Математика и её приложения: ЖИМО. 2011. Вып. 1 (8). С. 101 – 104.

УДК 512.543

Е. В. Соколов[1]

Об отделимости циклических подгрупп свободной группы корневым классом групп

Ключевые слова: свободные группы, отделимость циклических подгрупп, корневые классы групп.

Получено описание циклических подгрупп свободной группы, отделимых произвольным классом групп, замкнутым относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. С его помощью для произвольного корневого класса групп $\mathcal{C}$ найдено описание $\mathcal{C}$-отделимых циклических подгрупп расширения свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы.

Keywords: free groups, cyclic subgroup separability, root classes of groups.

Let $\mathcal{C}$ be a class of groups closed under taking subgroups and direct products of finite numbers of groups. We obtain the description of $\mathcal{C}$-separable cyclic subgroups of a free group. Using this result we get the description of $\mathcal{R}$-separable cyclic subgroups of a free-by-$\mathcal{R}$ group for any root class of groups $\mathcal{R}$.

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу. Если X — некоторая группа, то, следуя работе [2], через $\mathcal{C}^*(X)$ будем обозначать семейство всех ко-$\mathcal{C}$ подгрупп группы X, т. е. таких нормальных подгрупп этой группы, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{C}$.

Напомним, что подгруппа Y группы X называется $\mathcal{C}$-отделимой в X, если $\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} YN = Y$. Напомним также, что группа X называется $\mathcal{C}$-аппроксимируемой, если ее единичная подгруппа $\mathcal{C}$-отделима.

Целью настоящей заметки является описание всех $\mathcal{C}$-отделимых циклических подгрупп в свободных группах и их $\mathcal{C}$-расширениях при различных сочетаниях приведенных ниже ограничений, накладываемых на класс $\mathcal{C}$:

(C1) Класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп.

(C2) Для любой группы X и любых подгрупп $Y \in \mathcal{C}^*(X)$ и $Z \in \mathcal{C}^*(Y)$ существует подгруппа $T \in \mathcal{C}^*(X)$, лежащая в Z.

(C3) Класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно расширений.

Напомним, что класс групп, удовлетворяющий условиям (C1) и (C2), называется корневым [4]. В работе [1] установлено, что для любого корневого класса групп $\mathcal{C}$ произвольное расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы $\mathcal{C}$-аппроксимируемо. В данной статье мы дополним это утверждение описанием $\mathcal{C}$-отделимых циклических подгрупп указанного расширения. Чтобы сформулировать полученные результаты, введем несколько вспомогательных определений и обозначений.

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: ev-sokolov@yandex.ru.

Если все группы из класса $\mathcal{C}$ — периодические, то через $\pi(\mathcal{C})$ будем обозначать множество простых делителей порядков их элементов. Если же класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, положим $\pi(\mathcal{C})$ равным множеству всех простых чисел. В обоих случаях через $\pi(\mathcal{C})'$ будем обозначать множество всех простых чисел, не принадлежащих $\pi(\mathcal{C})$. Заметим, что поскольку в классе $\mathcal{C}$ имеется по крайней мере одна неединичная группа, то $\pi(\mathcal{C}) \neq \varnothing$.

Напомним, что подгруппа Y некоторой группы X называется $\pi(\mathcal{C})'$-изолированной в X, если для любого элемента $x \in X \setminus Y$ и для любого простого числа $q \in \pi(\mathcal{C})'$ из включения $x^q \in Y$ вытекает, что $x \in Y$. Нетрудно показать, что, каков бы ни был класс групп $\mathcal{C}$, каждая $\mathcal{C}$-отделимая подгруппа является $\pi(\mathcal{C})'$-изолированной. Следующие две теоремы доставляют условия, при которых оказываются верными и обратные утверждения.

Теорема 1. *Если класс $\mathcal{C}$ удовлетворяет условиям* (C1) *и* (C3)*, то в любой свободной группе все $\pi(\mathcal{C})'$-изолированные циклические подгруппы $\mathcal{C}$-отделимы. В частности, произвольная свободная группа $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Теорема 2. *Пусть класс $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию* (C2)*, класс $\mathcal{S}$ — условию* (C1)*. Если все $\pi(\mathcal{C})'$-изолированные $\mathcal{S}$-подгруппы некоторой группы G $\mathcal{C}$-отделимы, то и в любом расширении группы G при помощи $\mathcal{C}$-группы все $\pi(\mathcal{C})'$-изолированные $\mathcal{S}$-подгруппы $\mathcal{C}$-отделимы.*

Теорема 1 обобщает, а теорема 2 дополняет два известных утверждения, в которых речь идет об аппроксимируемости: теорему 1 из [1] и лемму 1.5 из [4]. Так как любой корневой класс групп удовлетворяет условиям (C1) и (C2), а из (C2) очевидным образом получается (C3), то из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие. *Если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, то в произвольном расширении свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы все $\pi(\mathcal{C})'$-изолированные циклические подгруппы $\mathcal{C}$-отделимы.*

Отметим, что если $\pi(\mathcal{C})$ совпадает с множеством всех простых чисел, то каждая подгруппа оказывается $\pi(\mathcal{C})'$-изолированной. Таким образом, для любого класса групп $\mathcal{C}$, содержащего хотя бы одну непериодическую группу, требование $\pi(\mathcal{C})'$-изолированности подгруппы ровным счетом ничего не означает.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего приведем два утверждения, полученные в [3], которые потребуются нам для дальнейших рассуждений.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{D}$ — класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, и пусть G — $\mathcal{D}$-аппроксимируемая группа. Тогда произвольная полициклическая подгруппа группы G $\mathcal{D}$-отделима.*

Предложение 2. *Пусть группа G аппроксимируема классом $\mathcal{N}$ всех конечно порожденных нильпотентных групп без кручения. Тогда для каждой $\mathcal{N}$-подгруппы H группы G и для каждого простого числа p множество $\mathrm{Rt}_{p'}(G, H)$ всех корней p'-степеней, извлекающихся в группе G из элементов подгруппы H, является $\mathcal{N}$-подгруппой, отделимой в классе ко-*

нечных p-групп.

Здесь и далее под p'-числом мы понимаем любое натуральное число, все простые делители которого отличны от p. Еще одно необходимое нам утверждение доставляет

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{D}$ — произвольный класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу, H — $\pi(\mathcal{D})'$-изолированная подгруппа некоторой группы G. Тогда для каждого элемента $g \in G\backslash H$ найдется число $p \in \pi(\mathcal{D})$ такое, что $g \notin \mathrm{Rt}_{p'}(G,H)$.*

Доказательство. Если элемент g ни в какой положительной степени не принадлежит подгруппе H, то на роль p, очевидно, подходит любое число из множества $\pi(\mathcal{D})$. Поэтому далее будем считать, что это не так, и обозначим через n минимальное положительное число, удовлетворяющее условию $g^n \in H$.

Поскольку подгруппа H $\pi(\mathcal{D})'$-изолирована в группе G, n является $\pi(\mathcal{D})$-числом. Выберем в качестве p произвольный простой делитель n.

Если мы предположим, что $g^q \in H$ для некоторого p'-числа q, то, полагая $d = (n,q)$, получим, что $g^d \in H$, так как $d = nu + qv$ для подходящих целых чисел u и v. Но n не является p'-числом и потому не может делить q. Следовательно, $d < n$, и мы приходим к противоречию с минимальностью n.

Таким образом, $p \in \pi(\mathcal{D})$ и $g \notin \mathrm{Rt}_{p'}(G,H)$, что и требовалось. ■

Перейдем теперь собственно к доказательству теоремы и рассмотрим сначала случай, когда классу $\mathcal{C}$ принадлежит некоторая непериодическая группа. Эта группа имеет бесконечную циклическую подгруппу, которая в силу условия (С1) также является $\mathcal{C}$-группой. Из условия (С3) теперь следует, что и все поли-$\mathbb{Z}$ группы (т. е. группы, обладающие субнормальным рядом с бесконечными циклическими факторами) принадлежат классу $\mathcal{C}$. В частности, $\mathcal{C}$ содержит класс $\mathcal{N}$.

Хорошо известно, что свободные группы $\mathcal{N}$-аппроксимируемы [5]. Поэтому в силу предложения 1 все их циклические подгруппы $\mathcal{N}$-отделимы. Но это значит, что они отделимы и классом $\mathcal{C}$.

Пусть теперь класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп. Рассуждая, как и выше, мы получаем, что для каждого простого числа $p \in \pi(\mathcal{C})$ в классе $\mathcal{C}$ содержится класс $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп. Стало быть, нам достаточно доказать отделимость $\pi(\mathcal{C})'$-изолированных циклических подгрупп свободной группы объединением $\mathcal{P}$ классов $\mathcal{F}_p$ по всем $p \in \pi(\mathcal{C})$.

Пусть H — $\pi(\mathcal{C})'$-изолированная циклическая подгруппа некоторой свободной группы G и $g \in G\backslash H$ — произвольный элемент. Тогда согласно предложению 3 найдется такое число $p \in \pi(\mathcal{C})$, что g не принадлежит множеству $\mathrm{Rt}_{p'}(G,H)$. В силу предложения 2 это множество является подгруппой, $\mathcal{F}_p$-отделимой в группе G. Поэтому существует подгруппа $N \in \mathcal{F}_p^*(G)$ такая, что $g \notin \mathrm{Rt}_{p'}(G,H)N$. Но $H \leqslant \mathrm{Rt}_{p'}(G,H)$, следовательно, $g \notin HN$ и, ввиду произвольности выбора элемента g, подгруппа H $\mathcal{P}$-отделима.

Итак, установлено, что для любого класса $\mathcal{C}$, удовлетворяющего условиям (С1) и (С3), и для любой свободной группы G все $\pi(\mathcal{C})'$-изолированные циклические подгруппы этой группы являются $\mathcal{C}$-отделимыми. Поскольку свободные группы не имеют кручения, к числу $\pi(\mathcal{C})'$-изолированных подгрупп группы G всегда относится и единичная, оказывающаяся в силу доказанного $\mathcal{C}$-отделимой. Таким образом, мы получаем, что группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема.

Доказательство теоремы 2. Пусть X — некоторое расширение группы G при помощи $\mathcal{C}$-группы, Y — $\pi(\mathcal{C})'$-изолированная $\mathcal{S}$-подгруппа группы X, $x \in X$ — произвольный элемент, не принадлежащий подгруппе Y. Нам достаточно указать подгруппу $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такую, что $x \notin YN$.

Если $x \notin YG$, то подгруппа G — искомая. Поэтому далее будем считать, что $x \in YG$.

Запишем элемент x в виде $x = yg$, где $y \in Y$, $g \in G$. Заметим, что поскольку $x \notin Y$, элемент g не может принадлежать пересечению $Y \cap G$. Заметим также, что подгруппа $Y \cap G$ $\pi(\mathcal{C})'$-изолирована в группе G: если элемент $h \in G$ и простое число $q \in \pi(\mathcal{C})'$ таковы, что $h^q \in Y \cap G$, то $h \in Y$ в силу $\pi(\mathcal{C})'$-изолированности подгруппы Y в группе X и потому $h \in Y \cap G$.

Из условия теоремы теперь следует, что $Y \cap G$ — $\mathcal{S}$-подгруппа, $\mathcal{C}$-отделимая в группе G. Поэтому найдется подгруппа $M \in \mathcal{C}^*(G)$ такая, что $g \notin (Y \cap G)M$. А так как класс $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию (C2), то существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$, лежащая в M.

Если мы предположим теперь, что элемент x содержится в подгруппе YN, то, записав его в виде $x = y_1 u$ для подходящих элементов $y_1 \in Y$ и $u \in N$, получим, что $y^{-1}y_1 = gu^{-1}$. Левая часть этого равенства представляет собой элемент подгруппы Y, правая — элемент подгруппы G, следовательно, $y^{-1}y_1 \in Y \cap G$. Но в этом случае $g = (y^{-1}y_1)u \in (Y \cap G)N$ и, так как N лежит в M, то $g \in (Y \cap G)M$, что противоречит выбору подгруппы M.

Таким образом, подгруппа N — искомая.

Список литературы

1. *Азаров Д. Н., Тъеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. – 2002. – Вып. 5. – С. 6–10.

2. *Гольцов Д. В., Яцкин Н. И.* Классы групп и подгрупповые топологии // Вестник ИвГУ. Сер. “Естественные, общественные науки”. – 2011. – Вып. 2. – С. 115–128.

3. *Соколов Е. В.* Замечание об отделимости подгрупп в классе конечных π-групп // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73. – Вып. 6. – С. 904–909.

4. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. – Ser. 3. – 1957. – V. 7. – P. 29–62.

5. *Magnus W.* Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring // Math. Ann. – 1935. – V. 111. – P. 259–280.

Поступила в редакцию 23.12.2011.