ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 13 Выпуск 1 (2012)

Труды IX Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной 80-летию профессора Мартина Давидовича
Гриндлингера

УДК 512.543

НЕКОТОРЫЕ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

Е. В. Соколов (г. Иваново)

Аннотация

В работе приводится краткий обзор известных результатов и ряд новых утверждений об аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп некоторыми классами конечных групп. Основное внимание уделено классу групп, все простые делители порядков которых принадлежат фиксированному множеству простых чисел, и его подклассам, состоящим из нильпотентных и разрешимых групп.

Понятие аппроксимационного свойства групп и термин "финитная аппроксимируемость" введены в работе Ф. Холла [1], хотя первые результаты об аппроксимируемости групп были получены уже к концу 30-х гг. прошлого века. Напомним, что группа X называется аппроксимируемой классом групп $\mathcal{C}$ или, короче, $\mathcal{C}$-аппроксимируемой, если для любого отличного от единицы элемента $x \in X$ существует гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{C}$, при котором образ x по-прежнему отличен от 1. В случае, когда класс $\mathcal{C}$ состоит из всех конечных групп, аппроксимируемость этим классом называют финитной.

Напомним также, что свободным произведением двух групп A и B с подгруппами $H \leq A$ и $K \leq B$, объединенными относительно изоморфизма $\varphi : H \to K$, или, короче, обобщенным свободным произведением групп A и B называется группа G, порождающими которой являются порождающие групп A и B, а определяющими соотношениями — определяющие соотношения групп A и B, а также все соотношения вида $h = h\varphi$, где h — слово от порождающих группы A, определяющее элемент из подгруппы H, а $h\varphi$ — слово от порождающих группы B, определяющее элемент из подгруппы K, являющийся образом элемента h относительно изоморфизма φ (все введенные в этом абзаце обозначения предполагаются фиксированными до конца изложения).

Начало систематическому изучению аппроксимационных свойств обобщенного свободного произведения групп положила работа Г. Баумслага [2], в которой, в частности, было указано весьма общее достаточное условие финитной аппроксимируемости данной конструкции. Почти в то же время Г. Хигменом [3] был доказан критерий аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп. Используя этот критерий, Е. Д. Логинова [4] нашла достаточное условие $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух произвольных групп, аналогичное упомянутому выше достаточному условию Г. Баумслага (позже это утверждение было получено также в [5]). Следует отметить, что доказательства большинства известных результатов об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений явно или неявно опираются на данное условие.

Значительно менее изучены свойства аппроксимируемости обобщенного свободного произведения классом $\mathcal{F}_\pi$ всех конечных π-групп, а также его подклассами (напомним, что конечная группа называется π-группой, если все простые делители ее порядка принадлежат некоторому фиксированному непустому множеству простых чисел π). Фактически все известные до недавнего времени результаты об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп исчерпываются сформулированными ниже предложениями 1, 2 и теоремами 2–5 из статьи [6]. Ряд новых утверждений, полученных в этом направлении, анонсирован в [7].

Прежде, чем привести обещанные предложения, напомним, что подгруппа Y некоторой группы X называется π'-изолированной в этой группе, если для любого элемента $x \in X \backslash Y$ и для любого простого числа $q \notin \pi$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$. Необходимо отметить, что если π совпадает с множеством всех простых чисел, то π'-изолированной оказывается любая подгруппа. Поэтому требование π'-изолированности в данном случае ровным счетом ничего не означает.

Предложение 1. *[8], [9] Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы, H и K — их собственные бесконечные циклические подгруппы. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы 1 и H π'-изолированы в группе A, подгруппы 1 и K π'-изолированы в группе B.*

Предложение 2. *[10] Пусть A и B — свободные группы, H и K — их собственные циклические подгруппы.*

1. Если группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то либо подгруппы H и K π'-изолированы в группах A и B, либо хотя бы одна из этих подгрупп является изолированной в соответствующем свободном множителе.

2. Если подгруппы H и K π'-изолированы в группах A и B, то группа G аппроксимируется конечными разрешимыми π-группами.

3. Если хотя бы одна из подгрупп H и K является изолированной в соответствующем свободном множителе, то группа G аппроксимируется конечными нильпотентными π-группами для любого множества простых чисел π.

Отметим, что частные случаи предложений 1 и 2 для одноэлементного множества π доказаны также в [11].

Напомним далее, что класс групп $\mathcal{C}$ называется корневым [12], если он является наследственным и всякая группа X удовлетворяет следующему условию:

$$\forall Y \in \mathcal{C}^*(X) \quad \forall Z \in \mathcal{C}^*(Y) \quad \exists T \in \mathcal{C}^*(X) \quad T \leq Z. \tag{1}$$

Здесь и далее через $\mathcal{C}^*(X)$ мы будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{C}$.

Легко видеть, что для класса, состоящего из конечных групп, условие (1) равносильно замкнутости данного класса относительно взятия расширений групп. В общем случае это не так: в качестве примера можно привести класс полисвободных групп (т. е., групп, обладающих конечным субнормальным рядом со свободными факторами), который замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, но не является корневым [13].

В работе [14] показано, что аналог достаточного условия Г. Баумслага имеет место и для свойства аппроксимируемости произвольным корневым классом групп. С его помощью там же установлено, что свободное произведение с объединенными ретрактами двух групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{C}$, само является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой группой. Еще одним результатом работы [14] является теорема об аппроксимируемости произвольным корневым классом групп $\mathcal{C}$, замкнутым относительно факторизации, свободного произведения двух $\mathcal{C}$-групп с центральными объединенными подгруппами. Частный случай этого утверждения для класса разрешимых групп доказан в [15]. Следует отметить, что в работах Д. Кахробайи [15]–[17] получено значительное число других интересных результатов об аппроксимируемости обобщенного свободного произведения разрешимыми группами.

Заметим, что все упоминавшиеся до сих пор классы групп являлись корневыми. Хорошо известными примерами некорневых классов служат класс всех нильпотентных групп, а также некоторые его подклассы, состоящие из конечных и конечно порожденных групп.

Поскольку каждая конечная p-группа нильпотентна, из аппроксимируемости заданной группы конечными p-группами для некоторого простого числа p следует ее нильпотентная аппроксимируемость. Обратное утверждение, очевидно, выполняется не всегда, но для обобщенных свободных произведений — довольно часто. Например, это верно для групп, удовлетворяющих условиям предложений 1 и 2 ([8]–[10]). Большое число примеров обобщенных свободных произведений двух групп, нильпотентная аппроксимируемость которых не равносильна $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости ни для какого простого числа p, указано в работах Е. А. Ивановой [18]–[20]. В частности, ею доказано

Предложение 3. *Пусть выполняется одно из следующих условий:*

a) A и B — конечно порожденные абелевы группы;

b) A и B — конечно порожденные нильпотентные группы, H и K — бесконечные циклические подгруппы.

Если подгруппы H и K собственным образом содержатся в группах A и B, то группа G аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда существует такое простое число p, что подгруппа H p'-изолирована в группе A и подгруппа K p'-изолирована в группе B.

Первым из результатов настоящей работы является приводимая ниже теорема 1. Она доставляет еще один аналог достаточного условия аппроксимируемости Г. Баумслага и является обобщением упомянутого выше утверждения из работы [14] об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами. Через $\Phi \cdot \mathcal{C}$ в формулировке данной теоремы обозначен класс групп, состоящий из всевозможных расширений свободных групп при помощи групп из класса $\mathcal{C}$. Заметим, что класс $\Phi{\cdot}\mathcal{C}$, очевидно, не обязан быть корневым.

Теорема 1. *Пусть для группы G выполнены следующие условия:*

$$\bigcap_{X \in \mathcal{C}^*(G)} (X \cap A) = 1 = \bigcap_{X \in \mathcal{C}^*(G)} (X \cap B), \tag{2}$$

$$\bigcap_{X \in \mathcal{C}^*(G)} (X \cap A)\, H = H, \quad \bigcap_{X \in \mathcal{C}^*(G)} (X \cap B)\, K = K, \tag{3}$$

$$\forall X, Y \in \mathcal{C}^*(G) \quad \exists T \in \mathcal{C}^*(G) \quad T \leq X \cap Y. \tag{4}$$

Тогда:

1. Для каждого неединичного элемента $g \in A \cup B$ существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{C}$, при котором g переходит в элемент, отличный от 1.

2. Для каждого элемента $g \notin A \cup B$ существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\Phi \cdot \mathcal{C}$, при котором g переходит в элемент, отличный от 1.

В частности, группа G аппроксимируется классом $\Phi \cdot \mathcal{C}$.

Напомним далее, что разрешимая группа называется ограниченной в смысле А. И. Мальцева [21], если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор X которого является абелевой группой, удовлетворяющей следующим двум условиям:

1) все примарные компоненты группы X конечны;

2) фактор-группа группы X по ее периодической части имеет конечный ранг.

Нильпотентную группу будем называть ограниченной, если она является ограниченной разрешимой группой. В действительности, нильпотентная группа ограничена тогда и только тогда, когда она обладает конечным центральным рядом, факторы которого удовлетворяют сформулированным выше условиям 1 и 2 [22], [23]. Очевидно также, что ограниченными являются все конечно порожденные нильпотентные группы.

Используя теорему 1, свойства изоляторов подгрупп в ограниченных нильпотентных группах и группах, аппроксимируемых ограниченными нильпотентными группами без кручения, а также некоторые другие результаты из [23], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть каждая из групп A, B принадлежит классу $\mathcal{BN}$ ограниченных нильпотентных групп или аппроксимируется $\mathcal{BN}$-группами без кручения, $H, K \in \mathcal{BN}$ (это условие выполняется автоматически, если $A \in \mathcal{BN}$ или $B \in \mathcal{BN}$), и пусть справедливо хотя бы одно из следующих утверждений:*

a) подгруппы H и K являются локально циклическими;

b) хотя бы одна из подгрупп H и K лежит в центре соответствующего свободного множителя;

c) подгруппы H и K нормальны в группах A и B, соответственно, и фактор-группа группы H по ее коммутанту H' либо является локально циклической, либо лежит в центре хотя бы одной из фактор-групп A/H' и B/H'.

Тогда:

1. Если непустое множество простых чисел π таково, что подгруппы 1 и H π'-изолированы в группе A, а подгруппы 1 и K π'-изолированы в группе B, то группа G аппроксимируется классом $\Phi \cdot \mathcal{FN}_\pi$, а, следовательно, и классом $\mathcal{F}_p \cdot \mathcal{FN}_\pi$ для любого простого числа p.

2. Если простое число p таково, что подгруппа H p'-изолирована в группе A и подгруппа K p'-изолирована в группе B, то группа G аппроксимируется классом $\mathcal{FN}_\pi$ для любого множества простых чисел π, включающего число p и все простые делители конечных порядков элементов групп A и B.

3. Если простое число p таково, что подгруппы 1 и H p'-изолированы в группе A, а подгруппы 1 и K p'-изолированы в группе B, то группа G аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$.

Здесь $\mathcal{FN}_\pi$ обозначает класс всех конечных нильпотентных π-групп, а $\Phi \cdot \mathcal{FN}_\pi$ и $\mathcal{F}_p \cdot \mathcal{FN}_\pi$ — классы групп, состоящие из всевозможных расширений при помощи $\mathcal{FN}_\pi$-групп свободных групп и конечных p-групп, соответственно. Отметим, что утверждение 3 данной теоремы является, очевидно, частным случаем утверждения 1 и приводится лишь для наглядности.

Если группы A и B нильпотентны, а подгруппы H и K содержатся в них собственным образом, утверждения 1–3 теоремы 2 доставляют не только достаточные, но и необходимые условия аппроксимируемости группы G указанными в них классами конечных групп. То же самое верно, и когда H и K являются собственными нормальными подгруппами групп A и B. Поэтому теорема 2 обобщает предложения 1 и 3, а также ряд результатов из работ [5], [6] и [16].

В остальных случаях, как следует из предложения 2, π'-изолированность обеих подгрупп H и K для указанного в утверждениях 1–3 множества π уже не будет необходимым условием аппроксимируемости группы G соответствующим классом групп. Можно утверждать, однако, что если подгруппа H не является π'-изолированной в группе A, то подгруппа K должна быть изолированной в группе B и наоборот.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Hall P. The splitting properties of relatively free groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1954. V. 4. P. 343-356.

[2] Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193-209.

[3] Higman G. Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 301-305.

[4] Логинова Е. Д. Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40, № 2. С. 395-407.

[5] Kim G., Lee Y., McCarron J. Residual p-finiteness of certain generalized free products of nilpotent groups // KYUNGPOOK Math. J. 2008. V. 48. P. 495-502.

[6] Молдаванский Д. И., Копрова А. Е. Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп // Науч. тр. ИвГУ. Математика. Вып. 6 (2008). С. 59-70.

[7] Туманова Е. А. Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп // Чебышевский сборник. 2012. Т. 12. Вып. 1(41). С. **??**–**??**.

[8] Азаров Д. Н. Финитная аппроксимируемость и другие аппроксимационные свойства свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Иванов. гос. ун-т. – Иваново, 1999, – 55 с. – Рус. – Деп. в ВИНИТИ 28.04.99 № 1371-В99.

[9] Азаров Д. Н. Аппроксимируемость свободного произведения групп с одной объединенной подгруппой некоторыми классами конечных групп // Диссертация… канд. физ.-мат. наук. Иваново. 2000 г.

[10] Азаров Д. Н. О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Мат. заметки. 1998. Т. 64. Вып. 1. С. 3-8.

[11] Kim G., Tang C. Y. On generalized free products of residually finite p-groups // J. Algebra. 1998. V. 201. P. 317-327.

[12] Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1957. V. 7. P. 29-62.

[13] Гудовщикова А. С., Соколов Е. В. Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных свободных произведений двух групп // Вестник ИвГУ. Сер. "Естественные, общественные науки". 2012. Вып. 2. С. 115-123.

[14] Азаров Д. Н., Туманова Е. А. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. ИвГУ. Математика. Вып. 6 (2008). С. 29-42.

[15] Kahrobaei D., Majewicz S. On the residual solvability of generalized free products of solvable groups // DMTCS. 2012. V. 13, № 4. P. 45-50.

[16] Kahrobaei D. On the residual solvability of generalized free products of finitely generated nilpotent groups // Commun. Algebra. 2011. V. 39, № 2. P. 647-656.

[17] Kahrobaei D. Doubles of residually solvable groups. Aspects of Infinite Group Theory, Algebra and Discrete Mathematics. Vol. 1. World Scientific, 2008.

[18] Иванова Е. А. Об аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения с объединенной подгруппой двух абелевых групп // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3. Вып. 1. С. 72-77.

[19] Иванова Е. А. О нильпотентной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп // Диссертация... канд. физ.-мат. наук. Иваново. 2004 г.

[20] Иванова Е. А. Аппроксимируемость нильпотентными группами свободного произведения двух групп с объединенными конечными подгруппами // Вестник ИвГУ. Сер. "Биология, Химия, Физика, Математика". 2004. Вып. 3. С. 120-125.

[21] Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49-60.

[22] Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп в некоторых классах конечных групп // Иванов. гос. ун-т – Иваново, 2003, – 90 с. – Библиогр. 49 назв. – Рус. – Деп. в ВИНИТИ 22.07.2003 № 1433-В2003.

[23] Соколов Е. В. Отделимость подгрупп некоторыми классами конечных групп. LAP Lambert Academic Publishing, 2012. 124 с. ISBN 978-3-8465-8581-8.

Ивановский государственный университет.
Получено 15.05.2012