УДК 512.543

Н. С. Савельичева, Е. В. Соколов

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ РАЗРЕШИМЫМИ ГРУППАМИ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

Пусть G — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп A и B с конечными объединенными подгруппами и пусть π — множество всех простых делителей порядков периодических частей групп A и B. Получено достаточное условие аппроксимируемости группы G конечными разрешимыми π-группами.

Ключевые слова: аппроксимируемость разрешимыми группами, обобщенное свободное произведение.

Let G be the free product of finitely generated nilpotent groups A and B with finite amalgamated subgroups, let π be the set of all prime divisors of the orders of the torsion parts of A and B, and let $\mathcal{FS}_\pi$ be the class of all finite solvable π-groups. We find a sufficient condition for G to be residually an $\mathcal{FS}_\pi$-group.

Key words: residual solvability, generalized free product.

1. Введение. Формулировка результатов

Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы, $H \leq A$ и $K \leq B$ — некоторые изоморфные конечные подгруппы, $\varphi: H \to K$ — изоморфизм и G — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ. Из теоремы 3 работы [6] следует, что группа G финитно аппроксимируема. Естественным образом возникает вопрос об отыскании условий аппроксимируемости этой группы тем или иным подклассом класса всех конечных групп.

Д. Н. Азаровым [1] найден критерий аппроксимируемости обобщенного свободного произведения G конечными p-группами (см. теорему 1 ниже). В настоящей работе получено достаточное условие аппроксимируемости группы G конечными разрешимыми группами (теорема 2), обобщающее соответствующую часть результата Д. Н. Азарова. Прежде чем сформулировать перечисленные утверждения, введем ряд обозначений и напомним некоторые факты, касающиеся нильпотентных групп.

Хорошо известно (см., напр., [5, § 4]), что в локально нильпотентной группе N множество всех элементов конечного порядка образует характеристическую подгруппу, называемую периодической частью группы N и обозначаемую $\tau(N)$. Если группа N конечно порождена и, следовательно, нильпотентна, то подгруппа $\tau(N)$ является конечной и по теореме Бернсайда — Виландта раскладывается в прямое произведение своих силовских подгрупп. К. Грюнберг доказал, что группа N аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда $\tau(N)$ является p-группой [7, теорема 2.1].

© Савельичева Н. С., Соколов Е. В., 2014

Напомним, что главным рядом группы называется нормальный ряд, не допускающий нетривиальных нормальных уплотнений. Нетрудно показать (см., напр., [5, лемма 1.4]), что каждая конечная p-группа нильпотентна. Отсюда легко следует, что нормальный ряд такой группы является главным тогда и только тогда, когда все его факторы имеют порядок 1 или p (мы будем считать, что последовательные члены ряда могут совпадать).

Пусть далее S и T — периодические части групп A и B соответственно, $\pi = \{p_1, \ldots, p_n\}$ — множество всех простых делителей порядков групп S и T. Пусть также $S_k \leq S$ и $T_k \leq T$ — силовские подгруппы, соответствующие числу p_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Так как последнее не обязано делить порядки обеих групп S и T, то одна из подгрупп S_k и T_k может быть равна 1.

Теорема 1 [1]. Предположим, что группы A и B аппроксимируются конечными p-группами, т. е. $\pi = \{p\}$. Группа G аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда в группах S и T существуют главные ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

(a) ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ являются (H, K, φ)-совместимыми, т. е. множество пересечений членов ряда $\mathcal{R}_S$ с подгруппой H под действием φ переходит на множество пересечений членов ряда $\mathcal{R}_T$ с подгруппой K;

(b) члены рядов $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ нормальны в группах A и B соответственно.

Теорема 2. Пусть для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ в группах S_k и T_k существуют главные ряды $\mathcal{R}_{S_k}$ и $\mathcal{R}_{T_k}$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

(a) ряды $\mathcal{R}_{S_k}$ и $\mathcal{R}_{T_k}$ являются (H, K, φ)-совместимыми;

(b) члены рядов $\mathcal{R}_{S_k}$ и $\mathcal{R}_{T_k}$ нормальны в группах A и B соответственно.

Тогда обобщенное свободное произведение G аппроксимируется конечными разрешимыми π-группами.

2. Вспомогательные утверждения

Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ обозначим через $\overline{S_k}$ подгруппу

$$S_1 \times \ldots \times S_{k-1} \times S_{k+1} \times \ldots \times S_n$$

группы A и через $\overline{T_k}$ — подгруппу

$$T_1 \times \ldots \times T_{k-1} \times T_{k+1} \times \ldots \times T_n$$

группы B. Очевидно, что подгруппа $\overline{S_k}$ нормальна в группе A и подгруппа $\overline{T_k}$ нормальна в группе B.

Предложение 2.1. Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ периодическая часть $\tau(A/\overline{S_k})$ фактор-группы $A/\overline{S_k}$ совпадает с подгруппой $S/\overline{S_k}$, периодическая часть $\tau(B/\overline{T_k})$ фактор-группы $B/\overline{T_k}$ совпадает с подгруппой $T/\overline{T_k}$.

Доказательство. Пусть $a\overline{S_k} \in \tau(A/\overline{S_k})$. Тогда существует целое число $x \geq 0$ такое, что $(a\overline{S_k})^x = 1$. Отсюда $a^x\overline{S_k} = 1$ и $a^x \in \overline{S_k}$. Так как $\overline{S_k} \leq S$, то существует целое число $y \geq 0$ такое, что $(a^x)^y = 1$. Следовательно, $a^{xy} = 1$ и $a \in S$. Таким образом, $\tau(A/\overline{S_k}) \leq S/\overline{S_k}$.

Пусть теперь $a\overline{S_k} \in S/\overline{S_k}$. Тогда $a \in S$ и существует целое число $z \geq 0$ такое, что $a^z = 1$. Отсюда $(a\overline{S_k})^z = a^z\overline{S_k} = \overline{S_k} = 1$ и потому $|a\overline{S_k}| < \infty$, т. е. $a\overline{S_k} \in \tau(A/\overline{S_k})$. Тем самым имеет место обратное включение.

Рассуждения для группы $B/\overline{T_k}$ аналогичны.

Предложение 2.2. Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ фактор-группы $A/\overline{S_k}$ и $B/\overline{T_k}$ аппроксимируются конечными p_k-группами.

Доказательство. В силу предложения 2.1 и соотношения $\overline{S_k} \cap S_k = 1$

$$\tau(A/\overline{S_k}) = S/\overline{S_k} = S_k\overline{S_k}/\overline{S_k} \cong S_k/(\overline{S_k} \cap S_k) \cong S_k.$$

Следовательно, $\tau(A/\overline{S_k})$ — конечная p_k-группа. Как уже было отмечено во введении, это равносильно аппроксимируемости фактор-группы $A/\overline{S_k}$ конечными p_k-группами. Рассуждения для группы $B/\overline{T_k}$ аналогичны.

Предложение 2.3. Элемент $g \in S$ $(g \in T)$ принадлежит подгруппе $\overline{S_k}$ (соответственно подгруппе $\overline{T_k}$) тогда и только тогда, когда все простые делители его порядка содержатся во множестве $\{p_1, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_n\}$.

Доказательство. Пусть $g \in S$. Запишем элемент g в виде $g = g_1 \ldots g_n$, где $g_i \in S_i$, $1 \leq i \leq n$, и обозначим его порядок через q. Поскольку порядки всех элементов подгруппы S_i являются степенями числа p_i, для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует целое число $x_i \geq 0$ такое, что $g_i^{p_i^{x_i}} = 1$.

Предположим сначала, что p_k не делит q. Тогда $\left(p_k^{x_k}, q\right) = 1$. Записывая наибольший общий делитель $\left(p_k^{x_k}, q\right)$ в виде $\left(p_k^{x_k}, q\right) = up_k^{x_k} + vq$ для подходящих чисел $u, v \in \mathbb{Z}$, получаем, что

$$g_k = g_k^{(p_k^{x_k},\, q)} = g_k^{up_k^{x_k} + vq} = \left(g_k^{p_k^{x_k}}\right)^u \left(g_k^q\right)^v = 1$$

и, следовательно, $g \in \overline{S_k}$.

Предположим теперь, что $g \in \overline{S_k}$. Тогда $g = g_1 \ldots g_{k-1} g_{k+1} \ldots g_n$ и потому $g^r = 1$, где $r = p_1^{x_1} \ldots p_{k-1}^{x_{k-1}} p_{k+1}^{x_{k+1}} \ldots p_n^{x_n}$.

Так как $(q, r) = wq + tr$ для подходящих чисел $w, t \in \mathbb{Z}$, то $g^{(q,\, r)} = (g^q)^w (g^r)^t = 1$. Предположим, что q не делит r. Тогда $(q, r) < q$, и мы получаем противоречие с тем, что q — минимальное положительное число такое, что $g^q = 1$. Следовательно, $q \mid r$, и потому все простые делители числа q содержатся во множестве $\{p_1, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_n\}$.

Рассуждения для элемента $g \in T$ аналогичны.

Предложение 2.4. Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ подгруппы $\overline{S_k}$ и $\overline{T_k}$ (H, K, φ)-совместимы, т. е. $(\overline{S_k} \cap H)\varphi = \overline{T_k} \cap K$.

Доказательство. Пусть $a \in \overline{S_k} \cap H$ — произвольный элемент. Тогда $a \in \overline{S_k}$ и $a \in H$. Из соотношения $a \in H$ следует, что $a\varphi \in K$. Так как $a \in \overline{S_k}$, то согласно предложению 2.3 его порядок не делится на p_k. При изоморфизме порядок элемента сохраняется. Поэтому снова по предложению 2.3 $a\varphi \in \overline{T_k}$. Следовательно, $a\varphi \in K \cap \overline{T_k}$. В силу произвольности выбора элемента a отсюда вытекает, что $(\overline{S_k} \cap H)\varphi \subseteq \overline{T_k} \cap K$.

Аналогично доказывается противоположное включение.

Пусть $b \in K \cap \overline{T_k}$ — произвольный элемент. Так как $b \in K$ и $K = H\varphi$, то существует элемент $a \in H$ такой, что $a\varphi = b$. Предполагая, что порядок элемента a делится на p_k, мы получаем, что тогда порядок элемента $a\varphi = b$ также делится на p_k. Но согласно предложению 2.3 это означает, что $b \notin \overline{T_k}$ вопреки выбору элемента b. Следовательно, порядок элемента a не делится на p_k и по предложению 2.3 $a \in \overline{S_k}$.

Итак, $a \in H \cap \overline{S_k}$ и $a\varphi = b$. Как и выше, в силу произвольности b получаем, что $(\overline{S_k} \cap H)\varphi \supseteq \overline{T_k} \cap K$.

Пусть X — прямое произведение некоторых групп $X_1, \ldots, X_n$ и $x \in X$. Тогда элемент x может быть однозначно записан в виде $x = x_1x_2\ldots x_n$, где $x_i \in X_i,\ i \in \{1, \ldots, n\}$. Сомножитель x_k $(1 \leq k \leq n)$ будем называть проекцией элемента x на группу X_k и обозначать через $pr_{X_k}x$. Если $U \subseteq X$, то проекцией множества U на группу X_k назовем множество $pr_{X_k}U$, состоящее из проекций на X_k всех элементов из U.

Предложение 2.5. Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ имеют место соотношения $pr_{S_k}H = H \cap S_k$ и $pr_{T_k}K = K \cap T_k$.

Доказательство. Пусть $h \in H$ — произвольный элемент, запишем его в виде

$$h = h_1h_2\ldots h_{k-1}h_kh_{k+1}\ldots h_n, \tag{$*$}$$

где $h_i \in S_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Так как порядки всех элементов подгруппы S_i являются степенями числа p_i, то для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует целое число $x_i \geq 0$ такое, что $h_i^{p_i^{x_i}} = 1$. Положим $r = p_1^{x_1}\ldots p_{k-1}^{x_{k-1}}p_{k+1}^{x_{k+1}}\ldots p_n^{x_n}$. Тогда $h^r = h_k^r$.

Поскольку $\left(p_k^{x_k}, r\right) = 1$, для подходящих чисел $u, v \in \mathbb{Z}$ имеет место соотношение $up_k^{x_k} + vr = 1$ и

$$h_k = h_k^{up_k^{x_k}+vr} = (h_k^r)^v = h^{rv} \in H.$$

Таким образом, проекция произвольного элемента $h \in H$ на группу S_k содержится в $H \cap S_k$, откуда следует, что $pr_{S_k}H \subseteq H \cap S_k$.

В силу однозначности записи элемента $h \in H$ в виде $(*)$ из соотношения $h \in S_k$ вытекает, что $h = pr_{S_k}h$. Стало быть, противоположное включение $pr_{S_k}H \supseteq H \cap S_k$ также имеет место.

Равенство $pr_{T_k}K = K \cap T_k$ проверяется аналогично.

Пусть σ — произвольное множество простых чисел. Тогда через σ' будем обозначать множество всех простых чисел, не принадлежащих σ. Если

p — простое число, то через p' обозначим множество всех простых чисел, не равных p. Таким образом, $p' = \{p\}'$.

Напомним, что целое число z называется σ-числом, если все его простые делители принадлежат множеству σ. Периодическая группа называется σ-группой, если порядки всех ее элементов являются σ-числами.

Если Y — подгруппа некоторой группы X, то через $Rt_{\sigma}(X, Y)$ будем обозначать множество всех тех элементов группы X, которые в некоторой σ-степени принадлежат подгруппе Y. Напомним, что подгруппа Y называется σ-изолированной в X, если для любого элемента $x \in X$ и для всякого простого числа $q \in \sigma$ из условия $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$. Очевидно, что подгруппа Y σ-изолирована в группе X тогда и только тогда, когда $Y = Rt_{\sigma}(X, Y)$.

Предложение 2.6 [5, теорема 4.5]. Пусть σ — произвольное множество простых чисел. Для любой подгруппы Y локально нильпотентной группы X множество $Rt_{\sigma}(X, Y)$ является подгруппой.

Предложение 2.7 [4, предложение 3]. Пусть σ — произвольное множество простых чисел. Если Y — σ-изолированная подгруппа некоторой группы X, то для любого элемента $x \in X \setminus Y$ найдется такое число $p \notin \sigma$, что $x \notin Rt_{p'}(X, Y)$.

Предложение 2.8. Для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ и для любых подгрупп $X \leq A$ и $Y \leq B$ имеют место включения $\overline{S_k} \subseteq Rt_{p_k'}(A, X)$ и $\overline{T_k} \subseteq Rt_{p_k'}(B, Y)$.

Доказательство. Пусть $a \in \overline{S_k}$. Тогда по предложению 2.3 порядок q элемента a не делится на p_k, т. е. является p_k'-числом. Поскольку $a^q = 1$, мы имеем $a \in Rt_{p_k'}(A, 1) \subseteq Rt_{p_k'}(A, X)$. Рассуждения для подгруппы $\overline{T_k}$ аналогичны.

Предложение 2.9. Каждая конечная подгруппа группы A π'-изолирована в A, каждая конечная подгруппа группы B π'-изолирована в B.

Доказательство. Пусть X — конечная подгруппа группы A, $a \in A \setminus X$ и $q \in \pi'$ — произвольные элемент и простое число. И пусть $a^q \in X$. Тогда элемент a имеет конечный порядок и, следовательно, принадлежит подгруппе S. Поскольку S — конечная π-группа, порядок t элемента a является π-числом. При этом $q \notin \pi$, значит, $1 = (q, t) = uq + vt$ для подходящих $u, v \in \mathbb{Z}$ и $a = (a^q)^u (a^t)^v = (a^q)^u \in X$. Таким образом, подгруппа X π'-изолирована в группе A. Рассуждения для подгрупп группы B аналогичны.

3. Доказательство теоремы 2

В силу предложения 2.4 для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ подгруппы $\overline{S_k}$ и $\overline{T_k}$ являются (H, K, φ)-совместимыми. Отсюда нетрудно вывести, что отображение $\varphi_{\overline{S_k}, \overline{T_k}}\colon H\overline{S_k} / \overline{S_k} \to K\overline{T_k} / \overline{T_k}$, переводящее элемент $h\overline{S_k}$ $(h \in H)$ в элемент $(h\varphi)\overline{T_k}$, корректно определено и представляет собой изоморфизм подгрупп. Поэтому мы можем рассмотреть свободное произведение $G_{\overline{S_k}, \overline{T_k}}$ фактор-групп

$A/\overline{S_k}$ и $B/\overline{T_k}$ с подгруппами $H\overline{S_k}\,/\overline{S_k}$ и $K\overline{T_k}\,/\overline{T_k}$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$. Естественные гомоморфизмы $\varepsilon_k\colon A \to A/\overline{S_k}$ и $\delta_k\colon B \to B/\overline{T_k}$, рассматриваемые как отображения групп A и B в группу $G_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$, действуют на подгруппах H и K согласованно (т. е. $h\varepsilon_k = (h\varphi)\delta_k$ при всех $h \in H$). Следовательно, в силу теоремы [8, с. 505] существует продолжающий их сюръективный гомоморфизм $\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}}\colon G \to G_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$.

По условию теоремы для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ в группах S_k и T_k имеются главные ряды

$$1 = S_{k1} \leq S_{k2} \leq \ldots \leq S_{km_{k1}} = S_k, \qquad (\mathcal{R}_{S_k})$$
$$1 = T_{k1} \leq T_{k2} \leq \ldots \leq T_{km_{k2}} = T_k, \qquad (\mathcal{R}_{T_k})$$

удовлетворяющие следующим двум условиям:

(a) ряды $\mathcal{R}_{S_k}$ и $\mathcal{R}_{T_k}$ являются (H, K, φ)-совместимыми;

(b) члены рядов $\mathcal{R}_{S_k}$ и $\mathcal{R}_{T_k}$ нормальны в группах A и B соответственно.

Очевидно, что, повторяя при необходимости последний член ряда, мы можем сделать количество членов во всех рядах одинаковым. Обозначим это число через m.

Предложение 3.1. Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ ряды

$$1 = S_{k1}\overline{S_k}/\overline{S_k} \leq S_{k2}\overline{S_k}/\overline{S_k} \leq \ldots \leq S_{km}\overline{S_k}/\overline{S_k} = S_k\overline{S_k}/\overline{S_k} = S/\overline{S_k}, \qquad (\overline{\mathcal{R}_{S_k}})$$
$$1 = T_{k1}\overline{T_k}/\overline{T_k} \leq T_{k2}\overline{T_k}/\overline{T_k} \leq \ldots \leq T_{km}\overline{T_k}/\overline{T_k} = T_k\overline{T_k}/\overline{T_k} = T/\overline{T_k} \qquad (\overline{\mathcal{R}_{T_k}})$$

удовлетворяют следующим условиям:

(a) члены рядов $\overline{\mathcal{R}_{S_k}}$ и $\overline{\mathcal{R}_{T_k}}$ нормальны в группах $A/\overline{S_k}$ и $B/\overline{T_k}$ соответственно;

(b) оба ряда $\overline{\mathcal{R}_{S_k}}$ и $\overline{\mathcal{R}_{T_k}}$ являются главными;

(c) ряды $\overline{\mathcal{R}_{S_k}}$ и $\overline{\mathcal{R}_{T_k}}$ $(H\overline{S_k}\,/\overline{S_k}, K\overline{T_k}\,/\overline{T_k}, \varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}})$-совместимы.

Доказательство. Поскольку члены ряда $\overline{\mathcal{R}_{S_k}}$ являются образами членов ряда $\mathcal{R}_{S_k}$ относительно естественного гомоморфизма группы A на фактор-группу $A/\overline{S_k}$, все они нормальны в группе $A/\overline{S_k}$. По тем же причинам члены ряда $\overline{\mathcal{R}_{T_k}}$ нормальны в группе $B/\overline{T_k}$.

Пусть $i \in \{2, \ldots, m\}$. Тогда

$$(S_{ki}\overline{S_k}/\overline{S_k})/(S_{k,\,i-1}\overline{S_k}/\overline{S_k}) \cong S_{ki}\overline{S_k}/S_{k,\,i-1}\overline{S_k} \cong S_{ki}/S_{k,\,i-1}(S_{ki} \cap \overline{S_k}).$$

Но $S_{ki} \leq S_k$ и $S_k \cap \overline{S_k} = 1$. Следовательно, $S_{ki}\overline{S_k}/S_{k,\,i-1}\overline{S_k} \cong S_{ki}/S_{k,\,i-1}$ и

$$\left|(S_{ki}\overline{S_k}/\overline{S_k})/(S_{k,\,i-1}\overline{S_k}/\overline{S_k})\right| = \left|S_{ki}/S_{k,\,i-1}\right| \in \{1, p_k\}.$$

Аналогично проверяется, что $\left|(T_{ki}\overline{T_k}/\overline{T_k})/(T_{k,\,i-1}\overline{T_k}/\overline{T_k})\right| \in \{1, p_k\}$.

Таким образом, ряды $\overline{\mathcal{R}_{S_k}}$ и $\overline{\mathcal{R}_{T_k}}$ являются главными. Остается проверить, что они $(H\overline{S_k}\,/\overline{S_k}, K\overline{T_k}\,/\overline{T_k}, \varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}})$-совместимы.

Вследствие (H, K, φ)-совместимости рядов $\mathcal{R}_{S_k}$ и $\mathcal{R}_{T_k}$ для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ найдется такое $j \in \{1, \ldots, m\}$, что $(S_{ki} \cap H)\varphi = T_{kj} \cap K$, и наоборот. Для завершения доказательства предложения нам достаточно показать, что из равенства $(S_{ki} \cap H)\varphi = T_{kj} \cap K$ для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ следует, что $(S_{ki}\overline{S_k}/\overline{S_k} \cap H\overline{S_k}/\overline{S_k})\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}} = T_{kj}\overline{T_k}/\overline{T_k} \cap K\overline{T_k}/\overline{T_k}$.

Пусть $a\overline{S_k} \in S_{ki}\overline{S_k}/\overline{S_k} \cap H\overline{S_k}/\overline{S_k}$ — произвольный элемент. Тогда $a \in S_{ki}\overline{S_k}$ и $a \in H\overline{S_k}$. Отсюда вытекает, что элемент a можно записать следующим образом: $a = ss_1$, где $s \in S_{ki}$, $s_1 \in \overline{S_k}$, и $a = hs_2$, где $h \in H$, $s_2 \in \overline{S_k}$.

Представим h в виде $h = h_k h'$, где $h_k \in S_k$ и $h' \in \overline{S_k}$. Тогда $a = h_k s_3$, где $s_3 = h's_2 \in \overline{S_k}$. Так как $a = ss_1$, то $ss_1 = h_k s_3$ и $h_k^{-1}s = s_3 s_1^{-1}$. Но $h_k^{-1}s \in S_k$, $s_3 s_1^{-1} \in \overline{S_k}$ и $S_k \cap \overline{S_k} = 1$. Следовательно, $h_k^{-1}s = s_3 s_1^{-1} = 1$. Отсюда вытекает, что $s = h_k$, и, значит, $h_k \in S_{ki} \cap pr_{S_k}H$.

В силу предложения 2.5 имеет место равенство $pr_{S_k}H = H \cap S_k$. Поэтому $h_k \in S_{ki} \cap H \cap S_k = S_{ki} \cap H$. Из соотношения $(S_{ki} \cap H)\varphi = T_{kj} \cap K$ теперь следует, что $h_k\varphi \in T_{kj} \cap K$.

По определению изоморфизма $\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ $(h_k\overline{S_k})\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}} = (h_k\varphi)\overline{T_k}$. Таким образом, $(a\overline{S_k})\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}} = (h_k\overline{S_k})\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}} \in T_{kj}\overline{T_k}/\overline{T_k} \cap K\overline{T_k}/\overline{T_k}$, и в силу произвольности выбора элемента $a\overline{S_k}$

$$(S_{ki}\overline{S_k}/\overline{S_k} \cap H\overline{S_k}/\overline{S_k})\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}} \leq T_{kj}\overline{T_k}/\overline{T_k} \cap K\overline{T_k}/\overline{T_k}.$$

Докажем противоположное включение.

Пусть $b\overline{T_k} \in T_{kj}\overline{T_k}/\overline{T_k} \cap K\overline{T_k}/\overline{T_k}$ — произвольный элемент. Как и выше, проверяется, что тогда $b = yt$ для подходящих $y \in T_{kj} \cap K$, $t \in \overline{T_k}$.

Поскольку $(S_{ki} \cap H)\varphi = T_{kj} \cap K$, найдется такой элемент $x \in S_{ki} \cap H$, что $x\varphi = y$. Следовательно, $x\overline{S_k} \in S_{ki}\overline{S_k}/\overline{S_k} \cap H\overline{S_k}/\overline{S_k}$ и

$$(x\overline{S_k})\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}} = (x\varphi)\overline{T_k} = y\overline{T_k} = b\overline{T_k}.$$

Таким образом, в силу произвольности выбора элемента $b\overline{T_k}$

$$T_{kj}\overline{T_k}/\overline{T_k} \cap K\overline{T_k}/\overline{T_k} \leq (S_{ki}\overline{S_k}/\overline{S_k} \cap H\overline{S_k}/\overline{S_k})\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}},$$

что и требовалось.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из предложений 2.1, 2.2, 3.1 и теоремы 1.

Предложение 3.2. Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ группа $G_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ аппроксимируется конечными p_k-группами.

Пусть Σ — семейство нормальных подгрупп некоторой группы X. Будем говорить, что подгруппа $Y \leq X$ отделима в X семейством подгрупп Σ, если $\bigcap_{N \in \Sigma} YN = Y$.

Обозначим через $\mathcal{FS}_\pi$ класс всех конечных разрешимых π-групп и положим

$$\mathcal{FS}_\pi^*(G, A) = \{N \cap A | N \trianglelefteq G \wedge G/N \in \mathcal{FS}_\pi\},$$
$$\mathcal{FS}_\pi^*(G, B) = \{N \cap B | N \trianglelefteq G \wedge G/N \in \mathcal{FS}_\pi\}.$$

Предложение 3.3. Каждая конечная подгруппа группы A отделима семейством $\mathcal{FS}_\pi^*(G, A)$, каждая конечная подгруппа группы B отделима семейством $\mathcal{FS}_\pi^*(G, B)$.

Доказательство. Пусть X — конечная подгруппа группы A и $a \in A$ — произвольный элемент, не принадлежащий X. Укажем такую нормальную подгруппу N группы G, что $G/N \in \mathcal{FS}_\pi$ и $a \notin X(N \cap A)$.

В силу предложения 2.9 подгруппа X π'-изолирована в группе A, и по предложению 2.7 найдется число $p_k \in \pi$ такое, что $a \notin Rt_{p_k'}(A, X)$. Ввиду предложения 2.8 $\overline{S_k} \subseteq Rt_{p_k'}(A, X)$. Поскольку множество $Rt_{p_k'}(A, X)$ согласно предложению 2.6 является подгруппой, оно содержит и произведение $X\overline{S_k}$. Но $a \notin Rt_{p_k'}(A, X)$, значит, $a \notin X\overline{S_k}$.

Так как гомоморфизм $\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ продолжает естественный гомоморфизм группы A на фактор-группу $A/\overline{S_k}$, то в группе $G_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ имеет место соотношение $a\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}} \notin X\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$. Обобщенное свободное произведение $G_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ в силу предложения 3.2 аппроксимируется конечными p_k-группами, а его подгруппа $X\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ конечна. Следовательно, в группе $G_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ найдется такая нормальная подгруппа $N_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ конечного p_k-индекса, что $a\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}} \notin X\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}}N_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$.

Пусть N — прообраз подгруппы $N_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ в группе G относительно гомоморфизма $\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$. Тогда N — нормальная подгруппа конечного p_k-индекса группы G и $a \notin XN$. Так как любая конечная p_k-группа является конечной разрешимой π-группой, то $G/N \in \mathcal{FS}_\pi^*$. При этом очевидно, что $a \notin X(N \cap A)$. Следовательно, подгруппа N является искомой.

Рассуждения для подгрупп группы B аналогичны.

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству теоремы. В силу предложения 3.3 подгруппы 1 и H отделимы в группе A семейством $\mathcal{FS}_\pi^*(G, A)$, подгруппы 1 и K отделимы в группе B семейством $\mathcal{FS}_\pi^*(G, B)$. При этом класс $\mathcal{FS}_\pi$ является корневым [2, следствие 1]. Значит, искомое утверждение вытекает из основного результата работы [3], который применительно к классу $\mathcal{FS}_\pi$ может быть сформулирован следующим образом.

Предложение 3.4. Пусть подгруппы 1 и H отделимы в группе A семейством $\mathcal{FS}_\pi^*(G, A)$, подгруппы 1 и K отделимы в группе B семейством $\mathcal{FS}_\pi^*(G, B)$. Тогда группа G $\mathcal{FS}_\pi$-аппроксимируема.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* Об аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения двух нильпотентных групп с конечными объединенными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2006. Вып. 3. С. 102—106.
2. *Гудовщикова А. С., Соколов Е. В.* Два замечания о классе конечных разрешимых π-групп // Вестн. молодых ученых ИвГУ. 2012. С. 3–4.

3. *Гудовщикова А. С., Соколов Е. В.* Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных свободных произведений двух групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 115—123.
4. *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп свободной группы корневым классом групп // Математика и ее приложения : журн. Иван. мат. о-ва. 2011. С. 101—104.
5. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика : период. сб. переводов иностр. ст. 1968. Т. 12, № 1. С. 3—36.
6. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193—209.
7. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.
8. *Neumann B. H.* An essay on free products of groups with amalgamation // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. Vol. 246. P. 503—554.

УДК. 517.946

Л. Н. Кусковский

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ПУАНКАРЕ

Для дифференциальной системы с непрерывно дифференцируемыми комплексными искомыми и заданными функциями в конечной односвязной области плоскости, обобщающей известную систему Коши — Римана, ставится и решается краевая задача Пуанкаре. Получены условия нётеровости и формула индекса задачи.

Ключевые слова: условие Гёльдера, задача Пуанкаре, нётеровость задачи, индекс задачи.

The Poincare boundary value problem is formulated and solved for the differential system with complex, continuously differentiable data and desired functions on a finite, simply connected region of the plane (generalization of the Cauchy — Riemann system). The index problem formula and the Noether conditions are obtained.

Key words: Poincare problem, index problem, Noether condition for a problem, Holder condition.

§ 1. Предварительные сведения

В этом параграфе мы изложим основные понятия и обозначения, которые будут использоваться в работе:

G — конечная односвязная область плоскости $z = x + iy$, $i^2 = -1$;

∂G — замкнутая гладкая положительно ориентированная граница G;

$C^k(G)$ $\left(C^k(\partial G)\right)$ — пространство комплекснозначных функций, имеющих в G (на ∂G) непрерывные частные производные до порядка k включительно, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

© Кусковский Л. Н., 2014