Поскольку группа $U$ является конечно порожденной, подгруппу $T$ без потери общности можно считать характеристической в $U$ и потому — нормальной подгруппой группы $A$. Тогда $S = T\varphi$ — характеристическая подгруппа группы $V$ и нормальная подгруппа группы $B$. Таким образом, подгруппа $T$ удовлетворяет условиям теоремы 2, и аналогично лемме 2 можно утверждать, что в фактор-группе $G/T$ все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы. Поскольку элемент $a$ не входит в подгруппу $PT$, то искомым является естественный гомоморфизм группы $G$ на фактор-группу $G/T$. Теорема 2 доказана.

**Библиографический список**


1. *Молдаванский Д. И., Ускова А. А.* О финитной отделимости подгрупп обобщенных свободных произведений групп // Чебышевский сборник. Тула, 2013. Т. 14, вып. 3 (47). С. 92—98.
2. *Романовский Н. С.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1969. Т. 33, № 6. С. 1324—1329.
3. *Allenby R., Doniz D.* A free product of finitely generated nilpotent groups amalgamating a cycle that is not subgroup separable // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 124, № 4. P. 1003—1005.
4. *Allenby R., Gregorac R.* On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. Vol. 319. P. 9—17.
5. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199—201.
6. *Hall M.* Coset representations in free groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 67. P. 421—432.
7. *Rips E.* An example of a non-LERF group which is a free product of LERF groups with an amalgamated cyclic subgroup // Israel J. Math. 1990. Vol. 70, № 1. P. 104—110.


**УДК 512.543**

***Е. В. Соколов***

# О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА Д. И. МОЛДАВАНСКОГО К ИССЛЕДОВАНИЮ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ HNN-РАСШИРЕНИЙ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ГРУПП

Статья представляет собой расширенную версию доклада, прочитанного автором на Международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора Д. И. Молдаванского (Иваново, 2015). Приводятся общие сведения о корневых классах и аппроксимируемости ими свободных конструкций групп, краткий обзор известных результатов об аппроксимируемости (относительно отношения равенства элементов) не являющихся нисходящими HNN-расширений и описание некоторых новых результатов об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений с центральными связанными подгруппами, в том числе полученных с использованием метода спуска и подъема совместимых подгрупп Д. И. Молдаванского.

***Ключевые слова:*** аппроксимационные свойства, HNN-расширение, корневой класс групп.

This is an expanded version of a paper read by the author at the International scientific conference dedicated to the 75th anniversary of Professor D. I. Moldavanskii (Ivanovo, 2015). The article provides an overview of the root classes and the approximability by them of free constructions of groups, a brief survey of the known results on the approximability (relatively to the relationship of elements equality) of non-ascending HNN-extensions, and a description of some new results on the approximability by root classes of HNN-extensions with central associated subgroups including those obtained using D. I. Moldavanskii's method of the descent and the ascent of compatible subgroups.

***Key words:*** residual properties, HNN-extension, root class of groups.

## 1. Корневые классы групп

Понятие аппроксимируемости группы в самом общем виде может быть сформулировано следующим образом (см., напр.: [14, § 4.4]). Пусть $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп, $X$ — группа и $\rho$ — отношение между элементами и (или) множествами элементов группы $X$, определенное как на самой группе $X$, так и на всех ее гомоморфных образах. Говорят, что группа $X$ *аппроксимируема классом групп* $\mathcal{C}$ (или, короче, $\mathcal{C}$*-аппроксимируема*) *относительно отношения* $\rho$, если для любых элементов и (или) множеств элементов группы $X$, не состоящих в отношении $\rho$, существует гомоморфизм этой группы на некоторую группу из класса $\mathcal{C}$, при котором образы указанных элементов и множеств по-прежнему не состоят в отношении $\rho$. Чаще всего рассматривают аппроксимируемость относительно отношения равенства элементов и упоминание об отношении при этом опускают. Получено также значительное число результатов об аппроксимируемости относительно отношений сопряженности элементов и вхождения элемента в подмножество. Если группа $X$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема относительно принадлежности подмножеству $S$ ее элементов, то говорят, что данное подмножество *отделимо в группе* $X$ *классом групп* $\mathcal{C}$ или же просто $\mathcal{C}$*-отделимо в* $X$.

В течение достаточно длительного времени понятие аппроксимируемости изучалось только применительно к какому-нибудь конкретному классу групп. Чаще всего в качестве такового выступал класс всех конечных групп, аппроксимируемость которым принято называть *финитной*. Со временем, однако, появились работы, в которых на аппроксимирующий класс накладывался лишь определенный набор условий.

Примером указанного набора является понятие корневого класса групп, введенное К. Грюнбергом [46] в 1957 г. Согласно его определению класс групп $\mathcal{C}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений, а также обладает следующим свойством, которое теперь обычно называют условием Грюнберга.

**Условие Грюнберга.** *Для любой группы* $X$ *и для любой субнормальной последовательности* $Z \leqslant Y \leqslant X$ *с факторами из класса* $\mathcal{C}$ *найдется нормальная подгруппа* $T$ *группы* $X$*, лежащая в* $Z$ *и такая, что* $X/T \in \mathcal{C}$.

Ответ на вопрос «Откуда взялось именно такое условие?» звучит очень просто: «Чтобы было легче доказывать». В [46] изучается аппроксимируемость конечными группами и конечными $p$-группами. Нетрудно заметить, что при этом возникает ряд близких по формулировке утверждений, которые доказываются с помощью похожих рассуждений. Именно те свойства, которые позволяют провести аналогичные доказательства для произвольного корневого класса групп, и вынесены в приведенное выше определение.

Таким образом, практическая польза условия Грюнберга понятна, однако оно не позволяет легко разграничить корневые и некорневые классы групп. Известны равносильные определения корневого класса, решающие эту задачу; они будут приведены чуть позже, чтобы не нарушать хронологию событий.

Вторым своим рождением понятие корневого класса обязано Д. Н. Азарову, который заметил, что любая свободная группа аппроксимируется любым нетривиальным корневым классом групп (здесь и далее под нетривиальным будем понимать корневой класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу). Это утверждение, опубликованное в [8], открыло дорогу к изучению аппроксимируемости корневыми классами свободных конструкций групп, и за прошедшие с тех пор 14 лет в данном направлении было получено достаточно много результатов. В частности, непосредственно из замечания Д. Н. Азарова и теоремы 4.1 статьи [46] следует, что свободное произведение произвольного семейства групп, аппроксимируемых некоторым корневым классом, в свою очередь аппроксимируется этим классом [8, теорема 2]. Аппроксимируемость корневыми классами (относительно равенства) обобщенных свободных произведений и HNN-расширений изучалась в работах [7, 8, 29, 31, 32, 34, 35, 39, 55, 57] и [11, 35, 37, 56, 57] соответственно (см. также обзорную статью [10]). Доказаны и первые утверждения об аппроксимируемости корневыми классами относительно сопряженности [28], об отделимости корневыми классами циклических подгрупп [26], о почти аппроксимируемости корневыми классами [4, 9] (группа называется *почти аппроксимируемой классом* $\mathcal{C}$ *относительно отношения* $\rho$, если она содержит подгруппу конечного индекса, аппроксимируемую этим классом относительно $\rho$).

Перейдем теперь к рассмотрению упомянутых ранее равносильных определений корневого класса. Прежде всего заметим, что свойство замкнутости относительно взятия прямых произведений следует из условия Грюнберга, поэтому из определения его можно исключить. Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.1** [55]. *Пусть класс групп* $\mathcal{C}$ *замкнут относительно взятия подгрупп. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Класс* $\mathcal{C}$ *удовлетворяет условию Грюнберга (и, следовательно, является корневым).*

2. *Класс* $\mathcal{C}$ *замкнут относительно взятия декартовых сплетений.*

3. *Класс* $\mathcal{C}$ *замкнут относительно взятия расширений и для любых двух групп* $X$, $Y \in \mathcal{C}$ *содержит декартово произведение* $\prod_{y\in Y} X_y$, *где* $X_y$ *— изоморфная копия группы* $X$ *для каждого* $y \in Y$.

Частным случаем приведенной теоремы является полученное ранее в [12] описание корневых классов групп, состоящих только из конечных групп: это — в точности классы, замкнутые относительно взятия подгрупп и расширений. Кроме того, из теоремы 1.1 легко следует, что пересечение корневых классов снова оказывается корневым классом [55, следствие 2].

Таким образом, корневыми являются, например, классы всех конечных групп, периодических $\pi$-групп (т. е. периодических групп, все простые делители порядков элементов которых принадлежат фиксированному непустому множеству простых чисел $\pi$), разрешимых групп, всех групп без кручения и всевозможные их пересечения. Что же касается нильпотентных групп, аппроксимируемость которыми тоже часто рассматривается, они составляют незамкнутый относительно расширений и, следовательно, некорневой класс групп.

Почему имеет смысл изучать аппроксимируемость корневыми классами? Во-первых, это — возможность получить больше результатов почти теми же усилиями, что и при исследовании аппроксимируемости каким-нибудь одним конкретным классом групп (ср., напр.: [3] и [4], [5] и [9], [33] и [37], [36] и [39], [44] и [28]). Во-вторых, при доказательстве аппроксимируемости конкретным классом групп естественно возникает желание использовать специфические свойства групп этого класса. Например, для конечных $p$-групп это — нильпотентность, наличие главного ряда с циклическими факторами, некоторые теоретико-числовые соотношения и т. д. В результате полученное рассуждение часто оказывается узкоспециальным и неприменимым где-либо еще. Доказательство же аппроксимируемости произвольным корневым классом групп вынуждает пользоваться лишь ограниченным набором свойств данного класса, и это делает аргументацию более пригодной для последующих обобщений и усилений, да и просто более понятной (ср., напр.: [30] и [11]).

## 2. HNN-расширения и изучение их аппроксимируемости

Обратимся теперь к рассмотрению конструкции HNN-расширения групп. Все введенные в данном параграфе обозначения предполагаются фиксированными до конца изложения.

Хорошо известно, что если в некоторой группе $G$ заданы две изоморфные подгруппы $H$, $K$ и изоморфизм $\varphi$ между ними, то определено *HNN-расширение* $G^*$ группы $G$. Это — группа, образующими которой являются все образующие группы $G$ и буква $t$, а определяющими соотношениями — определяющие соотношения группы $G$ и все соотношения вида $t^{-1}ht = h\varphi$, где $h$ и $h\varphi$ — слова от порождающих группы $G$, задающие элемент из подгруппы $H$ и его образ относительно изоморфизма $\varphi$. Из теоремы о нормальной форме элемента HNN-расширения (см., напр.: [16, гл. IV, теорема 2.1]) следует, что тождественное отображение порождающих группы $G$ в группу $G^*$ определяет инъективный гомоморфизм и потому группу $G$ можно считать подгруппой HNN-расширения $G^*$. Представление группы $G^*$ принято для краткости записывать в виде

$$\langle G, t; t^{-1}ht = h\varphi, h \in H\rangle \quad \text{или} \quad \langle G, t; t^{-1}Ht = K, \varphi\rangle.$$

Легко видеть, что если в качестве обеих связанных подгрупп $H$ и $K$ взять группу $G$, то HNN-расширение $G^*$ превратится в обычное расщепляемое расширение группы $G$ при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом $t$. Если же с группой $G$ совпадает только одна из подгрупп $H$ и $K$, то HNN-расширение называется *нисходящим* (*descending*) или, в зарубежной терминологии, *восходящим* (*ascending*). Надо заметить, что, хотя нисходящее HNN-расширение формально представляет собой частный случай общего определения, этого нередко нельзя сказать о получающихся для него результатах. Поэтому такое HNN-расширение вполне можно рассматривать как самостоятельную конструкцию. Здесь же речь будет идти только об HNN-расширениях, не являющихся нисходящими.

Стоит отметить, что определенную роль в возникновении понятия HNN-расширения сыграла статья Д. И. Молдаванского [18], в которой было доказано, что если в группе с одним определяющим соотношением некоторый порождающий входит в данное соотношение с нулевой суммой показателей степеней, то эта группа оказывается (в современной терминологии) HNN-расширением некоторой другой группы, также имеющей одно определяющее соотношение.

Как обычно, подгруппу $N$ группы $G$ будем называть $(H, K, \varphi)$-*совместимой*, если

$$(N \cap H)\varphi = N \cap K.$$

Легко видеть, что если $\sigma$ — некоторый гомоморфизм HNN-расширения $G^*$, то пересечение его ядра с группой $G$ является нормальной $(H, K, \varphi)$-совместимой подгруппой данной группы. Если при этом образ $G^*$ относительно $\sigma$ принадлежит некоторому классу групп $\mathcal{C}$, замкнутому относительно взятия подгрупп, то в силу соотношений

$$G/(\ker\sigma \cap G) \cong (G \cdot \ker\sigma)/\ker\sigma \leqslant G^*/\ker\sigma \cong G^*\sigma$$

фактор-группа $G/(\ker\sigma \cap G)$ также содержится в $\mathcal{C}$.

Отсюда следует, что если HNN-расширение $G^*$ аппроксимируется классом $\mathcal{C}$, то группа $G$ должна обладать достаточно представительным семейством нормальных $(H, K, \varphi)$-совместимых подгрупп, фактор-группы по которым принадлежат $\mathcal{C}$. Более точно, для каждого неединичного элемента группы $G$ должна существовать не содержащая его подгруппа данного семейства. Обратное утверждение в общем случае неверно, однако первым шагом в направлении доказательства $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $G^*$, как правило, является именно умение строить совместимые подгруппы указанного вида.

Стоит отметить, что при изучении аппроксимируемости обобщенных свободных произведений возникает похожая задача, но в каждом свободном множителе нужно найти подгруппу, которая имеет заданное пересечение только с одной фиксированной подгруппой, а не сразу с двумя, как в HNN-расширениях. Понятно, что это сделать легче, поэтому и утверждений об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений значительно больше.

Рассмотрим теперь вкратце полученные зарубежными авторами результаты об аппроксимируемости HNN-расширений относительно равенства. Основополагающей работой в данной области является статья [42], в которой, во-первых, доказана финитная аппроксимируемость HNN-расширения конечной группы (одновременно это было сделано также в [43]) и, во-вторых, получено общее достаточное условие финитной аппроксимируемости произвольного HNN-расширения, являющееся аналогом хорошо известной фильтрационной теоремы Г. Баумслага [41] для обобщенных свободных произведений и формулируемое следующим образом.

**Теорема 2.1.** *Если $\Omega$ — семейство всех нормальных $(H, K, \varphi)$-совместимых подгрупп конечного индекса группы $G$ и выполняются соотношения*

$$\bigcap_{N \in \Omega} N = 1, \quad \bigcap_{N \in \Omega} HN = H \quad \text{и} \quad \bigcap_{N \in \Omega} KN = K,$$

*то группа $G^*$ финитно аппроксимируема.*

В [54] указаны некоторые ситуации, в которых данное достаточное условие становится необходимым:

— подгруппы $H$ и $K$ совпадают и изоморфизм $\varphi$, являющийся в данном случае автоморфизмом подгруппы $H$, имеет конечный порядок;

— подгруппы $H$ и $K$ совпадают и удовлетворяют нетривиальному тождеству;

— подгруппы $H$ и $K$ собственным образом содержатся в подгруппе $X \leqslant G$, удовлетворяющей нетривиальному тождеству.

Тем не менее проверка фильтрационного условия для конкретной группы может оказаться весьма нетривиальной задачей, поэтому имеют смысл дальнейшие исследования, позволяющие в частных случаях получить более удобные в применении утверждения.

Значительный вклад в изучение аппроксимационных свойств HNN-расширений внесли греческие математики, в первую очередь Е. Раптис и Д. Варсос. Они получили, в частности:

— критерий финитной аппроксимируемости HNN-расширения конечно порожденной нильпотентной группы [52, теорема 5*];

— критерий нильпотентной аппроксимируемости HNN-расширения $G^*$ в случае, когда группа $G$ конечна или является конечно порожденной абелевой [51, теоремы 4 и 11];

— критерий аппроксимируемости конечными $p$-группами HNN-расширения конечной группы [51, теорема 13];

— утверждение об аппроксимируемости разрешимыми группами произвольного HNN-расширения конечно порожденной абелевой группы [50, теорема 1.1].

Еще один критерий аппроксимируемости конечными $p$-группами HNN-расширения конечной группы доказан в [40].

В остальных работах зарубежных авторов изучалась, в основном, финитная аппроксимируемость HNN-расширений с бесконечными циклическими связанными подгруппами. Почти во всех из них применяется понятие регулярности группы по подмножеству ее элементов, введенное в [49] следующим образом.

Пусть $X$ — некоторая группа и $S$ — подмножество ее элементов, каждый из которых имеет бесконечный порядок. Говорят, что группа $X$ *регулярна по подмножеству* $S$, если существует целое положительное число $r$ такое, что для любого целого положительного числа $s$ найдется гомоморфизм группы $X$ на конечную группу, переводящий каждый элемент из $S$ в элемент порядка $rs$.

Приведенное ниже утверждение служит заменой теоремы 2.1 в случае бесконечных циклических связанных подгрупп.

**Теорема 2.2** [53, теорема 1]. *Пусть подгруппы $H$ и $K$ являются бесконечными циклическими и порождаются элементами $h$ и $k$ соответ-*

*ственно. Если группа $G$ регулярна по подмножеству $\{h, k\}$ и подгруппы $H$ и $K$ финитно отделимы в $G$, то HNN-расширение $G^*$ финитно аппроксимируемо.*

Из результатов работы [45] следует, что свободные, парасвободные, нильпотентные без кручения и полициклические группы регулярны по любому подмножеству вида $\{x, x\alpha\}$, где $x$ — элемент бесконечного порядка и $\alpha$ — произвольный автоморфизм группы. Отсюда вытекает

**Следствие 2.3** [53, следствие]. *Пусть $G$ — свободная, парасвободная, нильпотентная без кручения или полициклическая группа; $H$ и $K$ — бесконечные циклические подгруппы; изоморфизм $\varphi$ совпадает с ограничением на подгруппу $H$ некоторого автоморфизма группы $G$. Тогда HNN-расширение $G^*$ финитно аппроксимируемо.*

Еще одно условие, более слабое, чем регулярность, введено в [47]. Говорят, что группа $X$ *квазирегулярна по подмножеству $S$ элементов бесконечного порядка*, если для любого целого положительного числа $r$ существуют целое положительное число $s$ и гомоморфизм группы $X$ на конечную группу, переводящий каждый элемент из $S$ в элемент порядка $rs$. Имеет место

**Теорема 2.4** [47, теорема 2.9]. *Пусть подгруппы $H$ и $K$ являются бесконечными циклическими и порождаются элементами $h$ и $k$ соответственно. Пусть также все циклические подгруппы группы $G$ финитно отделимы. HNN-расширение $G^*$ финитно аппроксимируемо тогда и только тогда, когда группа $G$ квазирегулярна по подмножеству $\{h, k\}$.*

В той же статье [47] приводится ряд достаточных условий квазирегулярности конечно порожденной нильпотентной группы по подмножеству, состоящему из двух элементов бесконечного порядка. При этом вопрос о полном описании таких подмножеств указанной группы остается открытым.

По-видимому, последней на момент составления данного обзора зарубежной работой, в которой исследуется аппроксимируемость HNN-расширений, является [58]. Основной ее результат выглядит следующим образом.

**Теорема 2.5** [58, теорема 3.4]. *Пусть $H$ и $K$ — нормальные в группе $G$ бесконечные циклические подгруппы. Пусть также группа $G$ не является циклической и все ее конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. HNN-расширение $G^*$ финитно аппроксимируемо тогда и только тогда, когда $H \cap K = 1$ или $H^n = K^n$ для некоторого целого положительного числа $n$.*

## 3. Результаты об аппроксимируемости HNN-расширений, полученные Д. И. Молдаванским и его учениками

В параграфе 1 уже были перечислены работы ивановских математиков, в которых исследовалась аппроксимируемость HNN-расширений корневыми классами. Наиболее ранней среди них является статья Д. Тьеджо [56], в прошлом аспиранта Д. И. Молдаванского, а в настоящее время — профессора университета Нгаоундере (Камерун), в которой предпринято первое исследование аппроксимируемости HNN-расширений произвольным корневым классом групп. В ней установлено, что HNN-расширение $G^*$ аппроксимируется корневым классом $\mathcal{C}$, если этим классом аппроксимируется группа $G$ и существует гомоморфизм группы $G^*$ на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на подгруппах $H$ и $K$ (все рассматриваемые в настоящем параграфе корневые классы предполагаются нетривиальными). Также в данной статье доказан критерий аппроксимируемости HNN-расширения $G^*$ произвольным корневым классом в случае, когда $H = K$ и изоморфизм $\varphi$ представляет собой тождественное отображение. Эти результаты являются аналогами теорем 3 и 4 из [8], в которых рассматривалась аппроксимируемость корневыми классами обобщенных свободных произведений. В [57] описанные выше утверждения распространены на случай HNN-расширения с произвольным семейством проходных букв.

В работах Е. А. Тумановой [35, 37] исследуется аппроксимируемость корневым классом $\mathcal{C}$ HNN-расширения $G^*$ при условии, что $H = K$, но изоморфизм $\varphi$ уже необязательно является тождественным. В случае, когда $G \in \mathcal{C}$ и подгруппа $H$ нормальна в группе $G$, получено достаточное условие $\mathcal{C}$-аппроксимируемости HNN-расширения $G^*$, которое становится и необходимым, если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно факторизации (т. е. взятия гомоморфных образов). Также установлены критерии $\mathcal{C}$-аппроксимируемости HNN-расширения $G^*$ при условии, что класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно факторизации, группа $G$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, а подгруппа $H$ нормальна в группе $G$ и удовлетворяет хотя бы одному из следующих ограничений:

— группа $\mathrm{Aut}_{G^*}(H)$ всех автоморфизмов подгруппы $H$, представляющих собой ограничения на эту подгруппу всевозможных внутренних автоморфизмов HNN-расширения $G^*$, является абелевой;

— группа $\mathrm{Aut}_{G^*}(H)$ конечна;

— автоморфизм $\varphi$ совпадает с ограничением на подгруппу $H$ некоторого внутреннего автоморфизма группы $G$;

— подгруппа $H$ конечна;

— подгруппа $H$ является бесконечной циклической;

— подгруппа $H$ имеет конечный ранг Гирша — Зайцева (т. е. обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого — либо периодическая, либо бесконечная циклическая группа).

Кроме того, найдено достаточное условие $\mathcal{C}$-аппроксимируемости HNN-расширения $G^*$ в случае, когда группа $G$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, а подгруппа $H$ представляет собой ее ретракт (здесь класс $\mathcal{C}$ не обязан быть замкнутым относительно факторизации).

Последней на момент написания данного обзора опубликованной работой об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений является статья Д. В. Гольцова [11]. В ней установлена аппроксимируемость HNN-расширения $G^*$ замкнутым относительно факторизации корневым классом $\mathcal{C}$ при условии, что подгруппы $H$ и $K$ лежат в центре группы $G$ и имеют тривиальное пересечение, а также справедливо хотя бы одно из следующих утверждений:

— группа $G$ принадлежит классу $\mathcal{C}$;

— группа $G$ аппроксимируется классом $\mathcal{C}$, подгруппы $H$ и $K$ конечны.

В [15] доказаны общие достаточные условия аппроксимируемости HNN-расширения $G^*$ классом групп, удовлетворяющим несколько более слабым ограничениям, чем корневой класс. Указанные ограничения выполняются, например, для класса полисвободных групп (т. е. групп, обладающих конечным субнормальным рядом со свободными факторами), который, как установлено в [13], не является корневым.

В недавних работах [1] и [25] получен ряд утверждений об аппроксимируемости HNN-расширений тем или иным конкретным классом групп. Д. Н. Азаровым [1] (см. также: [2]) найден критерий финитной аппроксимируемости HNN-расширения $G^*$ при условии, что подгруппы $H$ и $K$ имеют в группе $G$ конечные индексы, а сама эта группа удовлетворяет нетривиальному тождеству и обладает конечным общим рангом (последнее означает существование целого положительного числа $r$ такого, что любое конечное подмножество элементов группы $G$ содержится в некоторой ее $r$-порожденной подгруппе). В [25] доказано следующее необходимое условие нильпотентной аппроксимируемости HNN-расширений: если группа $G$ нильпотентна и $H \cup K \neq G$, то из аппроксимируемости HNN-расширения $G^*$ нильпотентными группами следует, что для некоторого простого числа $p$ подгруппы $H$ и $K$ $p'$-изолированы в группе $G$. Это утверждение является частичным аналогом основного результата работы [6] о нильпотентной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений. В связи с его формулировкой следует напомнить, что подгруппа $Y$ группы $X$ называется $\pi'$-*изолированной* в этой группе для некоторого множества простых чисел $\pi$, если для любого элемента $x \in X$ и для любого простого числа $q \in \pi'$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$. Здесь, как обычно, $\pi'$ обозначает дополнение множества $\pi$ во множестве всех простых чисел, что же касается символа $p'$, использованного выше, — он употребляется для краткости вместо $\{p\}'$.

Значительное число результатов об аппроксимируемости различными конкретными классами групп получено также для групп Баумслага — Солитэра, представляющих собой всевозможные (в том числе нисходящие) HNN-расширения бесконечной циклической группы; см. по этому поводу обзорные статьи [24, 48]. Критерий аппроксимируемости групп Баумслага — Солитэра произвольным замкнутым относительно факторизации корневым классом групп анонсирован в [38].

Остановимся теперь более подробно на описании результатов, полученных непосредственно Д. И. Молдаванским. В [19] им были доказаны критерий аппроксимируемости конечными $p$-группами HNN-расширения конечной группы, отличный от упоминавшегося ранее критерия Е. Раптиса и Д. Варсоса, и достаточное условие аппроксимируемости конечными $p$-группами произвольного HNN-расширения, аналогичное теореме 2.1. С помощью второго результата были получены критерии аппроксимируемости конечными $p$-группами некоторых групп с одним определяющим соотношением [19] и HNN-расширения конечно порожденной нильпотентной группы с конечными связанными подгруппами [23], а также HNN-расширения с центральными связанными подгруппами. Последнюю конструкцию и относящиеся к ней утверждения рассмотрим более подробно.

В [20, 21] (см. также: [22]) Д. И. Молдаванским была предложена следующая идея исследования аппроксимируемости HNN-расширений соответственно конечными группами и конечными $p$-группами.

Положим $K_0 = G$, $H_1 = H$, $K_1 = K$ и, если подгруппы $H_i$ и $K_i$ уже определены, то $H_{i+1} = H_i \cap K_i$, $K_{i+1} = H_{i+1}\varphi$. Тогда для любого $i \geqslant 0$

подгруппы $H_{i+1}$ и $K_{i+1}$ содержатся в $K_i$, и потому можно построить HNN-расширение

$$K_i^* = \langle K_i, t;\ t^{-1}H_{i+1}t = K_{i+1},\ \varphi\rangle$$

группы $K_i$ с подгруппами $H_{i+1}$ и $K_{i+1}$, связанными при помощи ограничения изоморфизма $\varphi$ на подгруппу $H_{i+1}$ (здесь это ограничение обозначено тем же символом $\varphi$). Д. И. Молдаванскому удалось показать, что если подгруппы $H$ и $K$ лежат в центре группы $G$, то для любого $i$ семейства совместимых подгрупп HNN-расширений $K_i^*$ и $K_{i+1}^*$ обладают некоторыми одинаковыми свойствами, и потому аппроксимируемость этих HNN-расширений имеет место одновременно. Способ, с помощью которого это было доказано, он назвал *методом спуска и подъема совместимых подгрупп*, так как совместимая подгруппа группы $K_{i+1}$ строится по совместимой подгруппе группы $K_i$, и наоборот.

Данный метод позволяет получить новый результат об аппроксимируемости группы $G^*$, если для некоторого $n$ имеет место равенство $H_n = K_n$. В этом случае HNN-расширение $K_n^*$ оказывается обычным расширением группы $K_n$ при помощи бесконечной циклической группы, и, таким образом, вопрос об аппроксимируемости исходного HNN-расширения сводится к решению, вообще говоря, более простой задачи об аппроксимируемости некоторого расщепляемого расширения. Основные утверждения, доказанные Д. И. Молдаванским, выглядят следующим образом.

**Теорема 3.1** [20]. *Пусть $H$ и $K$ — собственные конечно порожденные центральные подгруппы группы $G$ и пусть все подгруппы, лежащие в подгруппе $HK$ и имеющие в ней конечный индекс, финитно отделимы в группе $G$. Группа $G^*$ является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда для некоторого $n \geqslant 1$ имеет место равенство $H_n = K_n$.*

**Теорема 3.2** [21]. *Пусть $H$ и $K$ — собственные конечно порожденные центральные подгруппы группы $G$, группа $G$ аппроксимируется конечными $p$-группами и все ее центральные $p'$-изолированные подгруппы отделимы в классе конечных $p$-групп. Группа $G^*$ аппроксимируется конечными $p$-группами тогда и только тогда, когда*

(1) *подгруппы $H$ и $K$ $p'$-изолированы в группе $G$;*

(2) *для некоторого $n \geqslant 1$ имеет место равенство $H_n = K_n$ (и потому ограничение изоморфизма $\varphi$ на подгруппу $H_n$ оказывается ее автоморфизмом);*

(3) *пересечение всех $\varphi$-инвариантных подгрупп $N$ конечного $p$-индекса группы $H_n$ таких, что порядок автоморфизма $\varphi_N$ фактор-группы $H_n/N$, индуцированного отображением $\varphi$, является степенью числа $p$, тривиально.*

Следует обратить внимание на то, что согласно формулировкам теорем 3.1 и 3.2 подгруппы $H$ и $K$ содержатся в группе $G$ собственным образом, т. е. здесь рассматриваются только HNN-расширения, не являющиеся нисходящими. При этом равенство $H_n$ и $K_n$ для некоторого $n$ оказывается необходимым условием аппроксимируемости группы $G^*$, так что специально накладывать данное ограничение не нужно. Зато приходится требовать отделимости некоторых подгрупп: она необходима для возможности подъема совместимых подгрупп. Пункт 3 в формулировке теоремы 3.2 — это не что иное, как необходимое и достаточное условие аппроксимируемости конечными $p$-группами обычного расширения группы $H_n$ при помощи автоморфизма, которым в силу п. 2 является ограничение на указанную группу изоморфизма $\varphi$.

## 4. Новые результаты

Теперь перейдем к описанию некоторых новых результатов, которые нам удалось получить в данной области. Оказалось, что метод спуска и подъема совместимых подгрупп можно применить к изучению аппроксимируемости любым замкнутым относительно факторизации корневым классом групп. Основная техническая сложность при этом заключалась как раз в замене очень специфического рассуждения, использовавшегося в случае конечных $p$-групп.

Всюду далее будем предполагать, что $\mathcal{C}$ — нетривиальный замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, $G$ — $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа, $H$ и $K$ — собственные центральные подгруппы группы $G$. Если класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп, то через $\pi(\mathcal{C})$ будем также обозначать множество всех простых делителей порядков элементов всевозможных $\mathcal{C}$-групп. Одним из утверждений, доказанных с помощью обобщения метода спуска и подъема совместимых подгрупп, является

**Теорема 4.1.** *Пусть класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп и для некоторого $n$ имеет место равенство $H_n = H_{n+1}$. Пусть также существует нормальная подгруппа $Q$ группы $G$, удовлетворяющая соотношению $G/Q \in \mathcal{C}$ и хотя бы одному из следующих двух условий:*

($\alpha$) *подгруппа $Q$ содержится в $H \cap K$ и является $\varphi$-инвариантной;*

($\beta$) *$H \cap Q = 1 = K \cap Q$.*

*HNN-расширение $G^*$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемо тогда и только тогда, когда*

(1) *$H_n = K_n$ (и потому ограничение изоморфизма $\varphi$ на подгруппу $H_n$ является автоморфизмом этой подгруппы);*

(2) *подгруппа $E$ группы $G^*$, порожденная подгруппой $H_n$ и элементом $t$, $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Легко видеть, что подгруппа $E$ из п. 2 теоремы 4.1 в действительности представляет собой расщепляемое расширение подгруппы $H_n$ при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом $t$. В формулировку теоремы намеренно не включен критерий ее $\mathcal{C}$-аппроксимируемости, поскольку этот вопрос заслуживает отдельного рассмотрения. Два таких критерия будут приведены ниже. Заметим также, что если подгруппа $Q$ имеет конечный индекс в $G$ (а это верно, например, если класс $\mathcal{C}$ состоит только из конечных групп), то каждое из условий $\alpha$, $\beta$ влечет равенство $H_n = H_{n+1}$ для некоторого $n$.

Основными приложениями теоремы 4.1 служат два следствия, сформулированные ниже, в первом из которых связанные подгруппы конечны, а во втором имеют конечные индексы в группе $G$. Отметим, что конечности индексов подгрупп $H$ и $K$, вообще говоря, недостаточно для обрыва убывающей цепочки подгрупп $H_i$, поэтому в формулировке следствия 4.3 данное условие присутствует явным образом.

**Следствие 4.2.** *Пусть класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп, подгруппы $H$ и $K$ конечны. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для некоторого $n$ имеет место равенство $H_n = K_n$, и потому ограничение $\varphi'$ изоморфизма $\varphi$ на подгруппу $H_n$ является ее автоморфизмом конечного порядка.*

2. *HNN-расширение $G^*$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемо в том и только том случае, когда все простые делители порядка автоморфизма $\varphi'$ содержатся во множестве $\pi(\mathcal{C})$.*

**Следствие 4.3.** *Пусть класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп, подгруппы $H$ и $K$ имеют конечные индексы в группе $G$ и для некоторого $n$ справедливо равенство $H_n = H_{n+1}$. HNN-расширение $G^*$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемо тогда и только тогда, когда*

(1) *$G/H \in \mathcal{C}$ и $G/K \in \mathcal{C}$;*

(2) *$H_n = K_n$;*

(3) *подгруппа $E$ группы $G^*$, порожденная подгруппой $H_n$ и элементом $t$, $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Пусть $\pi$ — некоторое множество простых чисел. Легко видеть, что пересечение произвольного числа $\pi'$-изолированных подгрупп заданной группы снова является $\pi'$-изолированной подгруппой этой группы. Поэтому для любой группы $X$ и для любой ее подгруппы $Y$ определена наименьшая $\pi'$-изолированная подгруппа группы $X$, содержащая $Y$. Эта подгруппа называется $\pi'$-*изолятором* подгруппы $Y$ в группе $X$ и далее будет обозначаться через $\mathcal{I}_{\pi'}(X, Y)$.

Следуя [27], абелеву группу будем называть $\pi$-*ограниченной*, если в произвольной ее фактор-группе все примарные компоненты, соответствующие числам из множества $\pi$, конечны. Нильпотентную (разрешимую) группу назовем $\pi$-*ограниченной*, если она обладает конечным центральным (соответственно субнормальным) рядом с абелевыми $\pi$-ограниченными факторами. Легко видеть, что конечно порожденные нильпотентные и полициклические группы являются соответственно $\pi$-ограниченными нильпотентными и $\pi$-ограниченными разрешимыми для любого непустого множества простых чисел $\pi$. Отметим также, что если $\pi$ содержит все простые числа, то $\pi$-ограниченная разрешимая группа оказывается ограниченной разрешимой в смысле А. И. Мальцева [17].

В [27] показано, что любой субнормальный ряд $\pi$-ограниченной разрешимой группы имеет $\pi$-ограниченные абелевы факторы. В частности, если $\pi$-ограниченная разрешимая группа абелева, то она является $\pi$-ограниченной абелевой, а если нильпотентна, то $\pi$-ограниченной нильпотентной. Таким образом, об абелевой группе можно говорить, что она $\pi$-ограничена, не уточняя, какой именно класс $\pi$-ограниченных групп (абелевых, нильпотентных или разрешимых) имеется в виду.

Еще одним результатом, полученным с помощью метода спуска и подъема совместимых подгрупп, является следующая теорема, представляющая собой обобщение теорем 3.1 и 3.2 Д. И. Молдаванского.

**Теорема 4.4.** *Пусть класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп и выполняется хотя бы одно из следующих трех условий:*

($\alpha$) *подгруппы $H$ и $K$ конечно порождены;*

($\beta$) *множество $\pi(\mathcal{C})$ конечно и подгруппы $H$ и $K$ $\pi(\mathcal{C})$-ограничены;*

($\gamma$) *класс $\mathcal{C}$ состоит из конечных групп, подгруппы $H$ и $K$ $\pi(\mathcal{C})$-ограничены и $\pi_1(\mathcal{C})'$-изолированы в группе $G$ для некоторого конечного подмножества $\pi_1(\mathcal{C})$ множества $\pi(\mathcal{C})$.*

*Пусть также для любого $i \geqslant 0$ и для любой подгруппы $N \leqslant H_{i+1}K_{i+1}$ такой, что $(H_{i+1}K_{i+1})/N \in \mathcal{C}$, подгруппа $\mathcal{I}_{\pi(\mathcal{C})'}(K_i, N)$ $\mathcal{C}$-отделима в группе $K_i$. HNN-расширение $G^*$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемо тогда и только тогда, когда*

(1) *$H_n = K_n$ для некоторого $n$;*

(2) *подгруппа $E$ группы $G^*$, порожденная подгруппой $H_n$ и элементом $t$, $\mathcal{C}$-аппроксимируема;*

(3) *подгруппы $H$ и $K$ $\pi(\mathcal{C})'$-изолированы в группе $G$.*

Конкретные примеры применения данной теоремы содержатся в следствиях 4.5 и 4.6. В первом из них группа $G$ представляет собой расширение ограниченной разрешимой в смысле А. И. Мальцева группы, но класс $\mathcal{C}$ таков, что множество $\pi(\mathcal{C})$ содержит все простые числа (например, это может быть класс всех конечных разрешимых групп). Во втором следствии данного ограничения на класс $\mathcal{C}$ нет, но группа $G$ должна быть расширением $\pi(\mathcal{C})$-ограниченной нильпотентной группы.

**Следствие 4.5.** *Пусть класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп и множество $\pi(\mathcal{C})$ содержит все простые числа. Пусть также $G$ — расширение ограниченной разрешимой группы при помощи $\mathcal{C}$-группы и выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:*

($\alpha$) *подгруппы $H$ и $K$ конечно порождены;*

($\beta$) *класс $\mathcal{C}$ состоит из конечных групп, подгруппы $H$ и $K$ $\pi'$-изолированы в группе $G$ для некоторого конечного множества $\pi$ простых чисел.*

*HNN-расширение $G^*$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемо тогда и только тогда, когда $H_n = K_n$ для некоторого $n$.*

**Следствие 4.6.** *Пусть класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп. Пусть также $G$ — расширение $\pi(\mathcal{C})$-ограниченной нильпотентной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы и выполняется хотя бы одно из следующих трех условий:*

($\alpha$) *подгруппы $H$ и $K$ конечно порождены;*

($\beta$) *множество $\pi(\mathcal{C})$ конечно и подгруппы $H$ и $K$ $\pi(\mathcal{C})$-ограничены;*

($\gamma$) *класс $\mathcal{C}$ состоит из конечных групп, подгруппы $H$ и $K$ $\pi_1(\mathcal{C})'$-изолированы в группе $G$ для некоторого конечного подмножества $\pi_1(\mathcal{C})$ множества $\pi(\mathcal{C})$.*

*HNN-расширение $G^*$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемо тогда и только тогда, когда*

(1) *$H_n = K_n$ для некоторого $n$;*

(2) *подгруппа $E$ группы $G^*$, порожденная подгруппой $H_n$ и элементом $t$, $\mathcal{C}$-аппроксимируема;*

(3) *подгруппы $\{1\}$, $H$ и $K$ $\pi(\mathcal{C})'$-изолированы в группе $G$.*

Далее приводятся два утверждения, представляющие собой упоминавшиеся выше критерии аппроксимируемости подгруппы $E$ группы $G^*$, порожденной подгруппой $H_n$ и элементом $t$, в предположении, что справедливо равенство $H_n = K_n$ и класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп. Первый из них — это обобщение критерия аппроксимируемости конечными $p$-группами из формулировки теоремы 3.1, второй — его частный случай, который получается, если ограничение изоморфизма $\varphi$ на подгруппу $H_n$ имеет конечный порядок.

**Предложение 4.7.** *Группа $E$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда тривиальным является пересечение всех $\varphi$-инвариантных подгрупп $N$ группы $H_n$, удовлетворяющих следующим условиям:*

(1) *$H_n/N \in \mathcal{C}$;*

(2) *порядок автоморфизма $\varphi_N$ группы $H_n/N$, индуцированного изоморфизмом $\varphi$, конечен и все его простые делители содержатся во множестве $\pi(\mathcal{C})$.*

**Предложение 4.8.** *Если порядок $q$ ограничения изоморфизма $\varphi$ на подгруппу $H_n$ конечен, то группа $E$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $H_n$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема и все простые делители числа $q$ содержатся во множестве $\pi(\mathcal{C})$.*

Во всех описанных к настоящему моменту новых результатах предполагалось, что класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп. Метод спуска и подъема применяется и в случае, когда данное условие не выполняется. Однако утверждения, которые при этом нам удалось получить, можно доказать с помощью более простых прямых рассуждений. Примерами результатов такого рода являются две теоремы, приводимые ниже.

**Теорема 4.9.** *Пусть класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу. Тогда следующие утверждения равносильны и при выполнении любого из них HNN-расширение $G^*$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемо.*

1. *Существует гомоморфизм группы $G$ на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на подгруппах $H$ и $K$.*

2. *Существует гомоморфизм группы $G^*$ на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на подгруппах $H$ и $K$.*

**Теорема 4.10.** *Пусть класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу.*

1. *Если существует подгруппа $Q$, содержащаяся в $H \cap K$, являющаяся $\varphi$-инвариантной и такая, что $G/Q \in \mathcal{C}$, то HNN-расширение $G^*$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемо.*

2. *Если подгруппы $H$ и $K$ имеют в группе $G$ конечные индексы, то верно и обратное: из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости HNN-расширения $G^*$ следует существование подгруппы $Q$, содержащейся в $H \cap K$, являющейся $\varphi$-инвариантной и такой, что $G/Q \in \mathcal{C}$.*

Необходимо отметить, что теорема 4.9 и первое утверждение теоремы 4.10 справедливы и без предположения о том, что подгруппы $H$ и $K$ содержатся в группе $G$ собственным образом. Поэтому из теоремы 4.9 вытекает сформулированное ниже утверждение, обобщающее упоминавшийся в параграфе 2 результат Е. Раптиса и Д. Варсоса [50] об аппроксимируемости разрешимыми группами HNN-расширения конечно порожденной абелевой группы.

**Следствие 4.11.** *Произвольное HNN-расширение разрешимой группы с центральными связанными подгруппами аппроксимируется разрешимыми группами.*

Из теорем 4.1 и 4.9 вытекает также

**Следствие 4.12.** *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный нетривиальный корневой класс групп, замкнутый относительно факторизации, и пусть $H \cap K = 1$. Если существует нормальная подгруппа $Q$ группы $G$, удовлетворяющая условиям $G/Q \in \mathcal{C}$ и $H \cap Q = 1 = K \cap Q$, то HNN-расширение $G^*$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемо.*

Следствие 4.12 обобщает сформулированный в предыдущем параграфе результат Д. В. Гольцова об аппроксимируемости корневым классом групп HNN-расширения с тривиально пересекающимися центральными связанными подгруппами. Необходимо, однако, отметить, что прямое доказательство данного результата, приведенное в [11], значительно короче и проще.

### *Библиографический список*


1. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сибирский математический журнал. 2013. Т. 54, № 6. С. 1203—1215.
2. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными $p$-группами некоторых классов групп и свободных конструкций // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. С. 80—87.
3. *Азаров Д. Н., Гольцов Д. В.* Почти аппроксимируемость конечными $p$-группами свободного произведения двух групп с конечными объединенными подгруппами // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 94—97.
4. *Азаров Д. Н., Гольцов Д. В.* О почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп некоторыми классами конечных групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 86—91.
5. *Азаров Д. Н., Гольцов Д. В.* О почти аппроксимируемости конечными $p$-группами свободных произведений групп с одной объединенной конечной подгруппой // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 74—77.
6. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Научные труды Ивановского государственного университета. Математика. 1999. Вып. 2. С. 5—7.
7. *Азаров Д. Н., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Научные труды Ивановского государственного университета. Математика. 2008. Вып. 6. С. 29—42.
8. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Научные труды Ивановского государственного университета. Математика. 2002. Вып. 5. С. 6—10.
9. *Гольцов Д. В.* О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Чебышевский сборник. Тула, 2013. Т. 14, вып. 3. С. 34—41.
10. *Гольцов Д. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами свободных произведений групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. С. 87—90.
11. *Гольцов Д. В.* Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп // Математические заметки. 2015. Т. 97, вып. 5. С. 665—669.

12. *Гольцов Д. В., Яцкин Н. И.* Классы групп и подгрупповые топологии // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 115—128.
13. *Гудовщикова А. С., Соколов Е. В.* Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных свободных произведений двух групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 115—123.
14. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 5-е изд. СПб. : Лань, 2009. 287 с.
15. *Коптева А. А., Соколов Е. В.* Некоторые аппроксимационные свойства HNN-расширений групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 78—88.
16. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М. : Мир, 1980. 447 с.
17. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Ученые записки Ивановского государственного педагогического института. 1958. Т. 18. С. 49—60.
18. *Молдаванский Д. И.* О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением // Сибирский математический журнал. 1967. Т. 8, № 6. С. 1370—1384.
19. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными $p$-группами HNN-расширений // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2000. Вып. 3. С. 129—140.
20. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2002. Вып. 3. С. 123—133.
21. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными $p$-группами некоторых HNN-расширений групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2003. Вып. 3. С. 102—116.
22. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимационные свойства HNN-расширений групп и групп с одним определяющим соотношением : дис. … д-ра физ.-мат. наук. Иваново, 2006.
23. *Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости конечными $p$-группами HNN-расширений нильпотентных групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2006. Вып. 3. С. 128—132.
24. *Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости групп Баумслага — Солитэра // Чебышевский сборник. Тула, 2012. Т. 13, вып. 1. С. 110—114.
25. *Савельичева Н. С., Соколов Е. В.* Одно необходимое условие нильпотентной аппроксимируемости HNN-расширения нильпотентной группы // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2015. Вып. 2. С. 64—68.
26. *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп свободной группы корневым классом групп // Математика и ее приложения. 2011. Вып. 8. С. 101—104.
27. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных $\pi$-групп // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381—1390.
28. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп // Математические заметки. 2015. Т. 97, вып. 5. С. 767—780.
29. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 1. С. 171—185.
30. *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость конечными $p$-группами HNN-расширений групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 139—141.
31. *Туманова Е. А.* К вопросу об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Математика и ее приложения. 2013. Вып. 10. С. 61—64.
32. *Туманова Е. А.* Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой // Чебышевский сборник. Тула, 2013. Т. 14, вып. 3. С. 134—141.
33. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными $\pi$-группами HNN-расширений групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 94—102.

34. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 133—137.
35. *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами свободных конструкций групп : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иваново, 2014.
36. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными $\pi$-группами обобщенных свободных произведений групп // Математические заметки. 2014. Т. 95, вып. 4. С. 605—614.
37. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148—180.
38. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага — Солитэра // Мальцевские чтения, 2015 : тезисы докладов Международной научной конференции, посвященной 75-летию Ю. Л. Ершова, Новосибирск, 3—7 мая 2015 г. Новосибирск : НГУ, 2015. С. 129.
39. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Известия вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27—44.
40. *Aschenbrenner M., Friedl S.* A criterion for HNN extensions of finite $p$-groups to be residually $p$ // J. Pure Appl. Algebra. 2011. Vol. 215. P. 2280—2289.
41. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193—209.
42. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN-extensions // Comm. Algebra. 1978. Vol. 6. P. 179—194.
43. *Cohen D. E.* Residual finiteness and Britton's lemma // J. Lond. Math. Soc. Ser. 2. 1977. Vol. 16, № 2. P. 232—234.
44. *Dyer J. L.* Separating conjugates in free-by-finite groups // J. Lond. Math. Soc. Ser. 2. 1979. Vol. 20, № 2. P. 215—221.
45. *Evans B.* Cyclic amalgamations of residually finite groups // Pacific J. Math. 1974. Vol. 55. P. 371—379.
46. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1957. Vol. 7. P. 29—62.
47. *Kim G., Tang C. Y.* Cyclic subgroup separability of HNN-extensions with cyclic associated subgroups // Can. Math. Bull. 1999. Vol. 42, № 3. P. 335—343.
48. *Moldavanskii D. I.* On some residual properties of Baumslag — Solitar groups // arXiv: 1310.3585 [math.GR]. 2013. URL: http://arxiv.org/abs/1310.3585 (дата обращения: 17.01.2016).
49. *Niblo G. A.* H.N.N. extensions of a free group by $\mathbb{Z}$ which are subgroup separable // Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 3. 1990. Vol. 61, № 1. P. 18—32.
50. *Raptis E., Varsos D.* Residual properties of HNN-extensions with base group an Abelian group // J. Pure Appl. Algebra. 1989. Vol. 59, № 3. P. 285—290.
51. *Raptis E., Varsos D.* The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. Abelian group // J. Pure Appl. Algebra. 1991. Vol. 76, № 2. P. 167—178.
52. *Raptis E., Varsos D.* The residual finiteness of HNN-extensions and generalized free products of nilpotent groups: a characterization // J. Aust. Math. Soc. Ser. A. 1992. Vol. 53, № 3. P. 408—420.
53. *Rosenberger G., Sasse S. L.* Residual properties of HNN-extensions with cyclic associated subgroups // Algebra Colloq. 1996. Vol. 3, № 1. P. 91—96.
54. *Shirvani M.* On residually finite HNN-extensions // Arch. Math. 1985. Vol. 44. P. 110—115.
55. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. Vol. 43. P. 856—860.
56. *Tieudjo D.* On root class residuality of HNN-extensions // IMHOTEP : J. Afr. Math. Pures Appl. 2005. Vol. 6. P. 18—23.
57. *Tieudjo D.* On root-class residuality of some free constructions // JP J. of Algebra, Number Theory and Appl. 2010. Vol. 18, № 2. P. 125—143.
58. *Wong K. B., Wong P. C.* Residual finiteness, subgroup separability and conjugacy separability of certain HNN extensions // Math. Slovaca. 2012. Vol. 62, № 5. P. 875—884.