УДК 512.543

А. А. Коптева, Е. В. Соколов

НЕКОТОРЫЕ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА HNN-РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

При определенных ограничениях, накладываемых на класс групп $\mathcal{X}$, получено достаточное условие аппроксимируемости этим классом HNN-расширения G, а также описание отделимых в классе $\mathcal{X}$ циклических подгрупп группы G.

Ключевые слова: HNN-расширения, отделимость циклических подгрупп.

Let $\mathcal{X}$ be a class of groups satisfying certain conditions. The sufficient condition is proved for an HNN-extension of a group to be residually $\mathcal{X}$. The description of $\mathcal{X}$-separable cyclic subgroups of this construction is also obtained.

Key words: HNN-extension, cyclic subgroup separability.

1. Введение. Формулировка результатов

Цель настоящей работы состоит в отыскании условий, которые достаточно наложить на класс групп $\mathcal{X}$ для того, чтобы для изучения свойств $\mathcal{X}$-аппроксимируемости и $\mathcal{X}$-отделимости циклических подгрупп HNN-расширений можно было использовать известную методику, впервые предложенную Г. Баумслагом [9] для обобщенных свободных произведений групп и перенесенную затем Б. Баумслагом и М. Треткофом на HNN-расширения [8]. Данная статья продолжает работу [3], где аналогичная задача решалась для конструкции обобщенного свободного произведения двух групп.

Если X — некоторая группа и Y — ее подгруппа, то, как и в [3], через $\mathcal{X}^*(X)$ мы будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{X}$, а через $\mathcal{X}^*(X, Y)$ — семейство пересечений $\{N \cap Y \mid N \in \mathcal{X}^*(X)\}$. Будем говорить также, что подгруппа Y отделима в группе X семейством Σ нормальных подгрупп этой группы, если $\bigcap_{N \in \Sigma} YN = Y$. Отметим, что хорошо известное понятие $\mathcal{X}$-отделимости является частным случаем понятия отделимости семейством подгрупп и получается из него, если в качестве Σ взять семейство $\mathcal{X}^*(X)$.

Если все группы из класса $\mathcal{X}$ — периодические, то через $\pi(\mathcal{X})$ будем обозначать множество простых делителей порядков их элементов. Если же класс $\mathcal{X}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, положим $\pi(\mathcal{X})$ равным множеству всех простых чисел. Напомним, что подгруппа Y некоторой группы X называется $\pi(\mathcal{X})'$-изолированной в X, если для любого элемента $x \in X \setminus Y$ и для любого простого числа $q \notin \pi(\mathcal{X})$ из включения $x^q \in Y$ вытекает, что $x \in Y$.

Как показывает приведенное ниже предложение 5, $\pi(\mathcal{X})'$-изолированность является необходимым условием $\mathcal{X}$-отделимости. В то же время очевидно, что если $\pi(\mathcal{X})$ совпадает с множеством всех простых чисел, то каждая подгруппа оказывается $\pi(\mathcal{X})'$-изолированной и поэтому требование $\pi(\mathcal{X})'$-изолированности подгруппы ничего не означает.

Пусть далее G обозначает HNN-расширение некоторой группы A с проходной буквой t и подгруппами H и K, связанными относительно изоморфизма φ: $H \to K$ (эти обозначения предполагаются фиксированными до конца изложения). Через $\Delta_{\mathcal{X}}(A)$ ($\Delta_{\mathcal{X}}(G, A)$) мы будем обозначать семейство $\pi(\mathcal{X})'$-изолированных циклических подгрупп группы A, не являющихся отделимыми семейством $\mathcal{X}^*(A)$ (соответственно семейством $\mathcal{X}^*(G, A)$).

Перечислим теперь основные результаты настоящей работы.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{X}$ — некоторый класс групп, подгруппы 1, H и K отделимы в группе A семейством $\mathcal{X}^*(G, A)$ и пусть выполняется следующее утверждение:

$$\forall X, Y \in \mathcal{X}^*(G)\ \exists Z \in \mathcal{X}^*(G)\ Z \leq X \cap Y. \qquad (a)$$

1. Если произвольное расширение свободной группы при помощи $\mathcal{X}$-группы $\mathcal{X}$-аппроксимируемо (b), то и группа G является $\mathcal{X}$-аппроксимируемой.

2. Если в произвольном расширении свободной группы при помощи $\mathcal{X}$-группы все $\pi(\mathcal{X})'$-изолированные циклические подгруппы $\mathcal{X}$-отделимы (c), то $\pi(\mathcal{X})'$-изолированная циклическая подгруппа группы G $\mathcal{X}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\Delta_{\mathcal{X}}(G, A)$.

Следствие 1. Пусть $\mathcal{X}$ — некоторый класс групп, подгруппы H и K конечны, группа G $\mathcal{X}$-аппроксимируема. Если выполняются условия (a) и (c) из формулировки теоремы 1, то $\pi(\mathcal{X})'$-изолированная циклическая подгруппа группы G $\mathcal{X}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\Delta_{\mathcal{X}}(G, A)$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{X}$ — наследственный класс групп, группа A $\mathcal{X}$-аппроксимируема, подгруппы H и K $\mathcal{X}$-отделимы в группе A и пусть каждая подгруппа из семейства $\mathcal{X}^*(A)$ содержит некоторую подгруппу из семейства $\mathcal{X}^*(G, A)$. Если имеют место утверждения (a) и (c) из формулировки теоремы 1, то группа G $\mathcal{X}$-аппроксимируема и семейство ее $\mathcal{X}$-отделимых циклических подгрупп максимально. Более подробно: $\pi(\mathcal{X})'$-изолированная циклическая подгруппа группы G $\mathcal{X}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\Delta_{\mathcal{X}}(A)$.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{X}$ — наследственный класс групп, группа A конечна, группа G $\mathcal{X}$-аппроксимируема. Если выполняются условия (a) и (c) из формулировки теоремы 1, то семейство $\mathcal{X}$-отделимых циклических подгрупп группы G максимально.

Пусть далее p — некоторое простое число и Φ_p — класс всех конечных p-групп.

Следствие 3. Пусть H и K — собственные центральные подгруппы группы A. Если группа G Φ_p-аппроксимируема для некоторого простого числа p, то $\pi(\Phi_p)'$-изолированная циклическая подгруппа группы G не является

Φ_p-отделимой в этой группе тогда и только тогда, когда она сопряжена с подгруппой группы A, не отделимой в ней семейством $\Delta\Phi_p(G, A)$.

Отметим, что критерий Φ_p-аппроксимируемости группы G, удовлетворяющей условиям следствия 3, установлен в [6]. Очевидно также, что $\pi(\Phi_p)=\{p\}$.

Следствие 4. Пусть группа A Φ_p-аппроксимируема для некоторого простого числа p, подгруппа H — Φ_p-отделима в группе A и изоморфизм φ является ограничением на подгруппу H некоторого внутреннего автоморфизма группы A. Тогда группа G Φ_p-аппроксимируема и семейство ее Φ_p-отделимых циклических подгрупп максимально.

Сформулированные выше теоремы 1 и 2 обобщают основные результаты работы [1], в которой изучаются свойства финитной аппроксимируемости HNN-расширений и финитной отделимости их циклических подгрупп, а также достаточное условие Φ_p-аппроксимируемости произвольного HNN-расширения, содержащееся в теореме 2 из [5].

2. Некоторые вспомогательные понятия и результаты

Напомним, что любой элемент $g \in G$ может быть записан в приведенной форме:

$$g = a_0 t^{\varepsilon_1} a_1 t^{\varepsilon_2} \ldots a_{n-1} t^{\varepsilon_n} a_n,$$

где $a_i \in A$, $\varepsilon_i = \pm 1$ и, если $\varepsilon_i = -1$, $\varepsilon_{i+1} = 1$, то $a_i \notin H$, если же $\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_{i+1} = -1$, то $a_i \notin K$. Элемент $g = a_0 t^{\varepsilon_1} a_1 t^{\varepsilon_2} \ldots a_{n-1} t^{\varepsilon_n}$ называется циклически приведенным, если все его циклические перестановки

$$g = a_i t^{\varepsilon_{i+1}} a_{i+1} t^{\varepsilon_{i+2}} \ldots a_{n-1} t^{\varepsilon_n} a_0 t^{\varepsilon_1} a_1 t^{\varepsilon_2} \ldots a_{i-1} t^{\varepsilon_i}$$

приведены.

Лемма Бриттона (см., напр., [4, гл. IV, § 2]) утверждает, что любой элемент, обладающий приведенной записью, в которой есть хотя бы одна буква t или t^{-1}, отличен от единицы в группе G. Отсюда следует, что хотя один и тот же элемент может иметь различные приведенные записи, однако число вхождений букв t и t^{-1} во всех них одинаково. Оно называется длиной элемента g и обозначается $|g|$.

Предложение 1. Пусть $g \in G$ — произвольный элемент и

$$g = a_0 t^{\varepsilon_1} a_1 t^{\varepsilon_2} \ldots a_{n-1} t^{\varepsilon_n} a_n$$

— его приведенная запись. Тогда существуют такие элемент $b \in A$ и число m, что элемент

$$g^* = b a_m t^{\varepsilon_{m+1}} a_{m+1} t^{\varepsilon_{m+2}} \ldots a_{n-m-1} t^{\varepsilon_{n-m}}$$

циклически приведен и

$$g = a_0 t^{\varepsilon_1} a_1 t^{\varepsilon_2} \dots a_{m-1} t^{\varepsilon_m} b^{-1} g^* b t^{-\varepsilon_m} a_{m-1}^{-1} \dots t^{-\varepsilon_2} a_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} a_0^{-1}$$

— приведенная запись элемента g.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по длине элемента g.

Если $n=0$, то элемент g циклически приведен. Поэтому мы можем положить $b=1$ и $m=n$, так что $g^*=g$.

Пусть теперь $n>0$ и для всех элементов меньшей длины утверждение предложения имеет место. Если выполняется одно из следующих трех условий:

1) $\varepsilon_1+\varepsilon_n\neq 0$,

2) $\varepsilon_1=1=-\varepsilon_n$ и $a_n a_0\notin H$,

3) $\varepsilon_1=-1=-\varepsilon_n$ и $a_n a_0\notin K$,

то элемент $g^* = a_n a_0 t^{\varepsilon_1} a_1 t^{\varepsilon_2} \dots a_{n-1} t^{\varepsilon_n}$ циклически приведен и можно положить $b=a_n$ и $m=0$. Поэтому далее мы будем считать, что либо $\varepsilon_1=1=-\varepsilon_n$ и $a_n a_0\in H$, либо $\varepsilon_1=-1=-\varepsilon_n$ и $a_n a_0\in K$. В частности, это означает, что $n\geq 2$.

В силу сделанных предположений элемент $a'_{n-1} = a_{n-1} t^{\varepsilon_n} a_n a_0 t^{\varepsilon_1}$ принадлежит группе A и потому $g_1 = a_1 t^{\varepsilon_2} \dots a_{n-2} t^{\varepsilon_{n-1}} a'_{n-1}$ — приведенная запись элемента g_1 длины $n-2$. По индуктивному предположению существуют элемент $b\in A$ и число m такие, что элемент

$$g^* = b a_m t^{\varepsilon_{m+1}} a_{m+1} t^{\varepsilon_{m+2}} \dots a_{n-m-1} t^{\varepsilon_{n-m}}$$

циклически приведен и

$$g_1 = a_1 t^{\varepsilon_2} \dots a_{m-1} t^{\varepsilon_m} b^{-1} g^* b t^{-\varepsilon_m} a_{m-1}^{-1} \dots t^{-\varepsilon_2} a_1^{-1} \text{ —}$$

приведенная запись элемента g_1. Но $g = a_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{-\varepsilon_1} a_0^{-1}$, следовательно,

$$g = a_0 t^{\varepsilon_1} a_1 t^{\varepsilon_2} \dots a_{m-1} t^{\varepsilon_m} b^{-1} g^* b t^{-\varepsilon_m} a_{m-1}^{-1} \dots t^{-\varepsilon_2} a_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} a_0^{-1}$$

— приведенная запись элемента g. Таким образом, элемент b и число m являются искомыми.

Предложение 2. Для любых двух элементов $g, h\in G$, если один из этих элементов циклически приведен и $h=g^q$ для некоторого положительного числа q, то другой элемент также циклически приведен и $|h|=|g|q$.

Доказательство. Если циклически приведенным является элемент g, утверждение очевидно. Поэтому рассмотрим случай, когда циклически приведен элемент h.

Согласно предыдущему предложению существуют такие элемент $b\in A$ и число m, что элемент

$$g^* = b a_m t^{\varepsilon_{m+1}} a_{m+1} t^{\varepsilon_{m+2}} \dots a_{n-m-1} t^{\varepsilon_{n-m}}$$

циклически приведен и

$$g = a_0 t^{\varepsilon_1} a_1 t^{\varepsilon_2} \dots a_{m-1} t^{\varepsilon_m} b^{-1} g^* b t^{-\varepsilon_m} a_{m-1}^{-1} \dots t^{-\varepsilon_2} a_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} a_0^{-1} \text{ —}$$

приведенная запись элемента g. Тогда

$$g^q = a_0 t^{\varepsilon_1} \dots a_{m-1} t^{\varepsilon_m} b^{-1} \underbrace{(b a_m t^{\varepsilon_{m+1}} \dots a_{n-m-1} t^{\varepsilon_{n-m}})}_{q \text{ ðàç}} b t^{-\varepsilon_m} a_{m-1}^{-1} \dots t^{-\varepsilon_1} a_0^{-1}$$

— приведенная запись элемента g^q.

Предполагая, что элемент g не является циклически приведенным, мы получаем, что $m>0$ и элемент g^q также не является циклически приведенным. Но это противоречит циклической приведенности элемента h. Таким образом, элемент g циклически приведен и равенство $|h|=|g|q$ имеет место.

Нетрудно показать, что если нормальная подгруппа M группы A удовлетворяет условию $(M\cap H)\varphi=M\cap K$, то отображение $\varphi_M\colon HM/M\to KM/M$, переводящее элемент hM, $h\in H$, в элемент $(h\varphi)M$, корректно определено и является изоморфизмом подгрупп. Поэтому мы можем рассмотреть HNN-расширение

$$G_M=\langle A/M,\ \tau;\ \tau^{-1}HM/M\tau=KM/M,\ \varphi_M\rangle$$

и отображение $\rho_M\colon G\to G_M$, продолжающее естественный гомоморфизм группы A на фактор-группу A/M и переводящее t в τ.

В силу определения изоморфизма φ_M отображение ρ_M переводит все определяющие соотношения группы G в равенства, верные в группе G_M, и потому является гомоморфизмом G на G_M. Легко видеть также, что если подгруппа N принадлежит семейству $\mathrm{X}^*(G)$, то $(N\cap H)\varphi=N\cap K$. Поэтому определены изоморфизм $\varphi_{N\cap A}$, HNN-расширение $G_{N\cap A}$ и гомоморфизм $\rho_{N\cap A}$, которые мы будем обозначать для краткости через φ_N, G_N и ρ_N соответственно.

Предложение 3. Если $N\in\mathrm{X}^*(G)$, то группа G_N представляет собой расширение свободной группы при помощи X-группы.

Мы опустим доказательства этого и следующего утверждений, поскольку для их проверки достаточно почти дословно повторить доказательства предложений 3.1 и 3.3 из работы [3], воспользовавшись вместо теоремы Х. Нейманн аналогичным результатом об HNN-расширениях из [10].

Предложение 4. Если циклическая подгруппа группы G X-отделима в этой группе, то она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\Delta_{\mathrm{X}}(G, A)$.

В заключение данного параграфа приведем еще несколько необходимых нам утверждений, справедливость которых установлена в [3]. Чтобы пояснить формулировку третьего из них, напомним, что $\pi(\mathrm{X})'$-изолятором подгруппы Y в группе X называется наименьшая подгруппа, содержащая Y и $\pi(\mathrm{X})'$-изолированная в X.

Предложение 5. Каждая $\mathcal{X}$-отделимая подгруппа является $\pi(\mathcal{X})'$-изолированной. В частности, произвольная $\mathcal{X}$-аппроксимируемая группа не имеет $\pi(\mathcal{X})'$-кручения.

Предложение 6. Пусть группа X представляет собой расширение свободной группы Y при помощи $\mathcal{X}$-группы. Если все $\pi(\mathcal{X})'$-изолированные циклические подгруппы группы X $\mathcal{X}$-отделимы, то группа X $\mathcal{X}$-аппроксимируема.

Предложение 7. В $\mathcal{X}$-аппроксимируемой группе $\pi(\mathcal{X})'$-изолятор произвольной локально циклической подгруппы является локально циклической группой.

3. Доказательство теоремы 1

С учетом предложения 4 нам осталось проверить первое утверждение теоремы и достаточность во втором. Начнем с утверждения 1.

Пусть $g \in G \setminus \{1\}$ — произвольный элемент и

$$g = a_0 t^{\varepsilon_1} a_1 t^{\varepsilon_2} \ldots a_{n-1} t^{\varepsilon_n} a_n$$

— его приведенная запись. Укажем подгруппу $M \in \mathcal{X}^*(G)$ такую, что $g \notin M$.

По условию теоремы единичная подгруппа группы A отделима в ней семейством $\mathcal{X}^*(G, A)$. Поэтому в случае, когда $g \in A$, найдется такая подгруппа $M \in \mathcal{X}^*(G)$, что $g \notin M \cap A$. Очевидно, что тогда $g \notin M$.

Пусть $g \notin A$. Если для некоторого i $(1 \leq i \leq n-1)$ $\varepsilon_i = -1$ и $\varepsilon_{i+1} = 1$, то $a_i \notin H$ и в силу отделимости подгруппы H семейством $\mathcal{X}^*(G, A)$ найдется подгруппа $N_i \in \mathcal{X}^*(G)$ такая, что $a_i \notin H(N_i \cap A)$. Аналогично, если для некоторого i $\varepsilon_i = 1$ и $\varepsilon_{i+1} = -1$, то $a_i \notin K$ и существует такая подгруппа $N_i \in \mathcal{X}^*(G)$, что $a_i \notin K(N_i \cap A)$.

Для остальных i $(0 \leq i \leq n)$ определим подгруппу N_i следующим образом. Если $a_i \neq 1$, воспользуемся тем, что единичная подгруппа отделима семейством $\mathcal{X}^*(G, A)$, и выберем подгруппу $N_i \in \mathcal{X}^*(G)$ так, чтобы $a_i \notin N_i \cap A$. В противном случае положим $N_i = G$.

Из условия (a) следует, что найдется подгруппа $N \in \mathcal{X}^*(G)$, лежащая в пересечении $\bigcap_{0 \leq i \leq n} N_i$.

В силу выбора подгруппы N $|g\rho_N| = |g| \geq 1$. Поэтому $g\rho_N \neq 1$ и, пользуясь предложением 3 и условием (b), мы можем выбрать в группе G_N подгруппу $M_N \in \mathcal{X}^*(G_N)$, не содержащую элемента $g\rho_N$. Легко видеть, что прообраз M этой подгруппы относительно гомоморфизма ρ_N будет принадлежать семейству $\mathcal{X}^*(G)$ и не содержать элемента g.

Перейдем теперь к доказательству утверждения 2.

Пусть X — $\pi(\mathcal{X})'$-изолированная циклическая подгруппа группы G, не сопряженная ни с какой подгруппой из семейства $\Delta_{\mathcal{X}}(G, A)$, и пусть $g \in G$ — произвольный элемент, не принадлежащий X. Пусть также x — порождающий подгруппы X. Применяя при необходимости подходящий внутренний автоморфизм группы G, мы можем считать далее, что элемент x циклически приведен.

В силу предложения 3 и условия (c) для доказательства $\mathcal{X}$-отделимости подгруппы X нам достаточно указать подгруппу $N \in \mathcal{X}^*(G)$ такую, что элемент $g\rho_N$ не принадлежит некоторой $\pi(\mathcal{X})'$-изолированной циклической подгруппе группы G_N, содержащей подгруппу $X\rho_N$.

Случай 1. $|x|=0=|g|$.

Поскольку при данных ограничениях подгруппа X лежит в группе A и не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\Delta_{\mathcal{X}}(G, A)$, она отделима семейством $\mathcal{X}^*(G, A)$. Следовательно, существует подгруппа $N \in \mathcal{X}^*(G)$, удовлетворяющая условию $g \notin X(N \cap A)$. Так как гомоморфизм ρ_N продолжает естественный гомоморфизм группы A на фактор-группу $A/(N \cap A)$, отсюда вытекает, что $g\rho_N \notin X\rho_N$.

Заметим теперь, что если класс $\mathcal{X}$ состоит из периодических групп, то базовая группа HNN-расширения G_N вкладывается в периодическую $\pi(\mathcal{X})$-группу G/N. Поэтому все ее циклические подгруппы, в том числе и $X\rho_N$, конечны. Но в силу предложений 3, 6 и условия (c) группа G_N $\mathcal{X}$-аппроксимируема и, стало быть, не имеет $\pi(\mathcal{X})'$-кручения. Отсюда следует, что подгруппа $X\rho_N$ $\pi(\mathcal{X})'$-изолирована в группе G_N.

Если же класс $\mathcal{X}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то, как было отмечено во введении, все подгруппы группы G_N являются $\pi(\mathcal{X})'$-изолированными. Таким образом, искомая подгруппа N найдена.

Случай 2. $|x|=0$, $|g| \geq 1$.

Рассуждая как и при доказательстве утверждения 1, выберем подгруппу $N \in \mathcal{X}^*(G)$ такую, что $|g\rho_N|=|g| \geq 1$. Тогда в силу предложения 2 $g\rho_N \notin \langle x\rho_N \rangle$ и при этом подгруппа $X\rho_N$ $\pi(\mathcal{X})'$-изолирована в группе G_N, что и требовалось.

Пусть теперь $|x| \geq 1$. Определим натуральное число t как наибольший $\pi(\mathcal{X})'$-делитель числа $|x|$.

Случай 3. $|x| \geq 1$ и либо $|g|=0$, либо $|g| \geq 1$ и $|x|$ не делит $|g|t$.

Как и выше, мы можем выбрать подгруппу $N \in \mathcal{X}^*(G)$ так, чтобы выполнялись соотношения $|g\rho_N|=|g|$ и $|x\rho_N|=|x|$, элемент $x\rho_N$ по-прежнему являлся циклически приведенным, а элемент $g\rho_N$ был отличен от 1.

Согласно условию (c) и предложениям 6, 3, группа G_N $\mathcal{X}$-аппроксимируема. Так как $|x\rho_N|=|x| \geq 1$, то в силу предложения 2 из элемента $x\rho_N$ не могут извлекаться корни сколь угодно высокой степени. Из предложения 7 теперь следует, что $\pi(\mathcal{X})'$-изолятор Y_N подгруппы $X\rho_N$ в группе G_N является циклической подгруппой.

Пусть y_N обозначает порождающий подгруппы Y_N и пусть $(y_N)^z = x\rho_N$. Из предложения 2 следует, что тогда z делит $|x|$. Но z является $\pi(\mathcal{X})'$-числом, поэтому оно делит t и, стало быть, $(Y_N)^t \leq X\rho_N$.

Таким образом, предполагая, что $g\rho_N \in Y_N$, мы приходим к утверждению $(g\rho_N)^t \in X\rho_N$. Но это невозможно в силу $\mathcal{X}$-аппроксимируемости группы G_N и ограничений, наложенных на длины элементов g и x. Следовательно, $g\rho_N \notin Y_N$ и подгруппа N является искомой.

Случай 4. $|g| \geq 1$, $|x| \geq 1$ и $|g|t=|x|l$ для некоторого натурального l.

Поскольку подгруппа X $\pi(\mathcal{X})'$-изолирована, $g^t \notin X$ и, следовательно, $g^{-t}x^l \neq 1 \neq g^t x^l$. По аналогии со случаем 3 найдем такую подгруппу $N \in \mathcal{X}^*(G)$, что $|g\rho_N|=|g|$ и $|x\rho_N|=|x|$, элемент $x\rho_N$ циклически приведен, а элементы $(g^{-t}x^l)\rho_N$ и $(g^t x^l)\rho_N$ по-прежнему отличны от 1.

Если имеет место включение $(g\rho_N)^l \in X\rho_N$, то в силу предложения 2 элемент $g\rho_N$ циклически приведен. Но тогда $|(g\rho_N)^l| = |(x\rho_N)^l|$ и $(g\rho_N)^l \neq (x\rho_N)^{\pm l}$, что невозможно. Значит, $(g\rho_N)^l \notin X\rho_N$.

Из последнего соотношения, как и в случае 3, вытекает, что элемент $g\rho_N$ не принадлежит $\pi(\mathcal{X})'$-изолятору подгруппы $X\rho_N$ в группе G_N. Теорема доказана.

4. Доказательства теоремы 2 и следствий

Доказательство теоремы 2. Заметим прежде всего, что всякая подгруппа B группы A является $\mathcal{X}$-отделимой в этой группе тогда и только тогда, когда она отделима в ней семейством $\mathcal{X}^*(G, A)$.

Действительно, если подгруппа B $\mathcal{X}$-отделима и $x \in A \setminus B$ — произвольный элемент, то $x \notin BL$ для некоторой подгруппы $L \in \mathcal{X}^*(A)$. Согласно условию теоремы существует подгруппа $M \in \mathcal{X}^*(G, A)$ такая, что $M \leq L$. Тогда $x \notin BM$, и ввиду произвольности элемента x подгруппа B отделима семейством $\mathcal{X}^*(G, A)$.

Наоборот, пусть M — произвольная подгруппа из семейства $\mathcal{X}^*(G, A)$. Тогда $M = N \cap A$ для подходящей подгруппы $N \in \mathcal{X}^*(G)$ и

$$A/M = A/(N \cap A) \cong AN/N \leq G/N.$$

Так как $G/N \in \mathcal{X}$ и класс $\mathcal{X}$ по условию является наследственным, то $A/M \in \mathcal{X}$, т. е. $M \in \mathcal{X}^*(A)$. Учитывая произвольность выбора подгруппы M, мы заключаем отсюда, что $\mathcal{X}^*(G, A) \subseteq \mathcal{X}^*(A)$. Поэтому любая подгруппа группы A, отделимая семейством $\mathcal{X}^*(G, A)$, является и $\mathcal{X}$-отделимой.

Теперь требуемое утверждение легко получается из теоремы 1.

Так как группа A $\mathcal{X}$-аппроксимируема, ее единичная подгруппа $\mathcal{X}$-отделима. По условию $\mathcal{X}$-отделимыми являются также и подгруппы H и K. Следовательно, все эти три подгруппы отделимы в группе A семейством $\mathcal{X}^*(G, A)$.

Таким образом, выполняется условие теоремы 1, согласно второму утверждению которой $\pi(\mathcal{X})'$-изолированная циклическая подгруппа группы G не является $\mathcal{X}$-отделимой в этой группе тогда и только тогда, когда она сопряжена с подгруппой группы A, не отделимой в ней семейством $\mathcal{X}^*(G, A)$. Но отделимость подгруппы группы A семейством $\mathcal{X}^*(G, A)$ равносильна обычной $\mathcal{X}$-отделимости в этой группе.

Наконец, согласно предложению 6 из условия (c) следует условие (b). Поэтому группа G $\mathcal{X}$-аппроксимируема и теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Пусть X — некоторая конечная подгруппа группы A и $a \in A \setminus X$ — произвольный элемент.

Так как группа G $\mathcal{X}$-аппроксимируема и удовлетворяет условию (a), то найдется подгруппа $N \in \mathcal{X}^*(G)$, тривиально пересекающаяся с конечным множеством $\{a^{-1}x \mid x \in X\}$. Полагая $M = N \cap A$, мы получаем, что $M \in \mathcal{X}^*(G, A)$ и $a \notin XM$. Таким образом, подгруппа X отделима семейством $\mathcal{X}^*(G, A)$.

Поскольку подгруппы $\{1\}$, H и K конечны, в силу доказаного только что они отделимы семейством $\mathcal{X}^*(G, A)$. Требуемое утверждение теперь следует из теоремы 1.

Доказательство следствия 2. Так как группа A конечна и группа G $\mathcal{X}$-аппроксимируема, то в силу условия (a) найдется подгруппа $N \in \mathcal{X}^*(G)$, тривиально пересекающаяся с A. Поэтому $1 \in \mathcal{X}^*(G, A)$ и, следовательно, любая подгруппа группы A содержит подгруппу из семейства $\mathcal{X}^*(G, A)$. Из $\mathcal{X}$-аппроксимируемости группы G и условия (a) следует также $\mathcal{X}$-отделимость конечных подгрупп H и K. Таким образом, выполнены все условия теоремы 2, из которой и вытекает утверждение следствия.

Для дальнейших рассуждений нам потребуются некоторые сведения о классе Φ_p и подгруппах из семейства $\Phi_p^*(G, A)$.

Прежде всего заметим, что класс Φ_p является корневым [2], а любой корневой класс удовлетворяет условиям (a) и (c) из формулировки теоремы 1 [7].

Далее, следуя [5], подгруппу M группы A будем называть (H, K, φ, p)-совместимой, если существует последовательность

$$M = M_0 \le M_1 \le \ldots \le M_n = A$$

подгрупп группы A такая, что:

(1) для любого $i \in \{0, \ldots, n\}$ подгруппа M_i нормальна в группе A и удовлетворяет условию $(M_i \cap H)\varphi = M_i \cap K$;

(2) для каждого $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ порядок фактор-группы M_{i+1}/M_i равен p и для произвольного элемента $h \in M_{i+1} \cap H$ элементы h и $h\varphi$ сравнимы по модулю подгруппы M_i.

Предложение 8. Подгруппа группы A является (H, K, φ, p)-совместимой тогда и только тогда, когда она принадлежит семейству $\Phi_p^*(G, A)$.

Доказательство. Достаточность условия предложения доказана в лемме 2.2 из работы [5]. Проверим необходимость.

Та же лемма утверждает, что если подгруппа M группы A является (H, K, φ, p)-совместимой, то HNN-расширение

$$G_M = \langle A/M, \tau;\ \tau^{-1}HM/M\tau = KM/M, \varphi_M\rangle$$

Φ_p-аппроксимируемо. Поэтому найдется подгруппа $N_M \in \Phi_p^*(G_M)$, тривиально пересекающаяся с конечной подгруппой A/M.

Так как гомоморфизм ρ_M продолжает естественный гомоморфизм группы A на фактор-группу A/M, то прообраз N подгруппы N_M относительно этого гомоморфизма, принадлежащий, очевидно, семейству $\Phi_p^*(G)$, удовлетворяет соотношению $M = N \cap A$. Тем самым мы получаем, что $M \in \Phi_p^*(G, A)$, и предложение доказано.

Предложение 9. Если изоморфизм φ совпадает с ограничением на подгруппу H некоторого внутреннего автоморфизма группы A, то семейство (H, K, φ, p)-совместимых подгрупп группы A совпадает с семейством $\Phi_p^*(A)$.

Доказательство. Непосредственно из определения вытекает, что каждая (H, K, φ, p)-совместимая подгруппа группы A принадлежит семейству $\Phi_p^*(A)$. Поэтому нам остается проверить лишь противоположное включение.

Пусть φ совпадает с ограничением на подгруппу H внутреннего автоморфизма группы A, производимого элементом a, и пусть M — произвольная подгруппа из семейства $\Phi_p^*(A)$.

Хорошо известно, что каждая конечная p-группа имеет нетривиальный центр. Поэтому в центре фактор-группы A/M найдется подгруппа M_1/M порядка p. Тогда $M_1 \in \Phi_p^*(A)$ и для любого элемента $b \in M_1$ имеет место соотношение $b \equiv a^{-1}ba \pmod{M}$. В частности, если $b \in M_1 \cap H$, то $b \equiv a^{-1}ba = b\varphi \pmod{M}$.

Аналогичным образом строятся нормальные подгруппы $M_2, \ldots, M_n$, удовлетворяющие условию (2) из определения (H, K, φ, p)-совместимой подгруппы. Остается заметить, что в силу ограничения, наложенного на изоморфизм φ, каждая нормальная подгруппа M группы A удовлетворяет условию $(M \cap H)\varphi = M \cap K$.

Следствие 3 теперь немедленно получается из теоремы 1, предложения 8 и предложения 2.2 из работы [6], которое утверждает, в частности, что если H и K — собственные центральные подгруппы группы A и группа G Φ_p-аппроксимируема, то подгруппы $\{1\}$, H и K отделимы семейством (H, K, φ, p)-совместимых подгрупп группы A. Следствие 4 вытекает из предложений 8, 9 и теоремы 2.

Библиографический список

1. *Гайворонская М. Ю., Соколов Е. В.* О финитной отделимости циклических подгрупп HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2010. Вып. 2. С. 90—97.
2. *Гудовщикова А. С., Соколов Е. В.* Два замечания о классе конечных разрешимых π-групп // Вестн. молодых ученых ИвГУ. 2012. Вып. 12. С. 3—4.
3. *Гудовщикова А. С., Соколов Е. В.* Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных свободных произведений двух групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 115—123.
4. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М. : Мир, 1980. 447 с.
5. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2000. Вып. 3. С. 129—140.
6. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами некоторых HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2003. Вып. 3. С. 102—116.
7. *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп свободной группы корневым классом групп // Математика и ее приложения : журн. Иван. мат. о-ва. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2011. Вып. 1 (8). С. 101—104.
8. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residual finite HNN-extensions // Comm. Algebra. 1978. Vol. 6. P. 179—194.
9. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193—209.
10. *Karras A., Solitar D.* Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Can. J. Math. 1971. Vol. 23. P. 627—643.