Математические заметки

Том 97 выпуск 5 май 2015

УДК 512.543

Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп

Е. В. Соколов

Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный корневой класс групп, состоящий лишь из конечных групп и содержащий хотя бы одну неединичную группу. Доказано, что любое расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности. Установлено также, что если G – свободное произведение двух $\mathcal{C}$-аппроксимируемых относительно сопряженности групп с конечной объединенной подгруппой или HNN-расширение $\mathcal{C}$-аппроксимируемой относительно сопряженности группы с конечными связанными подгруппами, то $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы G равносильна ее $\mathcal{C}$-аппроксимируемости относительно сопряженности.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10396

1. Введение. Формулировка результатов. Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный класс групп и X – некоторая группа. Будем говорить, что элемент x группы X *сопряженно $\mathcal{C}$-отделим* (в этой группе), если для любого элемента $y \in X$, не сопряженного с x, существует гомоморфизм группы X на $\mathcal{C}$-группу, переводящий x и y в несопряженные элементы. Напомним, что группа X называется *аппроксимируемой классом $\mathcal{C}$* относительно сопряженности, если произвольный ее элемент сопряженно $\mathcal{C}$-отделим.

Если в определениях выше в качестве $\mathcal{C}$ взять класс всех конечных групп, мы получим хорошо известное понятие финитной аппроксимируемости относительно сопряженности.

Стиб [1] установил, что в произвольном расширении свободной группы при помощи конечной группы все элементы бесконечного порядка сопряженно финитно отделимы. Используя этот результат, Дайер [2] доказала, что любое конечное расширение свободной группы финитно аппроксимируемо относительно сопряженности. Ивановой [3]–[5] получен аналог последнего утверждения для свойства аппроксимируемости классом всех конечных p-групп, где p – некоторое простое число. Ею установлено, что произвольное расширение свободной группы при помощи конечной p-группы аппроксимируется конечными p-группами относительно сопряженности.

Основной целью данной статьи служит доказательство следующего утверждения, обобщающего результаты Дайер и Ивановой.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный нетривиальный* (*т.е. содержащий хотя бы одну неединичную группу*) *корневой класс групп, состоящий лишь из конечных групп. Тогда любое расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности.*

Напомним [6], что класс групп $\mathcal{C}$ называется *корневым*, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) произвольная подгруппа $\mathcal{C}$-группы также является $\mathcal{C}$-группой;
2) прямое произведение любых двух $\mathcal{C}$-групп принадлежит классу $\mathcal{C}$;
3) условие Грюнберга: для любой группы X и для любой субнормальной последовательности $Z \leqslant Y \leqslant X$ с факторами из класса $\mathcal{C}$ найдется нормальная подгруппа T группы X, лежащая в Z и такая, что $X/T \in \mathcal{C}$.

Легко видеть, что в этом определении второе условие следует из первого и третьего. Нетрудно показать также (см., например, [7]), что класс групп, содержащий лишь конечные группы, является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений. Конкретными примерами корневых классов конечных групп, кроме упоминавшихся выше классов всех конечных групп и всех конечных p-групп, могут служить классы всех конечных π-групп, где π – непустое множество простых чисел, и всех конечных разрешимых π-групп.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный нетривиальный корневой класс конечных групп, G – обобщенное свободное произведение двух конечных групп или* HNN-*расширение конечной группы. Если группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то она $\mathcal{C}$-аппроксимируема относительно сопряженности.*

Действительно, если G есть обобщенное свободное произведение двух конечных групп A и B, то из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы G следует существование такой нормальной подгруппы N, что $G/N \in \mathcal{C}$ и $N \cap A = N \cap B = 1$ (см. предложение 1 ниже). По теореме Нейманн [8] подгруппа N является свободной, и потому группа G оказывается расширением свободной группы N при помощи $\mathcal{C}$-группы G/N. Те же рассуждения подходят и в случае, когда G – HNN-расширение конечной группы, необходимо лишь воспользоваться соответствующим результатом из статьи [9] вместо теоремы Нейманн.

На самом деле, условия конечности свободных множителей и базовой группы из следствия 1 можно ослабить, потребовав лишь конечности, соответственно, объединенной или связанных подгрупп. Имеет место

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный нетривиальный корневой класс конечных групп, G – свободное произведение двух $\mathcal{C}$-аппроксимируемых относительно сопряженности групп с конечной объединенной подгруппой или* HNN-*расширение $\mathcal{C}$-аппроксимируемой относительно сопряженности группы с конечными связанными подгруппами. Если группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то она $\mathcal{C}$-аппроксимируема относительно сопряженности.*

Поскольку обычное свободное произведение двух групп можно рассматривать как обобщенное с тривиальной объединенной подгруппой, из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Свободное произведение двух групп, аппроксимируемых относительно сопряженности некоторым нетривиальным корневым классом конечных групп, само аппроксимируется относительно сопряженности этим классом.*

Отметим, что в случае, когда $\mathcal{C}$ совпадает с классом всех конечных групп, утверждения, доставляемые теоремой 2 и следствием 2, известны и доказаны в работах [10] и [1], соответственно.

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Всюду далее мы будем предполагать, что $\mathcal{C}$ – нетривиальный корневой класс конечных групп. Если G – некоторая группа, то через $\mathcal{C}^*(G)$ будем обозначать семейство всех таких нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{C}$.

Предложение 1. *Пусть G – произвольная группа. Тогда*

1) *пересечение конечного числа подгрупп из семейства $\mathcal{C}^*(G)$ снова принадлежит этому семейству;*
2) *если группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема и $M \subseteq G\backslash\{1\}$ – конечное подмножество, то существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(G)$ такая, что $N \cap M = \varnothing$;*
3) *если $K \leqslant H \leqslant G$ и $K \in \mathcal{C}^*(G)$, то $K \in \mathcal{C}^*(H)$.*

Доказательство. Для проверки утверждения 1) достаточно заметить, что если $H_1, H_2, \dots, H_n \in \mathcal{C}^*(G)$, то согласно теореме Ремака фактор-группа

$$G/(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n)$$

вкладывается в прямое произведение фактор-групп $G/H_1, G/H_2, \dots, G/H_n \in \mathcal{C}$ и, следовательно, принадлежит $\mathcal{C}$ в силу свойств 1) и 2) из определения корневого класса.

Утверждение 2) следует из утверждения 1), а утверждение 3) – из наследственности класса $\mathcal{C}$. $\square$

Приводимые ниже предложения 2 и 5 являются аналогами леммы 1 и теоремы 2 из работы [1], причем в отдельных местах их доказательства повторяют используемые в данной работе рассуждения почти дословно. Всюду далее, если H – подгруппа некоторой группы G и $g_1, g_2 \in G$, то запись $g_1 \sim_H g_2$ означает, что элементы g_1 и g_2 сопряжены при помощи элемента из подгруппы H.

Предложение 2. *Пусть H – подгруппа некоторой группы G, и пусть существует подгруппа $F \in \mathcal{C}^*(G)$, лежащая в H. Если элемент $h \in H$ сопряженно $\mathcal{C}$-отделим в H, то он сопряженно $\mathcal{C}$-отделим и во всей группе G.*

Доказательство. Пусть элемент $h \in H$ сопряженно $\mathcal{C}$-отделим в H, и пусть $g \in G$ — произвольный элемент, не сопряженный с h. Пусть также A – полная система представителей левых смежных классов группы G по подгруппе H и

$$B = \{a \in A \mid a^{-1}ga \in H\}.$$

Поскольку класс $\mathcal{C}$ состоит лишь из конечных групп, подгруппы F и H имеют конечный индекс в группе G и, следовательно, множества A и B конечны.

Так как элемент h не сопряжен с g, он не сопряжен ни с одним элементом вида $b^{-1}gb$, где $b \in B$. Поэтому, пользуясь сопряженной $\mathcal{C}$-отделимостью элемента h

в группе H, для каждого элемента $b\in B$ можно найти подгруппу $M_b\in\mathcal{C}^*(H)$ такую, что $h\not\sim_H b^{-1}gb\,(\operatorname{mod} M_b)$.

Пусть $M=(\bigcap_{b\in B}M_b)\cap F$. Так как множество B конечно и $F\in\mathcal{C}^*(G)$, то по предложению 1 $F\in\mathcal{C}^*(H)$, $M\in\mathcal{C}^*(H)$ и $M\in\mathcal{C}^*(F)$. Получаем субнормальную последовательность $M\leqslant F\leqslant G$ с факторами из класса $\mathcal{C}$. Поскольку этот класс является корневым, найдется подгруппа $N\in\mathcal{C}^*(G)$, лежащая в M.

Предположим, что $c^{-1}gc\equiv h\,(\operatorname{mod} N)$ для некоторого элемента $c\in G$. Записывая c в виде $c=ad$ для подходящих элементов $a\in A$ и $d\in H$, получаем сравнение $a^{-1}ga\equiv dhd^{-1}\,(\operatorname{mod} N)$, из которого следует, что $a^{-1}ga\in H$ и $a\in B$. Но тогда $N\leqslant M_a$ и $h\sim_H a^{-1}ga\,(\operatorname{mod} M_a)$, что невозможно в силу выбора подгруппы M_a.

Таким образом, $g\not\sim_G h\,(\operatorname{mod} N)$.

Предложение 3. *Произвольная свободная группа $\mathcal{C}$-аппроксимируема относительно сопряженности.*

Доказательство. Действительно, поскольку класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну неединичную конечную группу и является наследственным, он включает некоторую циклическую группу простого порядка, который мы обозначим через p. Тогда все конечные p-группы также входят в класс $\mathcal{C}$ в силу замкнутости последнего относительно взятия расширений. Остается лишь заметить, что свободные группы аппроксимируются конечными p-группами относительно сопряженности (см., например, [11; гл. 1, предложение 4.8]).

Справедливость следующего утверждения устанавливается в ходе доказательства теоремы 2 из [1].

Предложение 4. *Пусть F – свободная нормальная подгруппа конечного индекса некоторой группы G, g – элемент бесконечного порядка группы G, n – порядок элемента g по модулю подгруппы F и h – произвольный элемент из подгруппы H, порожденной g и F. Если $g\equiv h\,(\operatorname{mod} F)$ и $g^n\sim_H h^n$, то $g\sim_H h$.*

Предложение 5. *Пусть группа G представляет собой расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы. Тогда произвольный элемент бесконечного порядка группы G сопряженно $\mathcal{C}$-отделим в G.*

Доказательство. Пусть F – свободная нормальная подгруппа группы G и $G/F\in\mathcal{C}$. Пусть также $g\in G$ – произвольный элемент бесконечного порядка группы G и H – подгруппа группы G, порожденная g и F. Покажем, что элемент g сопряженно $\mathcal{C}$-отделим в G.

Так как $g\in H$ и подгруппа H содержит подгруппу $F\in\mathcal{C}^*(G)$, то в силу предложения 2 достаточно показать, что элемент g сопряженно $\mathcal{C}$-отделим в H.

Пусть $h\in H$ – произвольный элемент, не сопряженный с g в группе H. Если элементы g и h не сравнимы по модулю F, то гомоморфизм на фактор-группу H/F является искомым. Пусть $g\equiv h\,(\operatorname{mod} F)$ и n – порядок элемента g по модулю подгруппы F. Тогда по предложению 4 $g^n\not\sim_H h^n$.

Поскольку F – свободная группа, ее элемент g^n сопряженно $\mathcal{C}$-отделим в F согласно предложению 3. Так как $F\in\mathcal{C}^*(H)$, по предложению 2 элемент g^n сопряженно $\mathcal{C}$-отделим и в подгруппе H. Следовательно, найдется подгруппа $N\in\mathcal{C}^*(H)$ такая, что $g^n\not\sim_H h^n\,(\operatorname{mod} N)$. Но тогда, очевидно, $g\not\sim_H h\,(\operatorname{mod} N)$.

Далее через C_n будем обозначать циклическую группу порядка n.

Предложение 6. *Пусть число* $n \geqslant 2$ *таково, что* $C_n \in \mathcal{C}$. *Пусть также* r, $s_1, s_2, \dots, s_k$, $k \geqslant 0$, *– делители числа* n, *большие* 1, *и*

$$\begin{aligned} G(r, s_1, s_2, \dots, s_k) \\ = \bigl\langle x, y, t_1, t_2, \dots, t_k;\ x^n = y^n = 1,\ x^r = y^r,\ t_i x^{s_i} t_i^{-1} = y^{s_i},\ 1 \leqslant i \leqslant k \bigr\rangle. \end{aligned}$$

Тогда существует гомоморфизм группы $G(r, s_1, s_2, \dots, s_k)$ *на* $\mathcal{C}$*-группу, переводящий* x *и* y *в несопряженные элементы.*

Доказательство будем вести индукцией по k.

Если $k = 0$, то $G(r) = \langle x, y;\ x^n = y^n = 1,\ x^r = y^r \rangle$. Так как $r | n$, то $C_r \leqslant C_n$, откуда $C_r \in \mathcal{C}$ и $C_r \times C_r \in \mathcal{C}$ в силу определения корневого класса. Следовательно, искомым будет гомоморфизм группы $G(r)$ на группу $P = \langle x, y;\ x^r = y^r = 1,\ [x, y] = 1 \rangle$, изоморфную $C_r \times C_r$.

Пусть теперь $k \geqslant 1$,

$$G_1 = \bigl\langle x, y, t_1, t_2, \dots, t_k;\ x^n = y^n = 1,\ x^r = y^r,\ t_i x^{s_i} t_i^{-1} = y^{s_i},\ 1 \leqslant i \leqslant k,\ t_k^n = 1 \bigr\rangle$$

и H – нормальное замыкание в группе G_1 множества элементов $\{x, y, t_1, \dots, t_{k-1}\}$. Тогда $G_1/H \cong C_n$, т.е. $H \in \mathcal{C}^*(G_1)$.

Множество $\{1, t_k, t_k^2, \dots, t_k^{n-1}\}$ является шрайеровской системой представителей смежных классов группы G_1 по подгруппе H. Поэтому подгруппа H порождается элементами

$$x_j = t_k^j x t_k^{-j}, \quad y_j = t_k^j y t_k^{-j}, \quad t_{ij} = t_k^j t_i t_k^{-j}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1,$$

и определяется в этих порождающих соотношениями

$$\begin{gathered} x_j^n = y_j^n = 1, \quad x_j^r = y_j^r, \quad t_{ij} x_j^{s_i} t_{ij}^{-1} = y_j^{s_i}, \quad x_{(j+1) \bmod n}^{s_k} = y_j^{s_k}, \\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1. \end{gathered}$$

Покажем, что для каждого $j \in \{0, \dots, n-1\}$ существует гомоморфизм группы H на $\mathcal{C}$-группу, переводящий элементы x_0 и y_j в несопряженные.

Если $j = 0$, рассмотрим отображение α образующих группы H в группу $G(r, s_1, s_2, \dots, s_{k-1})$, определенное по правилу

$$\begin{gathered} x_0, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{n-1}, y_{n-1} \mapsto x, \qquad y_0, x_1 \mapsto y, \\ t_{i0} \mapsto t_i, \quad t_{i1} \mapsto t_i^{-1}, \quad t_{ij} \mapsto 1 \qquad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \quad 2 \leqslant j \leqslant n-1, \end{gathered}$$

и естественным образом продолжаемое до отображения слов. Непосредственно проверяется, что отображение α переводит все определяющие соотношения группы H в равенства, верные в группе $G(r, s_1, s_2, \dots, s_{k-1})$, и, следовательно, является гомоморфизмом. Так как $x_0\alpha = x$ и $y_0\alpha = y$, то гомоморфизм α может быть продолжен до искомого в силу индуктивного предположения.

Если $1 \leqslant j \leqslant n-1$, то точно так же до искомого гомоморфизма продолжается отображение β порождающих группы H в группу

$$G(s_k) = \langle x, y;\ x^n = y^n = 1,\ x^{s_k} = y^{s_k} \rangle,$$

определенное по правилу

$$
\begin{aligned}
x_0, y_0 &\mapsto x, \qquad x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1} \mapsto y,\\
t_{ij} &\mapsto 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1,
\end{aligned}
$$

и переводящее x_0 в x, y_j в y.

Таким образом, для каждого $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ существует подгруппа $M_j \in \mathcal{C}^*(H)$ такая, что $x_0 \nsim_H y_j \,(\operatorname{mod} M_j)$. Положим $M = \bigcap_{j=0}^{n-1} M_j$. Тогда $M \leqslant H \leqslant G_1$ – субнормальная последовательность с факторами из класса $\mathcal{C}$. Так как этот класс является корневым, то найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(G_1)$, лежащая в M.

Предположим, что $g^{-1}xg \equiv y \,(\operatorname{mod} N)$ для некоторого элемента $g \in G_1$. Тогда, записывая g в виде $g = ht_k^j$ для подходящих числа $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ и элемента $h \in H$, получаем сравнение

$$
h^{-1}x_0h = h^{-1}xh \equiv t_k^j y t_k^{-j} = y_j \,(\operatorname{mod} N),
$$

из которого следует, что $x_0 \sim_H y_j \,(\operatorname{mod} M_j)$ в противоречие с выбором подгруппы M_j.

Таким образом, $x \nsim_{G_1} y \,(\operatorname{mod} N)$, и композиция естественных гомоморфизмов группы G на G_1 и группы G_1 на G_1/N является искомой.

3. Графы групп. Прежде всего, напомним определение и некоторые свойства фундаментальной группы графа групп.

Пусть Γ – неориентированный связный граф с множеством вершин V и семейством ребер E (допускаются петли и пары вершин, соединенные более, чем одним ребром). Пусть также каждой вершине $v \in V$ сопоставлена группа G_v, а каждому ребру $e \in E$ – группа G_e и вложения $\varphi_{e,u}\colon G_e \to G_u$ и $\varphi_{e,v}\colon G_e \to G_v$, где u и v – вершины, соединяемые ребром e. Тогда Γ называется *графом групп.*

Зафиксируем некоторое максимальное дерево T в графе Γ. *Фундаментальной группой* $\pi_1(\Gamma)$ графа групп Γ называется группа, порождающими которой являются порождающие групп G_v, $v \in V$, и символы t_e, $e \in E \setminus T$, а определяющими соотношениями – определяющие соотношения групп G_v, $v \in V$, а также все соотношения вида

$$
\begin{aligned}
g\varphi_{e,u} &= g\varphi_{e,v}, \qquad g \in G_e, \quad e \in T,\\
t_e g\varphi_{e,u} t_e^{-1} &= g\varphi_{e,v}, \qquad g \in G_e, \quad e \in E \setminus T.
\end{aligned}
$$

Хорошо известно, что фундаментальная группа графа Γ не зависит от выбора дерева T и представляет собой HNN-расширение с проходными буквами t_e, $e \in E \setminus T$, древесного произведения групп G_v, $v \in V$. Отсюда следует, в частности, что все вершинные группы G_v вкладываются в $\pi_1(\Gamma)$.

Пусть далее $\{V_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ – такое разбиение множества вершин графа Γ на попарно непересекающиеся подмножества, что подграфы Γ_i, $i \in \mathcal{I}$, порожденные множествами V_i, являются связными. Определим граф групп Γ^* следующим образом:

а) вершинами графа Γ^* служат подграфы Γ_i, $i \in \mathcal{I}$, вершинными группами являются группы $\pi_1(\Gamma_i)$, $i \in \mathcal{I}$;

б) каждому ребру e графа Γ, связывающему некоторую вершину u подграфа Γ_i с некоторой вершиной v подграфа Γ_j, $j \neq i$, сопоставляется ребро e^* графа Γ^*, связывающее вершины Γ_i и Γ_j; ребру e^* соответствуют группа G_e и вложения

$$
\varphi_{e^*,i} = \varphi_{e,u} \circ \psi_i, \qquad \varphi_{e^*,j} = \varphi_{e,v} \circ \psi_j,
$$

где $\psi_i\colon G_u \to \pi_1(\Gamma_i)$, $\psi_j\colon G_v \to \pi_1(\Gamma_j)$ – вложения вершинных групп G_u и G_v в фундаментальные группы соответствующих подграфов.

Нетрудно показать, что максимальные деревья в графах Γ и Γ^* можно выбрать так, что группы $\pi_1(\Gamma)$ и $\pi_1(\Gamma^*)$ будут иметь одинаковые представления. Поэтому имеет место

Предложение 7 [2]. *Фундаментальная группа построенного выше графа* Γ^* *изоморфна фундаментальной группе графа* Γ.

Зафиксируем теперь в каждой вершинной группе G_v графа Γ нормальную подгруппу N_v, в каждой реберной группе G_e нормальную подгруппу N_e и предположим, что для любого ребра e графа Γ выполняются соотношения

$$N_u \cap G_e\varphi_{e,u} = N_e\varphi_{e,u}, \qquad N_v \cap G_e\varphi_{e,v} = N_e\varphi_{e,v},$$

где u и v – вершины, связываемые ребром e. Тогда отображения

$$\overline{\varphi}_{e,u}\colon G_e/N_e \to G_u/N_u, \qquad \overline{\varphi}_{e,v}\colon G_e/N_e \to G_v/N_v,$$

заданные правилами

$$(xN_e)\overline{\varphi}_{e,u} = (x\varphi_{e,u})N_u, \qquad (xN_e)\overline{\varphi}_{e,v} = (x\varphi_{e,v})N_v,$$

корректно определены и являются изоморфными вложениями. Поэтому мы можем рассмотреть граф групп $\overline{\Gamma}$ с теми же множеством вершин V и семейством ребер E, что и у графа Γ, вершинам которого сопоставляются группы $\overline{G}_v = G_v/N_v$, $v \in V$, а ребрам – группы $\overline{G}_e = G_e/N_e$ и вложения $\overline{\varphi}_{e,v}$, $e \in E$, $v \in e$.

Зафиксируем в графах Γ и $\overline{\Gamma}$ одно и то же максимальное дерево T и соответствующие ему представления групп $\pi_1(\Gamma)$ и $\pi_1(\overline{\Gamma})$. Тогда можно определить отображение $\rho\colon \pi_1(\Gamma) \to \pi_1(\overline{\Gamma})$, продолжающее естественные гомоморфизмы групп G_v на $\overline{G}_v$, $v \in V$, и ставящее в соответствие порождающим символам t_e, $e \in E \setminus T$, группы $\pi_1(\Gamma)$ такие же символы группы $\pi_1(\overline{\Gamma})$. Легко видеть, что это отображение переводит все определяющие соотношения группы $\pi_1(\Gamma)$ в равенства, верные в группе $\pi_1(\overline{\Gamma})$, и потому является сюръективным гомоморфизмом. Используя преобразования Тице, нетрудно показать также, что ядро гомоморфизма ρ совпадает с нормальным замыканием в группе $\pi_1(\Gamma)$ объединения подгрупп N_v, $v \in V$.

Из определения графа групп $\overline{\Gamma}$ и гомоморфизма ρ следует, что группа $\pi_1(\overline{\Gamma})$ представляет собой HNN-расширение с тем же числом проходных букв, что и у группы $\pi_1(\Gamma)$, а базовая группа этого расширения является древесным произведением, свободными множителями которого служат группы $G_v\rho$, $v \in V$. Очевидно также, что объединяемые и связанные подгруппы группы $\pi_1(\overline{\Gamma})$ оказываются образами относительно ρ соответствующих объединяемых и связанных подгрупп группы $\pi_1(\Gamma)$.

Предложение 8. *Пусть* Γ *– граф групп с конечным числом вершин и ребер, все реберные группы графа* Γ *конечны и его фундаментальная группа* G $\mathcal{C}$*-аппроксимируема. Пусть также для каждого* $v \in V$ *зафиксирована подгруппа* $N_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$. *Тогда найдется такая подгруппа* $T \in \mathcal{C}^*(G)$, *что для всякого* $v \in V$ *имеет место соотношение* $T \cap G_v \leqslant N_v$.

Доказательство. Так как группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то по предложению 1 найдется подгруппа $R \in \mathcal{C}^*(G)$, тривиально пересекающаяся с конечным множеством элементов $\bigcup_{e \in E, v \in e} G_e\varphi_{e,v} \subseteq G$. Для каждого $v \in V$ положим $M_v = R \cap N_v$.

Поскольку подгруппы M_v, $v \in V$, в силу выбора подгруппы R тривиально пересекаются с образами относительно вложений $\varphi_{e,v}$ всех реберных групп, мы можем рассмотреть граф групп $\overline{\Gamma}$, вершинам которого соответствуют группы $\overline{G}_v = G_v/M_v$, а ребрам – группы $\overline{G}_e = G_e$ и вложения $\overline{\varphi}_{e,v}$, определенные выше. Обозначим через $\overline{G}$ фундаментальную группу этого графа и через ρ гомоморфизм группы G на группу $\overline{G}$, продолжающий естественные гомоморфизмы групп G_v, $v \in V$, на фактор-группы G_v/M_v.

Пусть $\overline{R} = R\rho$ и для каждого $v \in V$ $\overline{L}_v = \overline{R} \cap \overline{G}_v$. Так как ядро гомоморфизма ρ совпадает с нормальным замыканием в группе G подгрупп M_v, $v \in V$, то оно содержится в R. С учетом этого из равенств

$$R \cap G_e\varphi_{e,v} = 1, \quad \overline{G}_e\overline{\varphi}_{e,v} = (G_e\varphi_{e,v})M_v/M_v = (G_e\varphi_{e,v})\rho, \qquad e \in E, \quad v \in e,$$

вытекают соотношения $\overline{R} \cap \overline{G}_e\overline{\varphi}_{e,v} = 1$. Так как графы Γ и $\overline{\Gamma}$ имеют конечное число вершин и ребер, то группа $\overline{G}$ представляет собой HNN-расширение с конечным числом проходных букв древесного произведения, имеющего конечное число свободных множителей. Используя результаты работ [9], [12] и очевидную индукцию, мы получаем отсюда, что подгруппа $\overline{R}$ раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы F и подгрупп, сопряженных с $\overline{L}_v$, $v \in V$.

Очевидно, что существует гомоморфизм σ группы $\overline{R}$ на прямое произведение P групп $\overline{L}_v$, $v \in V$, действующий инъективно на всех сомножителях, кроме F, и переводящий элементы подгруппы F в 1. Обозначим ядро этого гомоморфизма через $\overline{S}$.

Поскольку $R \in \mathcal{C}^*(G)$, для всякого $v \in V$ имеет место включение $R \cap G_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$. Отсюда вытекает, что

$$M_v = N_v \cap (R \cap G_v) \in \mathcal{C}^*(G_v), \qquad G_v/M_v \in \mathcal{C}, \quad \overline{L}_v \in \mathcal{C},$$

так как $\overline{L}_v \leqslant G_v/M_v$. Следовательно, группа P представляет собой прямое произведение $\mathcal{C}$-групп, число сомножителей в котором конечно ввиду конечности множества V. Поэтому в силу определения корневого класса $P \in \mathcal{C}$ и $\overline{S} \in \mathcal{C}^*(\overline{R})$.

Так как $\ker\rho \leqslant R$, то $\overline{G}/\overline{R} \cong G/R$. Следовательно, $\overline{R} \in \mathcal{C}^*(\overline{G})$, и мы получаем субнормальную последовательность $\overline{S} \leqslant \overline{R} \leqslant \overline{G}$ с факторами из класса $\mathcal{C}$. Поскольку данный класс является корневым, найдется подгруппа $\overline{T} \in \mathcal{C}^*(\overline{G})$, лежащая в $\overline{S}$.

Пусть T – прообраз подгруппы $\overline{T}$ относительно гомоморфизма ρ. В силу определения гомоморфизма σ для каждого $v \in V$ имеют место соотношения

$$\overline{S} \cap \overline{G}_v = \overline{S} \cap (\overline{R} \cap \overline{G}_v) = \overline{S} \cap \overline{L}_v = 1.$$

Поскольку $\overline{T} \leqslant \overline{S}$, отсюда следует, что $\overline{T} \cap \overline{G}_v = 1$ и потому $T \cap G_v = M_v$. Таким образом, подгруппа T является искомой.

4. Доказательство теоремы 1. Рассуждения, приводимые в данном параграфе, в целом следуют той же схеме, что и в работе [2].

Пусть F – свободная нормальная подгруппа некоторой группы G и $G/F \in \mathcal{C}$. Пусть также $g \in G$ – произвольный элемент. Покажем, что он сопряженно $\mathcal{C}$-отделим в группе G.

В силу предложения 5 можно считать, что элемент g имеет конечный порядок n. Подгруппа H, порожденная подгруппой F и этим элементом, содержит подгруппу $F \in \mathcal{C}^*(G)$. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что элемент g сопряженно $\mathcal{C}$-отделим в группе H.

Пусть h – произвольный элемент группы H, не сопряженный с g. Если h имеет бесконечный порядок, то существование искомого гомоморфизма следует из предложения 5. Поэтому далее можно считать, что порядок элемента h конечен.

Фактор-группа H/F абелева. Поэтому, если $g \not\equiv h \pmod F$, то искомым будет гомоморфизм группы H на фактор-группу H/F, и далее мы можем считать, что $g \equiv h \pmod F$. Поскольку подгруппа F без кручения, из последнего сравнения следует, что элементы g и h имеют одинаковый порядок $n \geqslant 2$.

Будучи конечным расширением свободной группы, подгруппа H представляет собой фундаментальную группу некоторого графа групп Γ, все вершинные группы которого конечны и потому тривиально пересекаются со свободной подгруппой F [13]. Следовательно, гомоморфизм группы H на фактор-группу H/F, изоморфную циклической группе C_n, инъективен на вершинных группах, и все они являются подгруппами группы C_n.

Поскольку группа $\pi_1(\Gamma)$ представляет собой HNN-расширение древесного произведения вершинных групп, любой ее элемент конечного порядка сопряжен с некоторым элементом какой-либо вершинной группы. Поэтому, заменяя при необходимости элементы g и h сопряженными, можно считать далее, что они принадлежат вершинным группам графа Γ. Обозначим соответствующие вершины через u и v, соответственно. Заметим, что $u \neq v$ (в противном случае $g = h^k$ для некоторого целого k и, следовательно, $h \equiv g \equiv h^k \pmod F$, откуда $k \equiv 1 \pmod n$ и $g = h$, что невозможно).

Пусть граф Γ' получается из графа Γ удалением всех ребер, группы которых отличны от C_n. Очевидно, что если V_0 – множество вершин некоторой компоненты связности графа Γ', то подграф, порожденный в графе Γ множеством V_0, является связным. Поэтому мы можем рассмотреть граф Γ^*, определяемый разбиением множества V на подмножества, соответствующие компонентам связности графа Γ'.

Понятно, что все реберные группы графа Γ^* отличны от C_n. Заметим также, что вершины u и v принадлежат разным компонентам связности графа Γ', а потому элементы g и h содержатся в разных вершинных группах графа Γ^*.

Действительно, если u и v принадлежат одной компоненте связности графа Γ', то вершинные группы графа Γ, соответствующие u и v, сопряжены в группе $H = \pi_1(\Gamma)$, и потому $g \sim_H h^k$ для некоторого целого k. Тогда снова $g \equiv h^k \pmod F$ и $k \equiv 1 \pmod n$, откуда $g \sim_H h$, что невозможно.

Пусть далее T – некоторое максимальное дерево в графе Γ^*, u^* и v^* – вершины графа Γ^*, группам которых принадлежат элементы g и h, и пусть граф T' получается из T удалением некоторого ребра, лежащего на пути, соединяющем вершины u^* и v^*. Тогда граф T' имеет в точности две компоненты связности. Обозначим через V_1 и V_2 множества вершин этих компонент так, чтобы вершина u^* принадлежала V_1, а вершина v^* – соответственно V_2.

Граф Γ^{**}, определяемый множествами V_1 и V_2, имеет две вершины, и все его реберные группы отличны от C_n. Согласно предложению 7 $\pi_1(\Gamma^{**}) \cong \pi_1(\Gamma^*) \cong H$, и далее мы будем считать, что $H = \pi_1(\Gamma^{**})$. Заметим также, что элементы g и h по-прежнему принадлежат разным вершинным группам.

Обозначим вершинные группы графа Γ^{**} через A, B и положим $M = A \cap F$, $N = B \cap F$, $\overline{A} = A/M$, $\overline{B} = B/N$. Тогда

$$\overline{A} \cong AF/F \leqslant H/F \cong C_n, \qquad \overline{B} \cong BF/F \leqslant H/F \cong C_n.$$

Так как подгруппа F свободна, она тривиально пересекается со всеми конечными подгруппами графа Γ^{**}. Поэтому образы элементов g и h относительно естественных гомоморфизмов $\delta\colon A \to \overline{A}$ и $\varepsilon\colon B \to \overline{B}$, соответственно, по-прежнему имеют порядок n и, следовательно, $\overline{A} \cong \overline{B} \cong C_n$. Кроме того, подгруппы M, N тривиально пересекаются с образами всех реберных групп графа Γ^{**}, и это дает нам возможность рассмотреть граф групп $\overline{\Gamma}^{**}$, вершинам которого соответствуют группы $\overline{A}$ и $\overline{B}$, и гомоморфизм $\rho\colon H \to \pi_1(\overline{\Gamma}^{**})$, продолжающий естественные гомоморфизмы δ и ε.

Выберем элементы $x = g\rho$, $y = h\rho$ в качестве порождающих групп $\overline{A}$, $\overline{B}$. Тогда для подходящих чисел $r_1, r_2, s_{j1}, s_{j2} \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \mathcal{J}$, группа $\overline{H} = \pi_1(\overline{\Gamma}^{**})$ имеет представление

$$\overline{H} = \bigl\langle x, y, t_j;\ x^n = y^n = 1,\, x^{r_1} = y^{r_2},\, t_j x^{s_{j1}} t_j^{-1} = y^{s_{j2}}\ (j \in \mathcal{J})\bigr\rangle.$$

Положим $\overline{F} = F\rho$ и обозначим через θ естественный гомоморфизм группы H на фактор-группу H/F.

В предыдущем пункте было отмечено, что ядро гомоморфизма ρ совпадает с нормальным замыканием в группе H множества $M \cup N$ и потому содержится в F. Следовательно, $\overline{H}/\overline{F} \cong H/F$ и существует гомоморфизм $\sigma\colon \overline{H} \to H/F$, удовлетворяющий условию $\rho \circ \sigma = \theta$. Имеем

$$x\sigma = g\rho\sigma = g\theta = h\theta = h\rho\sigma = y\sigma$$

и, так как $g\theta = h\theta$ – элемент порядка n, то $r_1 \equiv r_2 \pmod n$ и $s_{j1} \equiv s_{j2} \pmod n$ для всех $j \in \mathcal{J}$. Но $r_1, r_2, s_{j1}, s_{j2} \in \{1, 2, \dots, n\}$; следовательно, $r_1 = r_2$, $s_{j1} = s_{j2}$, $j \in \mathcal{J}$.

Очевидно, что числа r_1, r_2, s_{j1}, s_{j2}, $j \in \mathcal{J}$, можно считать делителями числа n. Заметим также, что все реберные группы графа Γ^{**} были отличны от C_n, а реберные группы графа $\overline{\Gamma}^{**}$ изоморфны им. Поэтому каждое из чисел r_1, r_2, s_{j1}, s_{j2}, $j \in \mathcal{J}$, больше 1.

Понятно, что среди чисел s_{j1}, $j \in \mathcal{J}$, лишь конечное число различных. Обозначим их через $s_1, s_2, \dots, s_k$, положим $r = r_1 = r_2$ и рассмотрим отображение λ порождающих группы $\overline{H}$ в группу

$$\begin{aligned} &G(r, s_1, s_2, \dots, s_k) \\ &\quad= \bigl\langle \chi, \gamma, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k;\ \chi^n = \gamma^n = 1,\, \chi^r = \gamma^r,\, \tau_i \chi^{s_i} \tau_i^{-1} = \gamma^{s_i},\, 1 \leqslant i \leqslant k\bigr\rangle, \end{aligned}$$

определяемое по правилу

$$x \mapsto \chi, \quad y \mapsto \gamma, \quad t_j \mapsto \tau_{i_j}, \qquad j \in \mathcal{J},$$

где $i_j \in \{1, 2, \dots, k\}$ – такое число, что $s_{j1} = s_{j2} = s_{i_j}$.

Продолжая λ естественным образом до отображения слов, мы видим, что все определяющие соотношения группы $\overline{H}$ под его действием переходят в равенства, верные в группе $G(r, s_1, s_2, \dots, s_k)$. Поэтому λ – гомоморфизм и, так как $x\lambda = \chi$, $y\lambda = \gamma$, согласно предложению 6 гомоморфизм $\rho \circ \lambda$ можно продолжить до искомого.

5. Доказательство теоремы 2. Пусть Γ – граф групп с конечным числом вершин и ребер, и пусть $R \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\Gamma))$. Положим для каждого $v \in V$ $N_v = R \cap G_v$.

Тогда для любого ребра e имеют место соотношения

$$(N_u \cap G_e\varphi_{e,u})\varphi_{e,u}^{-1} = (R \cap G_e\varphi_{e,u})\varphi_{e,u}^{-1} = (R \cap G_e\varphi_{e,v})\varphi_{e,v}^{-1} = (N_v \cap G_e\varphi_{e,v})\varphi_{e,v}^{-1},$$

где, как обычно, u и v – вершины, связываемые ребром e. Поэтому, полагая

$$N_e = (N_u \cap G_e\varphi_{e,u})\varphi_{e,u}^{-1} = (N_v \cap G_e\varphi_{e,v})\varphi_{e,v}^{-1},$$

мы можем построить граф групп Γ_R и гомоморфизм $\rho_R\colon \pi_1(\Gamma) \to \pi_1(\Gamma_R)$ так, как это было описано в п. 3.

Будучи нормальным замыканием подгрупп N_v, $v \in V$, ядро гомоморфизма ρ_R содержится в R. Поэтому из соотношений $N_v = R \cap G_v$ следует, что $R\rho_R \cap G_v\rho_R = 1$. Применяя, как и при доказательстве предложения 8, к группе $\pi_1(\Gamma_R)$ результаты работ [9] и [12], получаем отсюда, что подгруппа $R\rho_R$ является свободной. Стало быть, группа $\pi_1(\Gamma_R)$ представляет собой расширение свободной группы $R\rho_R$ при помощи группы $\pi_1(\Gamma_R)/R\rho_R \cong \pi_1(\Gamma)/R \in \mathcal{C}$.

Таким образом, какова бы ни была подгруппа $R \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\Gamma))$, построенная по ней группа $\pi_1(\Gamma_R)$ оказывается $\mathcal{C}$-аппроксимируемой относительно сопряженности в силу теоремы 1. Это означает, что для доказательства $\mathcal{C}$-аппроксимируемости относительно сопряженности группы $\pi_1(\Gamma)$ нам достаточно уметь для любых двух несопряженных элементов $u, v \in \pi_1(\Gamma)$ находить такую подгруппу $R \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\Gamma))$, что образы этих элементов относительно определенного выше гомоморфизма ρ_R не являются сопряженными в группе $\pi_1(\Gamma_R)$.

Реализуем данную идею применительно к группе G из теоремы 2.

Пусть сначала данная группа представляет собой свободное произведение $\mathcal{C}$-аппроксимируемых относительно сопряженности групп A и B с конечной объединенной подгруппой H, и пусть $u = u_1u_2\dots u_m$, $v = v_1v_2\dots v_n$ – два циклически несократимых элемента, несопряженных в группе G. Положим

$$\begin{aligned} X = H &\cup \{u_1, u_2, \dots, u_m,\, v_1, v_2, \dots, v_n\} \\ &\cup \{h^{-1}u_iu_{i+1}\dots u_mu_1\dots u_{i-1}h \mid h \in H,\ 1 \leqslant i \leqslant m\} \cup \{v\}. \end{aligned}$$

Поскольку подгруппа H конечна, множество X также является конечным. Поэтому согласно предложению 1, пользуясь $\mathcal{C}$-аппроксимируемостью группы G, мы можем найти подгруппу $R \in \mathcal{C}^*(G)$, удовлетворяющую условию

$$\forall\, x, y \in X \qquad x \neq y \quad \Longrightarrow \quad xR \neq yR.$$

Как было отмечено в п. 3, группа $G\rho_R$ представляет собой свободное произведение своих подгрупп $A\rho_R$ и $B\rho_R$ с объединенной подгруппой $H\rho_R$. Заметим, что если $m > 1$, то для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ $u_i \notin H$. Так как $u_i \in X$ и $H \subseteq X$, то в силу выбора подгруппы R получаем отсюда, что $u_iR \notin HR$. Из включения $\ker\rho_R \leqslant R$ теперь следует, что $u_i\rho_R \notin H\rho_R$. Поэтому элемент $u\rho_R$ по-прежнему будет иметь в группе $G\rho_R$ циклически несократимую запись длины m.

Точно так же элемент $v\rho_R$ имеет в группе $G\rho_R$ циклически несократимую запись длины n. Следовательно, если $m \neq n$, то $u\rho_R$ и $v\rho_R$ не сопряжены в группе $G\rho_R$ и подгруппа R является искомой.

Пусть далее $m=n$. Пользуясь $\mathcal{C}$-аппроксимируемостью групп A и B относительно сопряженности, найдем подгруппы $M \in \mathcal{C}^*(A)$ и $N \in \mathcal{C}^*(B)$, удовлетворяющие условиям

$$\forall\, x,y \in X \cap A \qquad x \nsim_A y \quad \Longrightarrow \quad xM \nsim_{A/M} yM,$$
$$\forall\, x,y \in X \cap B \qquad x \nsim_B y \quad \Longrightarrow \quad xN \nsim_{B/N} yN.$$

Согласно предложению 8 существует подгруппа $T \in \mathcal{C}^*(G)$ такая, что $T \cap A \leqslant M$ и $T \cap B \leqslant N$. Тогда $T \cap R \in \mathcal{C}^*(G)$ и, следовательно, подгруппу R с самого начала можно было выбрать так, чтобы выполнялись соотношения $R \cap A \leqslant M$ и $R \cap B \leqslant N$.

Заметим, что гомоморфизм ρ_R продолжает естественный гомоморфизм группы A на фактор-группу $A/(R \cap A)$ и $R \cap A \leqslant M$. Поэтому для любых двух элементов $x,y \in X \cap A$ из соотношения $x\rho_R \sim_{A\rho_R} y\rho_R$ следует, что $xM \sim_{A/M} yM$ и, в силу выбора подгруппы M, $x \sim_A y$. Аналогичные рассуждения справедливы и для элементов множества $X \cap B$.

Предположим теперь, что элементы $u\rho_R$ и $v\rho_R$ сопряжены в группе $G\rho_R$. Вспоминая, что группа $G\rho_R$ представляет собой свободное произведение своих подгрупп $A\rho_R$ и $B\rho_R$ с объединенной подгруппой $H\rho_R$, и применяя к этой группе теорему о сопряженности для обобщенных свободных произведений (см., например, [14; теорема 4.6]), мы заключаем, что возможны два случая:

1) $m=n=1$, и существуют элементы $h_1, h_2, \dots, h_l \in H$, $l \geqslant 0$, такие, что в последовательности $u\rho_R$, $h_1\rho_R$, $h_2\rho_R$, $\dots$, $h_l\rho_R$, $v\rho_R$ соседние элементы сопряжены в $A\rho_R$ или в $B\rho_R$;
2) $m=n>1$, и для некоторых элемента $h \in H$ и числа $i \in \{1,\dots,m\}$ имеет место равенство
$$v\rho_R = (h\rho_R)^{-1} u_i\rho_R u_{i+1}\rho_R \dots u_m\rho_R u_1\rho_R \dots u_{i-1}\rho_R h\rho_R.$$

Заметим, что $u, h_1, h_2, \dots, h_l, v \in X$. Поэтому в первом случае ввиду отмеченных выше свойств элементов из множеств $X \cap A$ и $X \cap B$ сопряженными в группе G оказываются соседние элементы последовательности u, h_1, h_2, $\dots$, h_l, v, что противоречит несопряженности элементов u и v.

Во втором случае из соотношения $v\rho_R = u^*\rho_R$, где

$$u^* = h^{-1} u_i u_{i+1} \dots u_m u_1 \dots u_{i-1} h,$$

следует, что $v \equiv u^* \pmod R$ и, так как $u^* \in X$, то в силу выбора подгруппы R $v=u^*$. Поскольку элемент u^* сопряжен с u, последнее равенство также противоречит несопряженности элементов u и v.

Таким образом, элементы $u\rho_R$ и $v\rho_R$ не сопряжены в группе $G\rho_R$, и подгруппа R является искомой.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда группа G является HNN-расширением $\mathcal{C}$-аппроксимируемой относительно сопряженности группы A с подгруппами H и K, связанными при помощи изоморфизма φ, и проходной буквой t.

Пусть u и v – два циклически приведенных элемента, несопряженных в группе G, и пусть

$$u = u_1 t^{\delta_1} u_2 t^{\delta_2} \dots u_m t^{\delta_m} u_{m+1}, \qquad v = v_1 t^{\varepsilon_1} v_2 t^{\varepsilon_2} \dots v_n t^{\varepsilon_n} v_{n+1}$$

– их циклически приведенные записи, причем $u_{m+1}=1$, если $m>0$, и $v_{n+1}=1$, если $n>0$. Определим множество X элементов группы G, включив в него все элементы объединения

$$H \cup K \cup \{v, u_1, u_2, \dots, u_{m+1},\ v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\},$$

а также всевозможные элементы вида $w^{-1}u^*w$, где u^* – некоторая циклическая перестановка элемента u, $w \in H \cup K$.

Поскольку подгруппы H и K конечны, множество X также является конечным и ввиду $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы G существует подгруппа $R \in \mathcal{C}^*(G)$, удовлетворяющая условию

$$\forall\, x, y \in X \qquad x \neq y \quad \Longrightarrow \quad xR \neq yR.$$

Согласно общим рассуждениям из п. 3 группа $G\rho_R$ представляет собой HNN-расширение группы $A\rho_R$ со связанными подгруппами $H\rho_R$, $K\rho_R$ и проходной буквой $t\rho_R$. В силу выбора подгруппы R, включения $\ker\rho_R \leqslant R$ и определения множества X из соотношения $u_i \notin H$ $(v_j \notin H)$ следует, что $u_i\rho_R \notin H\rho_R$ (соответственно, $v_j\rho_R \notin H\rho_R$), а из соотношения $u_i \notin K$ $(v_j \notin K)$ – что $u_i\rho_R \notin K\rho_R$ (соответственно, $v_j\rho_R \notin K\rho_R$). Поэтому элементы $u\rho_R$ и $v\rho_R$ имеют в группе $G\rho_R$ циклически приведенные записи длин m и n, соответственно, и, стало быть, если $m \neq n$, то указанные элементы не сопряжены в группе $G\rho_R$ и подгруппа R оказывается искомой.

Далее будем предполагать, что $m = n$. В силу $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы A относительно сопряженности существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(A)$, удовлетворяющая условию

$$\forall\, x, y \in X \cap A \qquad x \nsim_A y \quad \Longrightarrow \quad xN \nsim_{A/N} yN.$$

Ввиду предложения 8 можно считать, что $R \cap A \leqslant N$. Тогда, рассуждая как и в предыдущем случае, мы получаем, что для любых элементов $x, y \in X \cap A$ из соотношения $x\rho_R \sim_{A\rho_R} y\rho_R$ следует, что $x \sim_A y$.

Согласно лемме Коллинза (см., например, [11; гл. IV, теорема 2.5]), если элементы $u\rho_R$ и $v\rho_R$ сопряжены в группе $G\rho_R$, то выполняется одно из следующих утверждений:

1) $m = n = 0$, и существуют элементы $h_1, h_2, \dots, h_l \in H \cup K$, $l \geqslant 0$, такие, что любые два соседних элемента последовательности $u\rho_R$, $h_1\rho_R$, $h_2\rho_R$, $\dots$, $h_l\rho_R$, $v\rho_R$ сопряжены при помощи элемента из множества $A\rho_R \cup \{t\rho_R, (t\rho_R)^{-1}\}$.
2) $m = n > 0$, и $v\rho_R = w^{-1}\rho_R u_R^* w\rho_R$ для подходящих элемента $w \in H \cup K$ и циклической перестановки u_R^* элемента $u\rho_R$.

Очевидно, что элемент u_R^* является образом некоторой циклической перестановки u^* элемента u относительно гомоморфизма ρ_R. Поэтому, если справедливо утверждение 2, то $v\rho_R = (w^{-1}u^*w)\rho_R$, и, так как v, $w^{-1}u^*w \in X$ и $v \neq w^{-1}u^*w$, мы получаем противоречие с выбором подгруппы R.

Пусть выполняется утверждение 1, и пусть $x\rho_R$, $y\rho_R$ – произвольные соседние элементы последовательности. Если $x\rho_R \sim_{A\rho_R} y\rho_R$, то в силу отмеченного выше мы получаем, что $x \sim_A y$. Если же

$$x\rho_R = (t\rho_R)^{-\varepsilon} y\rho_R (t\rho_R)^{\varepsilon} = (t^{-\varepsilon} y t^{\varepsilon})\rho_R$$

для некоторого $\varepsilon = \pm 1$, то $x, y, t^{-\varepsilon} y t^{\varepsilon} \in H \cup K$ и, так как согласно выбору подгруппы R гомоморфизм ρ_R инъективен на множестве X, то $x = t^{-\varepsilon} y t^{\varepsilon}$. Таким образом, в любом случае элементы x и y оказываются сопряженными в группе G, а это влечет за собой и сопряженность элементов u и v, противоречащую их выбору.

Из доказанного следует, что элементы $u\rho_R$ и $v\rho_R$ не сопряжены в группе $G\rho_R$, и потому подгруппа R является искомой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] P. F. Stebe, “A residual property of certain groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **26** (1970), 37–42.

[2] J. L. Dyer, “Separating conjugates in free-by-finite groups”, *J. London Math. Soc.* (2), **20**:2 (1979), 215–221.

[3] Е. А. Иванова, *О нильпотентной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп*, Дис. … канд. физ.-матем. наук, Ивановский гос. ун-т, Иваново, 2004.

[4] Е. А. Иванова, “Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечными p-группами свободных произведений двух групп с объединенной подгруппой”, *Матем. заметки*, **76**:4 (2004), 502–509.

[5] Е. А. Иванова, “Аппроксимируемость относительно сопряженности конечными p-группами свободных произведений двух групп”, *Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”*, 2005, № 3, 83–91.

[6] K. W. Gruenberg, “Residual properties of infinite soluble groups”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **7** (1957), 29–62.

[7] Д. В. Гольцов, Н. И. Яцкин, “Классы групп и подгрупповые топологии”, *Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. “Естественные, общественные науки”*, 2011, № 2, 115–128.

[8] H. Neumann, “Generalized free products with amalgamated subgroups. II”, *Amer. J. Math.*, **31**:3 (1949), 491–540.

[9] A. Karrass, D. Solitar, “Subgroups of HNN groups and groups with one defining relations”, *Canad. J. Math.*, **23** (1971), 627–543.

[10] J. L. Dyer, “Separating conjugates in amalgamated free products and HNN extensions”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **29**:1 (1980), 35–51.

[11] Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп*, Мир, М., 1980.

[12] A. Karrass, D. Solitar, “The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **150** (1970), 227–255.

[13] G. P. Scott, “An embedding theorem for groups with a free subgroups of finite index”, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **6** (1974), 304–306.

[14] В. Магнус, А. Каррасс, Д. Солитер, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, М., 1974.

Е. В. Соколов
Ивановский государственный университет
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

Поступило
22.09.2013