mathbb{Z}[c]$ делителей нуля равносильно условию $a = 0$. Легко видеть также, что для любых элементов $a, b \in Z_c$ $M_{a+b} = M_a + M_b$ и $M_{ab} = M_a M_b$. Поэтому, в частности, $N(ab) = N(a)N(b)$.

Лемма 1. *Для каждого многочлена* $f \in \mathbb{Z}[x]$

$$N(f(c)) = \prod_{j=1}^{q} |f(\lambda_j)|.$$

Доказательство. Из отмеченных только что соотношений следует, что $N(f(c)) = |\det M_{f(c)}| = |\det f(M_c)|$. Так как для любой матрицы $T \in GL(q, \mathbb{C})$

$$\det f(M_c) = \det T^{-1} f(M_c) T = \det f(T^{-1} M_c T),$$

при вычислении числа $N(f(c))$ мы можем заменить M_c эквивалентной ей матрицей M_c' в нормальной жордановой форме.

Заметим теперь, что матрица M_c имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ g_0 & g_1 & \cdots & g_{q-2} & g_{q-1} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

и характеристический многочлен, равный $g(x)$, поэтому все ее комплексные собственные значения совпадают с числами λ_j, $1 \leqslant j \leqslant q$. Отсюда сразу же вытекает, что $f(M_c')$ – верхнетреугольная матрица, на главной диагонали которой стоят числа $f(\lambda_j)$, и

$$N(f(c)) = |\det f(M_c')| = \prod_{j=1}^{q} |f(\lambda_j)|.$$

Следующее утверждение проверяется при помощи совершенно элементарных рассуждений, поэтому мы ограничимся здесь лишь его формулировкой.

Лемма 2. *Пусть* $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. *Каково бы ни было натуральное число* s, *найдется положительное действительное число* ε, *удовлетворяющее условию*: $\forall z_1, z_2, \ldots, z_s \in C_1 \setminus \{1\}$ $\exists m \in \mathbb{N}$ $\forall k$, $1 \leqslant k \leqslant s$, $|z_k^m - 1| > \varepsilon$.

Лемма 3. *Каковы бы ни были натуральные числа ξ и n, найдется такое четное $m \in \mathbb{N}$, что $n \mid m$ и для любых многочленов $u, v \in \mathbb{Z}[x]$ справедливо утверждение*:

$$(\forall j,\ 1 \leqslant j \leqslant q,\ (|u(\lambda_j)| < \xi \wedge |v(\lambda_j)| < \xi)) \\ \Longrightarrow \left(\forall k,\ 0 \leqslant k \leqslant \frac{m}{2},\ N(u(c) - c^k v(c)) < N(c^m - 1)\right).$$

Доказательство. Если количество s корней многочлена g, равных по модулю единице, отлично от нуля, воспользуемся леммой 2 и найдем соответствующее ему число ε, которое без потери общности можно считать меньшим единицы, в противном случае положим $\varepsilon = 1/2$.

Так как $|\nu_j| < 1$, $1 \leqslant j \leqslant t$, то при всех k, начиная с некоторого $m_1 \in \mathbb{N}$, справедливы неравенства $|\nu_j^k| < 1 - \varepsilon$. Точно так же для некоторого $m_2 \in \mathbb{N}$

$$|\lambda_j^k| > \left(\frac{2\xi}{\varepsilon}\right)^{q+1}$$

при $1 \leqslant j \leqslant r$ и $k \geqslant m_2$.

Поскольку многочлен g неприводим и не является сверхунитарным, он взаимно прост с многочленом $x^{2m_1m_2n} - 1$. Поэтому все числа $z_j = \mu_j^{2m_1m_2n}$, $1 \leqslant j \leqslant s$, отличны от единицы и, применяя к ним лемму 2, мы можем найти такое число $m_3 \in \mathbb{N}$, что для каждого j $|z_j^{m_3} - 1| > \varepsilon$.

Положим $m = 2m_1m_2m_3n$. Тогда в силу леммы 1

$$N(c^m - 1) = \prod_{j=1}^{q} |\lambda_j^m - 1| \geqslant \prod_{j=1}^{r}\left(|\lambda_j^m| - 1\right) \cdot \prod_{j=1}^{s} |\mu_j^m - 1| \cdot \prod_{j=1}^{t}(1 - |\nu_j^m|) \\ > \varepsilon^{s+t} \prod_{j=1}^{r}(|\lambda_j^m| - 1).$$

С другой стороны, для произвольных многочленов $u, v \in \mathbb{Z}[x]$, удовлетворяющих необходимым неравенствам,

$$N(u(c) - c^k v(c)) \leqslant \prod_{j=1}^{q}(|u(\lambda_j)| + |\lambda_j^k|\,|v(\lambda_j)|) < \xi^q \prod_{j=1}^{q}(|\lambda_j^k| + 1) < 2^{s+t}\xi^q \prod_{j=1}^{r}(|\lambda_j^k| + 1).$$

Так как $m/2 \geqslant m_2$, то для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant r$,

$$\varepsilon^q(|\lambda_j^{m/2}| - 1) > (2\xi)^q, \qquad \varepsilon^q(|\lambda_j^m| - 1) > (2\xi)^q(|\lambda_j^{m/2}| + 1)$$

и при $k \leqslant m/2$

$$\varepsilon^q(|\lambda_j^m| - 1) > (2\xi)^q(|\lambda_j^k| + 1).$$

Перемножая r последних неравенств и учитывая, что $\varepsilon < 1 \leqslant \xi$, мы получаем соотношения $N(u(c) - c^k v(c)) < N(c^m - 1)$, $0 \leqslant k \leqslant m/2$, что и требовалось.

Пусть теперь $a, b \in Z_c$ – произвольные элементы, не являющиеся φ_c-эквивалентными, и n – некоторое натуральное число. Не ограничивая общности рассуждений, мы можем предположить, что $b \neq 0$.

Напомним, что при любом выборе числа $m \in \mathbb{N}$ подгруппа $B_m = (c^m - 1)Z_c = \{d\varphi_c^m - d \mid d \in Z_c\}$ принадлежит семейству $\Omega_{\varphi_c}(Z_c)$ и отображение $\bar{\varphi}_c = \varphi_c/B_m$ факторгруппы Z_c/B_m является автоморфизмом этой группы порядка m. Поэтому для доказательства свойства ФАφ_c группы Z_c нам в силу предложения 4 достаточно найти такое m, при котором элементы a и b не будут φ_c-эквивалентными по модулю подгруппы B_m. Если же m удастся выбрать так, чтобы оно делилось на n и порядок $\bar{\varphi}_c$-орбиты элемента $b + B_m$ совпадал с порядком автоморфизма $\bar{\varphi}_c$, то Z_c будет уже РФАφ_c-группой, что и требуется.

Представим элементы a и b в виде $a = u(c)$, $b = v(c)$ для некоторых многочленов $u, v \in \mathbb{Z}[x]$ и выберем число $\xi \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы числа $|u(\lambda_j)|$ и $|v(\lambda_j)|$ были меньше ξ при каждом j, $1 \leqslant j \leqslant q$. Далее воспользуемся леммой 3 и найдем число m, соответствующее n и ξ.

Применяя теперь утверждение из формулировки леммы к парам многочленов (u, v), (v, u) и (v, v), получаем, что при $0 \leqslant k \leqslant m/2$ числа $N(a - c^k b)$, $N(b - c^k a)$ и $N(b - c^k b)$ строго меньше $N(c^m - 1)$. Поскольку для каждого ненулевого элемента $d \in Z_c$

$$N(d(c^m - 1)) = N(d)N(c^m - 1) \geqslant N(c^m - 1),$$

это означает, что среди элементов $a - c^k b$, $b - c^k a$ и $b - c^k b$, $0 \leqslant k \leqslant m/2$, принадлежать подгруппе B_m могут лишь те, которые равны нулю в группе Z_c.

Из условия предложения теперь сразу же следует, что $b - c^k b \notin B_m$, $0 < k \leqslant m/2$, и, стало быть, порядок l $\bar{\varphi}_c$-орбиты элемента $b + B_m$ должен быть больше $m/2$. Но, с другой стороны, число l делит порядок автоморфизма $\bar{\varphi}_c$, поэтому $l = m$.

Похожим образом проверяется и соотношение $a \nsim_{\varphi_c} b \pmod{B_m}$.

Так как $a \nsim_{\varphi_c} b$, то $a \neq c^k b$ и $b \neq c^k a$ при любом неотрицательном k. Поэтому элемент $a + B_m \in Z_c/B_m$ не принадлежит множеству $S = \{(b + B_m)\bar{\varphi}_c^k \mid -m/2 \leqslant k \leqslant m/2\}$. Но, как только что показано, порядок $\bar{\varphi}_c$-орбиты элемента $b + B_m$ равен m и, значит, она полностью исчерпывается элементами множества S. Таким образом, $a + B_m \nsim_{\bar{\varphi}_c} b + B_m$ и предложение, тем самым, доказано.

Следующий шаг к решению рассматриваемой задачи позволяет сделать

Предложение 7. *Пусть A – свободная абелева группа конечного ранга и φ – ее инъективный эндоморфизм. Если характеристический многочлен χ_φ эндоморфизма φ не имеет сверхунитарных делителей, то A – РФАφ-группа.*

Доказательство будем вести индукцией по рангу r группы A.

Если $r = 1$, то $\chi_\varphi(x) = x - c$ для некоторого целого числа c, отличного от 0 и ± 1. Поэтому группа A изоморфна Z_c и при любом выборе изоморфизма $\rho\colon A \to Z_c$ эндоморфизмы $\varphi^\rho = \rho^{-1}\varphi\rho$ и φ_c совпадают. Таким образом, в данном случае искомое утверждение вытекает из предложения 6.

Перейдем теперь к проверке индуктивного шага.

Пусть V – некоторое векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ размерности r. Мы можем, очевидно, считать A подгруппой V, порожденной базисными векторами, а эндоморфизм φ – сужением подходящего линейного оператора σ пространства V.

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_r$ – некоторый жорданов базис оператора σ и V_1, V_2 – подпространства пространства V, порожденные, соответственно, вектором v_1 и векторами $v_2, \ldots, v_r$. Рассмотрим два случая.

1) $A \cap V_2 \neq 0$. Положим $A_2 = A \cap V_2$. Очевидно, что подгруппа A_2 изолирована в группе A и потому выделяется в ней прямым слагаемым. Обозначим через A_1 прямое дополнение этой подгруппы до A.

Поскольку матрица σ в базисе $v_1, v_2, \ldots, v_r$ является верхнетреугольной и невырожденной, $V_2 \in \Omega_\sigma(V)$. Отсюда следует, что $A_2 \in \Omega_\varphi(A)$ и мы можем определить ограничение φ_2 эндоморфизма φ на подгруппу A_2 и эндоморфизм φ_1, индуцируемый в группе A_1 отображением φ.

Пусть базис группы A получен объединением некоторых базисов подгрупп A_1 и A_2, и пусть M, M_1, M_2 – матрицы эндоморфизмов φ, φ_1, φ_2 в этих базисах. Тогда ввиду φ-допустимости подгруппы A_2 матрица M будет иметь следующий клеточный вид:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & * \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right), \qquad (**)$$

который говорит о том, что $\chi_\varphi = \chi_{\varphi_1} \cdot \chi_{\varphi_2}$ и, следовательно, характеристические многочлены χ_{φ_1} и χ_{φ_2} эндоморфизмов φ_1 и φ_2 также не имеют сверхунитарных делителей.

Поскольку группа A содержит некоторый базис пространства V, она не может целиком лежать в подпространстве V_2. Стало быть, ранги подгрупп A_1 и A_2 строго меньше r и мы можем применить к этим группам индуктивное предположение. Остается заметить, что группа A_1 изоморфна факторгруппе A/A_2 и с точностью до этого изоморфизма эндоморфизм φ_1 совпадает с эндоморфизмом φ/A_2. Таким образом, требуемое утверждение следует из второй части предложения 5.

2) $A \cap V_2 = 0$. В этом случае естественный гомоморфизм пространства V на факторпространство $\overline{V} = V/V_2$ определяет некоторое вложение ρ группы A в $\overline{V}$. Так как матрица σ в базисе $v_1, v_2, \ldots, v_r$ имеет нормальную жорданову форму, оператор σ индуцирует в одномерном пространстве $\overline{V}$ некоторую гомотетию $\bar{\sigma}$ и коэффициент этой гомотетии равен одному из корней многочлена χ_φ. С другой стороны, ограничение оператора $\bar{\sigma}$ на группу $A\rho$ совпадает, очевидно, с эндоморфизмом $\varphi^\rho = \rho^{-1}\varphi\rho$ данной группы.

Таким образом, учитывая изоморфизм пространства $\overline{V}$ и поля комплексных чисел (рассматриваемого как векторное пространство над самим собой), мы можем считать далее группу A подгруппой аддитивной группы поля $\mathbb{C}$, а эндоморфизм φ – ограничением отображения, умножающего каждый элемент из $\mathbb{C}$ на некоторый фиксированный корень c многочлена χ_φ. Отсюда, в частности, следует, что минимальный многочлен $g(x) = x^n - g_{n-1}x^{n-1} - \cdots - g_1 x - g_0$ числа c является также и минимальным аннулятором каждого элемента группы A.

Пусть $b \in A$ – произвольный ненулевой элемент и B – подгруппа, порожденная элементами $b\varphi^i, i \geqslant 0$. Очевидно, что подгруппа B φ-допустима, элементы $b, b\varphi, \ldots, b\varphi^{n-1}$, ввиду отмеченного только что свойства многочлена g, составляют ее базис, и матрица ограничения φ_B эндоморфизма φ на подгруппу B имеет в этом базисе форму Фробениуса $(*)$. Но ту же форму имеет в базисе $c^0, c^1, \ldots, c^{n-1}$ и матрица эндоморфизма φ_c группы Z_c. Кроме того, многочлен g делит χ_φ и по условию не является сверхунитарным. Поэтому из предложения 6 следует, что B является РФАφ_B-группой.

Обозначим через A_2 изолятор подгруппы B в группе A. Если $A_2 = A$, то в силу второй части предложения 3 A также будет РФАφ-группой, и рассуждение на этом закончено. Поэтому далее мы будем предполагать, что подгруппа A_2 отлична от всей группы A.

Покажем, что $A_2 \in \Omega_\varphi(A)$.

В самом деле, если a – произвольный элемент подгруппы A_2, то для некоторого натурального числа m $ma \in B$. Но подгруппа B φ-допустима, поэтому $m(a\varphi) = (ma)\varphi \in B$ и, следовательно, $a\varphi \in A_2$.

Проверка φ-изолированности оказывается несколько длиннее.

Если $a\varphi \in A_2$, то, как и выше, найдется такое натуральное число m, что $m(a\varphi) \in B$. Запишем элемент $ma\varphi$ в виде $ma\varphi = m_1b + m_2b\varphi + \dots + m_nb\varphi^{n-1}$.

Если $m_1 = 0$, то ввиду инъективности эндоморфизма φ $ma = m_2b + \dots + m_nb\varphi^{n-2} \in B$ и $a \in A_2$, что и требовалось. Поэтому далее мы можем считать, что $m_1 \neq 0$.

Пусть $d = ma - m_2b - \dots - m_nb\varphi^{n-2}$ и D – подгруппа, порожденная элементами $d\varphi^i$, $i \geqslant 0$. Из соотношения $d\varphi = m_1b$ следует, что $d \neq 0$ и $m_1B \leqslant D$. Но ранги подгрупп m_1B и D ввиду доказанного выше совпадают, поэтому порядок элемента d по модулю подгруппы B конечен. Отсюда вытекает, что $d \in A_2$, $ma \in A_2$ и, так как подгруппа A_2 изолирована, $a \in A_2$.

Тем самым, подгруппа A_2 оказывается φ-изолированной, и рассуждение теперь завершается так же, как и в случае 1).

Докажем, наконец, последнее утверждение, равносильное основной теореме ввиду предложения 1.

Предложение 8. *Произвольная конечно порожденная абелева группа A финитно аппроксимируема относительно φ-эквивалентности для каждого ее инъективного эндоморфизма φ.*

Доказательство. В силу предложения 2 и первой части предложения 5 нам достаточно найти такую подгруппу $B \in \Omega_\varphi(A)$, что ограничение φ_B эндоморфизма φ на эту подгруппу является автоморфизмом, а факторгруппа $\overline{A} = A/B$ обладает свойством РФА$\bar{\varphi}$, где $\bar{\varphi} = \varphi/B$.

Предположим сначала, что группа A не имеет кручения.

Существование искомой подгруппы очевидно, если в некотором базисе группы A матрица M эндоморфизма φ имеет вид $(**)$, причем у характеристического многочлена матрицы M_1 нет сверхунитарных делителей, а характеристический многочлен матрицы M_2 является сверхунитарным. Подгруппа B здесь порождается базисными элементами, соответствующими клетке M_2, а требуемые ее свойства вытекают из формы матрицы M, предложения 7 и замечания, сделанного в начале раздела.

В общем случае, как и при доказательстве предыдущего предложения, мы можем погрузить группу A в векторное пространство V соответствующей размерности, но уже над полем $\mathbb{Q}$, и считать эндоморфизм φ сужением подходящего линейного оператора σ пространства V.

Пусть $c_1, c_2, \dots, c_r$ – какой-нибудь базис пространства V, в котором матрица L оператора σ имеет нормальную форму Фробениуса (см., например, [14, гл. VII, § 5]). Более точно это означает, что L – клеточно диагональная матрица:

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & & & 0 \\ & L_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & L_k \end{pmatrix},$$

каждая клетка L_i которой имеет вид $(*)$ и характеристический многочлен, равный степени некоторого неприводимого над полем $\mathbb{Q}$ многочлена f_i.

Умножая при необходимости векторы $c_1, c_2, \ldots, c_r$ на одно и то же целое число, можем считать, что все они лежат в группе A и, стало быть, порождают в ней некоторую подгруппу C конечного индекса. Поскольку многочлены f_i унитарны и являются, очевидно, делителями характеристического многочлена χ_φ эндоморфизма φ, они принадлежат кольцу $\mathbb{Z}[x]$. Поэтому матрица L целочисленна и подгруппа C σ- и φ-допустима.

Обозначая через ψ ограничение эндоморфизма φ на подгруппу C, видим, что матрица этого ограничения в базисе $c_1, c_2, \ldots, c_r$ совпадает с L и что, перенумеровав подходящим образом базисные элементы, ее можно привести к виду, о котором шла речь в отмеченном выше частном случае. Поэтому группа C обладает такой подгруппой $D \in \Omega_\psi(C)$, что $\psi_D \in \mathrm{Aut}(D)$ и $\overline{C} = C/D$ – РФА$\bar{\psi}$-группа (здесь, как обычно, $\psi_D = \psi|_D$ и $\bar{\psi} = \psi/D$).

Пусть B обозначает изолятор подгруппы D в группе A. Как и в предыдущем предложении, легко проверяется, что подгруппа B φ-допустима, поэтому мы можем говорить об ограничении φ_B эндоморфизма φ на эту подгруппу. Покажем, что отображение φ_B обратимо.

В самом деле, пусть b – произвольный элемент группы B.

Поскольку подгруппа D ψ-инвариантна и отображение ψ_D является сужением эндоморфизма φ_B, последний индуцирует в факторгруппе $\overline{B} = B/D$ инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}_B = \varphi_B/D$. Но группа $\overline{B}$ конечна; следовательно, отображение $\bar{\varphi}_B$ является автоморфизмом и существует такой элемент $b_1 + D$, что $b + D = (b_1 + D)\bar{\varphi}_B$.

Возвращаясь к группе B, получаем, что $b = b_1\varphi_B + d$ для некоторого элемента $d \in D$ и в силу уже упоминавшейся ψ-инвариантности подгруппы D $d = d_1\psi_D$ для некоторого $d_1 \in D$. Стало быть, $b = b_1\varphi_B + d_1\psi_D = (b_1 + d_1)\varphi_B$, что и требовалось.

Таким образом, отображение φ_B является автоморфизмом группы B и, в частности, $B \in \Omega_\varphi(A)$. Остается лишь проверить, что факторгруппа $\overline{A} = A/B$ обладает свойством РФА$\bar{\varphi}$.

Так как факторгруппа $\overline{C} = C/D$ является РФА$\bar{\psi}$-группой, она не имеет кручения. Поэтому $C \cap B = D$ и $C/D = C/C \cap B \cong (C + B)/B$. Легко видеть также, что этот изоморфизм переводит эндоморфизм $\bar{\psi}$ группы $\overline{C}$ в ограничение эндоморфизма $\bar{\varphi}$ на подгруппу $(C + B)/B$. Стало быть, группа $\overline{A} = A/B$ оказывается расширением РФА$\bar{\varphi}$-группы $(C + B)/B$ и $|(A/B)/((C + B)/B)| = |A/(C + B)| \leqslant |A/C| < \infty$, так что искомое утверждение вытекает из второй части предложения 3.

Обратимся теперь к общей ситуации, когда A является произвольной конечно порожденной абелевой группой, и рассмотрим факторгруппу C группы A по ее периодической части T.

Поскольку подгруппа T, очевидно, φ-инвариантна, эндоморфизм φ индуцирует в группе C инъективный эндоморфизм $\psi = \varphi/T$. Воспользуемся доказанным ранее и найдем такую подгруппу $D \in \Omega_\psi(C)$, что $\psi_D \in \mathrm{Aut}(D)$ и $\overline{C} = C/D$ является РФА$\bar{\psi}$-группой.

Как и выше, проверяется, что подгруппа $B = D + T$ φ-инвариантна, поэтому мы можем определить эндоморфизм $\bar{\varphi} = \varphi/B$ факторгруппы $\overline{A} = A/B$. Для завершения доказательства теперь остается заметить, что $\overline{A} \cong \overline{C}$ и с точностью до этого изоморфизма $\bar{\varphi} = \bar{\psi}$. Таким образом, $\overline{A}$ является РФА$\bar{\varphi}$-группой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Raptis E., Varsos D. The residual finiteness of HNN-extensions and generalized free products of nilpotent groups: A characterization // J. Aust. Math. Soc. Ser. A. 1992. V. 53. №3. P. 408–420.
[2] Raptis E., Talelli O., Varsos D. On the conjugacy separability of certain graphs of groups // J. Algebra. 1998. V. 199. №1. P. 327–336.
[3] Молдаванский Д. И. Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2002. №3. С. 123–133.
[4] Сенкевич О. Е. Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых HNN-расширений групп // Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и приложения. Тезисы докл. V Международной конференции (Тула, 19–24 мая 2003 г.). Тула: ТГПУ, 2003. С. 201–202.
[5] Молдаванский Д. И. Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп // Укр. матем. ж. 1992. Т. 44. С. 842–845.
[6] Rhemtulla A. H., Shirvani M. The residual finiteness of ascending HNN-extensions of certain soluble groups // Illinois J. Math. 2003. V. 47. №1–2. P. 477–484.
[7] Каргаполов М. И., Тимошенко Е. И. К вопросу о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности метабелевых групп // 4-й Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы докл. (Новосибирск, 5–9 февраля 1973 г.). Новосибирск, 1973. С. 86–88.
[8] Ремесленников В. Н. Сопряженность в полициклических группах // Алгебра и логика. 1969. Т. 8. С. 712–725.
[9] Сенкевич О. Е. О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности нисходящих HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп // Чебышевский сб. 2004. Т. 5. №2. С. 121–130.
[10] Молдаванский Д. И., Кравченко Н. В., Фролова Е. Н. Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула, 1986. С. 81–91.
[11] Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
[12] Носков Г. А. О сопряженности в метабелевых группах // Матем. заметки. 1982. Т. 31. №4. С. 495–507.
[13] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
[14] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.

Ивановский государственный университет
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

Поступило
23.09.2004
Исправленный вариант
28.03.2005