УДК 512.543
ББК 22.144.12

А. С. ГУДОВЩИКОВА, Е. В. СОКОЛОВ[0]

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ О КЛАССЕ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ π-ГРУПП

Пусть π — некоторое непустое множество простых чисел. Установлено, что класс всех конечных разрешимых π-групп является корневым в смысле Грюнберга и совпадает с пересечением всех таких корневых классов групп C, что множество всех простых делителей порядков всевозможных конечных подгрупп C-групп совпадает с π.

Ключевые слова: *корневой класс групп, конечные разрешимые группы.*

Let π be a nonempty set of prime numbers. We prove that the class of all finite soluble π-groups is a root class of groups in a sense of Gruenberg and coincides with the intersection of all such root classes of groups C that the set of all prime divisors of the orders of all finite subgroups of C-groups coincides with π.

Key words: *root class of groups, finite soluble groups.*

Напомним, что класс групп C называется корневым [2], если он является наследственным, замкнут относительно прямых произведений конечного числа сомножителей и любая группа X удовлетворяет следующему условию:

(R) для каждой субнормальной последовательности $Z \leq Y \leq X$, факторы которой принадлежат классу C, существует нормальная подгруппа T группы X, лежащая в Z, фактор-группа по которой также принадлежит классу C.

Из условия (R) следует, что любой корневой класс групп C замкнут относительно расширений.

В самом деле, если Y — нормальная C-подгруппа некоторой группы X и $X / Y \in C$, то факторы последовательности $1 \leq Y \leq X$ являются C-группами. Поэтому согласно условию (R) существует такая нормальная подгруппа T группы X, что $T \leq 1$ и $X / T \in C$. Но тогда $T = 1$ и $X \cong X / T \in C$.

В работе [1] доказано, что для корневых классов, состоящих лишь из конечных групп, верно и обратное: наследственный класс конечных групп является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно расширений.

Предложение 1. Пусть классы групп C_1 и C_2 замкнуты относительно взятия подгрупп, фактор-групп и расширений. Тогда класс $C_1 \cap C_2$ также замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и расширений.

Доказательство. Пусть Y — подгруппа некоторой группы X. Если $X \in C_1 \cap C_2$, то, в силу замкнутости классов C_1 и C_2 относительно взятия подгрупп, $Y \in C_1$, $Y \in C_2$ и, следовательно, $Y \in C_1 \cap C_2$. Если, в дополнение к этому, подгруппа Y нормальна в группе X, то $X / Y \in C_1$ и $X / Y \in C_2$, ввиду замкнутости классов C_1 и C_2 относительно взятия фактор-групп, откуда $X / Y \in C_1 \cap C_2$. Наконец, если Y — нормальная подгруппа в X и справедливы включения $Y, X / Y \in C_1 \cap C_2$, то, в силу замкнутости классов C_1 и C_2 относительно взятия расширений, $X \in C_1$ и $X \in C_2$. Поэтому $X \in C_1 \cap C_2$. ■

Пусть далее π — некоторое непустое множество простых чисел. Напомним, что периодическая группа называется π-группой, если все простые делители порядков ее элементов принадлежат множеству π.

Хорошо известно и нетрудно показать, что классы всех конечных групп, всех разрешимых групп и всех периодических π-групп для заданного множества π замкнуты относительно взятия подгрупп, фактор-групп и расширений. Очевидно также, что класс FS_π всех конечных разрешимых π-групп является их пересечением. Поэтому из предложения 1 и упомянутого выше утверждения из [1] мы получаем

Следствие 1. Для любого непустого множества простых чисел π класс FS_π является корневым. ■

Если C — некоторый класс групп, то через $\sigma(C)$ мы будем обозначать множество всех простых делителей порядков всевозможных конечных подгрупп групп из класса C. Ввиду теоремы Силова в определении множества $\sigma(C)$ вместо конечных подгрупп можно рассматривать элементы C-групп, имеющие конечный порядок. Таким образом,

$\sigma(C) = \{p \mid p$ — простое $\wedge (\exists X \in C\ \exists x \in X\, |x| < \infty \wedge p \mid |x|)\}$.

Предложение 2. Пусть C — корневой класс групп и $\pi = \sigma(C)$. Если $\pi \neq \varnothing$, то $FS_\pi \subseteq C$.

Доказательство. Пусть $p \in \pi$ — произвольное число. Тогда по определению множества $\sigma(C)$ существует группа $X \in C$ и конечная подгруппа $Y \leq X$ такие, что p делит порядок Y. Отсюда по теореме Силова вытекает существование в группе X циклической подгруппы Z порядка p. Так как класс C является корневым и, следовательно, замкнут относительно взятия подгрупп, то $Z \in C$.

Пусть F — произвольная конечная p-группа. Хорошо известно, что каждая конечная p-группа обладает нормальным рядом с циклическими факторами порядка p. В силу доказанного выше, все факторы такого ряда группы F принадлежат классу C, последний же, как было отмечено в начале данной статьи, замкнут относительно взятия расширений. Следовательно, $F \in C$.

Пусть теперь G — произвольная FS_π-группа и S — ее субнормальный ряд с абелевыми факторами. Все факторы ряда S являются конечными абелевыми группами и, следовательно, раскладываются в прямые произведения своих примарных компонент. Каждая такая компонента P представляет собой конечную p-группу для некоторого простого числа p. Поскольку, согласно предложению 1, класс FS_π замкнут относительно взятия подгрупп и фактор-групп, подгруппа P оказывается также π-группой. Следовательно, $p \in \pi$ и, ввиду доказанного выше, $P \in C$. Нам остается воспользоваться двумя свойствами корневого класса: замкнутостью относительно прямых произведений, в силу которой каждый фактор ряда S принадлежит классу C, и замкнутостью относительно расширений, из которой следует, что и вся группа G принадлежит C. ■

Так как, очевидно, $\sigma(FS_\pi) = \pi$, то из предложения 2 и следствия 1 вытекает

Следствие 2. Для любого непустого множества простых чисел π класс FS_π совпадает с пересечением всех корневых классов групп C таких, что $\sigma(C) = \pi$. ■

Список использованной литературы

1. *Гольцов Д. В., Яцкин Н. И.* Классы групп и подгрупповые топологии // Вестник ИвГУ. Сер. «Естественные, общественные науки». 2011, вып. 2. С. 115–128.

2. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1957. V. 7. P. 29–62.

УДК 510.52, 004.428
ББК 22.14+22.18+22.19+32.973.26

С. А. ДОГАДАЕВ[0]

ПОСТРОЕНИЕ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

Выполнен сравнительный анализ временной сложности двух реализаций на языке C++ алгоритма отыскания группы автоморфизмов конечного ориентированного взвешенного графа, отличающихся способом задания информации о его дугах.

Ключевые слова: *группа автоморфизма графа, сложность вычислений*