УДК 512.543

Е. В. Соколов

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Статья представляет собой расширенную версию доклада, сделанного автором на заседании алгебраического семинара Ивановского государственного университета, посвященном 110-летию со дня рождения академика Анатолия Ивановича Мальцева. Описываются некоторые результаты А. И. Мальцева о финитной отделимости подгрупп и их аналоги для случая отделимости классом конечных π-групп. Указано применение этих результатов для исследования аппроксимационных свойств свободных конструкций групп.

Ключевые слова: отделимость подгрупп, аппроксимируемость конечными π-группами, аппроксимируемость нильпотентными группами, обобщенное свободное произведение, HNN-расширение.

E. V. Sokolov

ON THE SEPARABILITY OF SUBGROUPS OF BOUNDED SOLVABLE GROUPS

This paper is an extended version of the report made by the author at the meeting of the algebraic seminar of Ivanovo State University dedicated to the 110th birthday of academician Anatoly Ivanovich Mal'cev. Some results of A. I. Mal'cev on the finite separability of subgroups and their analogues for the case of separability by the class of finite π-groups are described. The application of these results for studying the residual properties of free constructions of groups is indicated.

Key words: subgroup separability, residual π-finiteness, residual nilpotence, generalized free product, HNN-extension.

1. Отделимость подгрупп ограниченных абелевых и ограниченных разрешимых групп

В 1958 году в Ученых записках Ивановского педагогического института была опубликована статья А. И. Мальцева «О гомоморфизмах на конечные группы» [3]. Известна она прежде всего потому, что в ней установлена связь между финитной аппроксимируемостью относительно того или иного предиката и разрешимостью соответствующей алгоритмической проблемы. Однако, значительная часть данной статьи посвящена изучению отделимости подгрупп.

Согласно данному А. И. Мальцевым определению подгруппа Y группы X называется *отделимой* в этой группе классом групп $\mathcal{C}$ (или, короче, $\mathcal{C}$-*отделимой*), если для каждого элемента $x \in X \setminus Y$ найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$. Напомним, что отделимость классом всех конечных групп, как и аппроксимируемость этим классом, принято называть *финитной*.

Понятие $\mathcal{C}$-отделимости тесно связано с аппроксимируемостью классом $\mathcal{C}$. Во-первых, $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы X — это не что иное, как $\mathcal{C}$-отделимость ее единичной подгруппы. Во-вторых, если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, то $\mathcal{C}$-отделимость нормальной подгруппы Y равносильна $\mathcal{C}$-аппроксимируемости фактор-группы X/Y. Кроме того, отделимость тех или иных подгрупп часто оказывается одним из необходимых или достаточных условий аппроксимируемости группы, примеры этому будут приведены позже.

В статье [3] исследовался вопрос о том, при каких условиях для группы имеет место

Свойство (1). Все подгруппы группы являются финитно отделимыми.

Абелева группа обладает свойством (1) тогда и только тогда, когда в каждой ее фактор-группе все примарные компоненты периодической части имеют конечный период [3]. Однако, разрешимая группа, составленная из таких групп, т. е. имеющая субнормальный ряд, факторы которого обладают свойством (1), сама уже не обязана удовлетворять данному свойству; соответствующий пример приводится в [3, п. 4]. В связи с этим А. И. Мальцевым были введены понятия ограниченной абелевой и ограниченной разрешимой групп.

Абелеву группу будем называть *ограниченной*, если в каждой ее фактор-группе все примарные компоненты периодической части конечны. Разрешимая группа называется *ограниченной*, если она обладает субнормальным рядом с абелевыми ограниченными факторами. Справедлива

Теорема 1 [3]. *Каждая ограниченная разрешимая группа удовлетворяет свойству* (1). *Разрешимая группа без кручения обладает свойством* (1) *тогда и только тогда, когда она ограничена.*

Отметим, что поскольку всякий конечный гомоморфный образ разрешимой группы является конечной разрешимой группой, теорема 1 на самом деле утверждает не просто финитную отделимость всех подгрупп ограниченной разрешимой группы, а их отделимость классом конечных разрешимых групп.

Говорят, что группа имеет *конечный ранг Гирша–Зайцева*, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является периодической или бесконечной циклической группой.

Теорема 2. *Пусть группа X аппроксимируется ограниченными разрешимыми группами без кручения. Тогда каждая подгруппа группы X, имеющая конечный ранг Гирша–Зайцева, отделима в этой группе классом всех конечных разрешимых групп.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}$ — класс всех ограниченных разрешимых групп без кручения, Y — подгруппа группы X, имеющая конечный ранг Гирша–Зайцева, и $x \in X \setminus Y$ — произвольный элемент. Известно [3], что класс ограниченных разрешимых групп замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Следовательно, тем же свойством обладает и класс $\mathcal{C}$. Это позволяет воспользоваться предложением 18 из [16], согласно которому в группе X найдется нормальная подгруппа Z, удовлетворяющая условиям $X/Z \in \mathcal{C}$ и $Z \cap Y = 1$. Отсюда в силу предложения 5 из [6] следует, что подгруппа Y $\mathcal{C}$-отделима в X и, значит, существует гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$. Пользуясь теоремой 1 и сделанным выше замечанием, отображение σ можно продолжить до гомоморфизма τ группы X на конечную разрешимую группу, переводящего x в элемент, не принадлежащий $Y\tau$. Следовательно, подгруппа Y отделима в X классом всех конечных разрешимых групп.

2. Отделимость подгрупп классом конечных π-групп

Рассмотрим теперь вопрос об отделимости подгрупп классом $\mathcal{F}_\pi$ всех конечных π-групп, где π — некоторое непустое множество простых чисел. Не утверждается, что обязательно существуют простые числа, не принадлежащие π. Поэтому класс $\mathcal{F}_\pi$ в общем случае может совпадать с классом всех конечных групп.

Напомним, что подгруппа Y группы X называется *π'-изолированной* в этой группе, если для каждого элемента $x \in X$ и для каждого простого числа $q \notin \pi$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$.

Легко заметить, что если подгруппа является $\mathcal{F}_\pi$-отделимой, то она должна быть π'-изолированной. Отсюда следует, что если множество π содержит не все простые числа и группа X не является периодической, то уже заведомо не все подгруппы группы X оказываются $\mathcal{F}_\pi$-отделимыми. Поэтому свойство (1) имеет смысл переформулировать следующим образом.

Свойство $(2)_\pi$. Все π'-изолированные подгруппы группы $\mathcal{F}_\pi$-отделимы.

Отметим, что если π совпадает с множеством всех простых чисел, то каждая подгруппа оказывается π'-изолированной и свойство $(2)_\pi$ превращается в свойство (1).

Как и в случае финитной отделимости, удается доказать (см.: [5, теорема 1]), что абелева группа обладает свойством $(2)_\pi$ тогда и только тогда, когда в каждой ее фактор-группе все примарные компоненты, соответствующие числам из множества π, имеют конечный период (подчеркнем, что в «финитном» случае требование конечности периода распространялось на все компоненты периодической части, здесь же — только на компоненты, соответствующие числам из π). Однако, упоминавшийся выше пример из [3] показывает, что даже двуступенно нильпотентная группа, факторы центрального ряда которой обладают свойством $(2)_\pi$, сама данному условию может не удовлетворять. Поэтому имеет смысл определить понятия π-ограниченных абелевой, нильпотентной и разрешимой групп следующим образом.

Будем говорить, что абелева группа *π-ограничена*, если в каждой ее фактор-группе все примарные компоненты периодической части, соответствующие числам из множества π, конечны. Разрешимые и нильпотентные группы будем называть *π-ограниченными*, если они обладают соответственно субнормальными и центральными рядами с π-ограниченными абелевыми факторами. Очевидно, что если π совпадает с множеством всех простых чисел, то π-ограниченные абелевы и разрешимые группы становятся ограниченными в смысле А. И. Мальцева. Для единообразия π-ограниченную нильпотентную группу в этом случае будем называть просто *ограниченной нильпотентной.*

Используя идеи статьи [3], удается доказать следующее утверждение.

Теорема 3 [5, теорема 3, следствие 1]. *Произвольная π-ограниченная нильпотентная группа удовлетворяет свойству $(2)_\pi$. Нильпотентная группа без кручения обладает свойством $(2)_\pi$ тогда и только тогда, когда она является π-ограниченной.*

Как и выше, легко заметить, что теорема 3 на самом деле утверждает отделимость π'-изолированных подгрупп π-ограниченной нильпотентной группы не только классом всех конечных π-групп, но и классом конечных нильпотентных π-групп. Аналог теоремы 2 также имеет место и представляет собой частный случай теоремы 2 из [6].

Теорема 4. *Пусть группа X аппроксимируется π-ограниченными нильпотентными группами без кручения. Тогда каждая π'-изолированная подгруппа группы X, имеющая конечный ранг Гирша–Зайцева, отделима в этой группе классом всех конечных нильпотентных π-групп.*

Отметим, что для π-ограниченных разрешимых групп теоремы 3 и 4 неверны. Даже в сверхразрешимой группе без кручения π'-изолированность уже необязательно равносильна отделимости конечными π-группами (см.: [5]).

3. Первое направление использования теорем 1–4

Теперь укажем, как описанные выше свойства ограниченных разрешимых и нильпотентных групп используются при исследовании аппроксимируемости свободных конструкций групп.

Пусть P — свободное произведение некоторых групп A и B с объединенной подгруппой U. Если подгруппа U нормальна в свободных множителях A и B, то она нормальна в P и потому можно рассмотреть группу $\mathrm{Aut}_P(U)$, составленную из ограничений на подгруппу U всех внутренних автоморфизмов группы P. Аппроксимируемость последней удается полностью исследовать при тех или иных дополнительных ограничениях, накладываемых на группу $\mathrm{Aut}_P(U)$ (см.: [9–16]). Здесь рассматривается ситуация, когда эта группа является абелевой или совпадает с одной из своих подгрупп $\mathrm{Aut}_A(U)$, $\mathrm{Aut}_B(U)$, состоящих из ограничений на подгруппу U внутренних автоморфизмов групп A и B соответственно.

Следующее утверждение представляет собой частный случай теоремы 1 из [9].

Теорема 5. *Пусть $U \trianglelefteq P$, $A \neq U \neq B$ и группа $\mathrm{Aut}_P(U)$ является абелевой или совпадает с одной из подгрупп $\mathrm{Aut}_A(U)$, $\mathrm{Aut}_B(U)$. Пусть также*

$$\Omega = \big\{(R,S) \mid R \trianglelefteq A,\ S \trianglelefteq B,\ A/R \in \mathcal{F}_\pi,\ B/S \in \mathcal{F}_\pi,\ R \cap U = S \cap U\big\}.$$

Группа P $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда

1) *подгруппа U $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группах A и B;*
2) *справедливы равенства $\bigcap_{(R,S)\in\Omega} R = 1 = \bigcap_{(R,S)\in\Omega} S$.*

Теорема 5 дает критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы P, однако, его применение в конкретной ситуации сопряжено с определенными сложностями. Как легко догадаться, особенную трудность вызывает описание семейства Ω, хотя непростой задачей является и доказательство отделимости подгруппы U. Если же потребовать, чтобы свободные множители были π-ограниченными нильпотентными группами, то от условия 2 удается избавиться полностью, а условие 1, благодаря теореме 3, превращается в требование π'-изолированности, которое для конкретной группы проверить гораздо проще. В результате, получаем следующее утверждение, служащее частным случаем теоремы 3 из [9].

Теорема 6. *Пусть $U \trianglelefteq P$, $A \neq U \neq B$ и группа $\mathrm{Aut}_P(U)$ является абелевой или совпадает с одной из подгрупп $\mathrm{Aut}_A(U)$, $\mathrm{Aut}_B(U)$. Если A и B — π-ограниченные нильпотентные группы, то группа P $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа U π'-изолирована в группах A и B.*

Приведем еще один пример, на этот раз для конструкции HNN-расширения. Пусть далее E — HNN-расширение некоторой нециклической группы G с бесконечными циклическими связанными подгруппами H и K, лежащими в центре базовой группы. Из теорем 3 и 4 работы [8] вытекает

Теорема 7. *Пусть группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Если $H \cap K \neq 1$, то группа E $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) *подгруппы H и K $\mathcal{F}_\pi$-отделимы в группе G;*

2) *фактор-группы $H/H\cap K$ и $K/H\cap K$ имеют одинаковые порядки;*

3) $2 \in \pi$, *если только подгруппа $H\cap K$ не лежит в центре группы E.*

Если $H \cap K = 1$ и

$$\Omega = \big\{N \mid N \trianglelefteq G,\ G/N \in \mathcal{F}_\pi,\ \exists n \in \mathbb{Z}^+\ N \cap HK = (HK)^n\big\},$$

то группа E $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда

$$\bigcap_{N\in\Omega} HN = H \quad \text{и} \quad \bigcap_{N\in\Omega} KN = K.$$

Как и выше, наибольшую трудность в применении этой теоремы представляет описание семейства Ω и проверка равенства H и K указанным пересечениям. Если же потребовать, чтобы группа G являлась ограниченной или аппроксимировалась ограниченными группами без кручения, то, используя ту же схему рассуждений, что и при доказательстве следствий 2, 3 из [8], можно получить достаточно простые критерии финитной и $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы E, которые содержит

Теорема 8. *Если группа G является ограниченной разрешимой или аппроксимируется ограниченными разрешимыми группами без кручения, то группа E финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда фактор-группы $H/H \cap K$ и $K/H \cap K$ имеют одинаковые порядки.*

Если группа G является π-ограниченной нильпотентной или аппроксимируется π-ограниченными нильпотентными группами без кручения, то группа E $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда

1) *подгруппы 1, H и K π'-изолированы в группе G;*

2) *фактор-группы $H/H\cap K$ и $K/H\cap K$ имеют одинаковые порядки;*

3) $2 \in \pi$, *если только подгруппа $H\cap K$ не лежит в центре группы E.*

Таким образом, первое направление применения теорем 1–4 — это получение конкретных следствий утверждений общего характера, условия которых без дополнительных предположений проверить затруднительно. Подобных примеров к настоящему времени имеется достаточно много (см.: [7–9]).

4. Второе направление использования теорем 1–4

Пусть снова P — свободное произведение некоторых групп A и B с объединенной подгруппой U. Справедливы следующие два утверждения.

Предложение 1 [1]. *Пусть A и B — локально нильпотентные группы, $A \neq U \neq B$. Если группа P нильпотентно аппроксимируема, то подгруппа U $\{p\}'$-изолирована в группах A и B для некоторого простого числа p.*

Предложение 2 [17]. *Пусть U — циклическая подгруппа, p — простое число, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп. Если группы A и B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы и подгруппа U $\mathcal{F}_p$-отделима в них, то группа P $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Как известно, любая конечная p-группа нильпотентна, поэтому предложение 1 дает необходимое, а предложение 2 — достаточное условие нильпотентной аппроксимируемости группы P. В общем случае дистанция между этими двумя условиями достаточно велика, но если потребовать, чтобы группы A и B были ограниченными нильпотентными, то отделимость и аппроксимируемость конечными p-группами ввиду теоремы 3 окажутся равносильными $\{p\}'$-изолированности и мы получим

Предложение 3. *Пусть A и B — ограниченные нильпотентные группы, U — циклическая подгруппа и $A \neq U \neq B$.*

Если группа P нильпотентно аппроксимируема, то подгруппа U $\{p\}'$-изолирована в группах A и B для некоторого простого числа p.

Если подгруппы 1 и U $\{p\}'$-изолированы в группах A и B для некоторого простого числа p, то группа P нильпотентно аппроксимируема.

Таким образом, «зазор» между необходимым и достаточным условиями становится совсем небольшим и его удается ликвидировать, причем в более общей ситуации.

Теорема 9. *Пусть подгруппа U представляет собой локально циклическую группу или лежит в центре хотя бы одной из групп A, B и имеет конечный ранг. Пусть также каждая из групп A, B является ограниченной нильпотентной или аппроксимируется ограниченными нильпотентными группами без кручения.*

Если подгруппа U $\{p\}'$-изолирована в группах A и B для некоторого простого числа p, то группа P нильпотентно аппроксимируема.

Если группы A и B локально нильпотентны, то из нильпотентной аппроксимируемости группы P следует, что подгруппа U $\{p\}'$-изолирована в группах A и B для некоторого простого числа p.

При тех же ограничениях на объединенную подгруппу удается получить и критерий аппроксимируемости группы P конечными нильпотентными π-группами для любого непустого множества простых чисел π.

Теорема 10. *Пусть подгруппа U представляет собой локально циклическую группу или лежит в центре хотя бы одной из групп A, B и имеет конечный ранг. Пусть также группы A и B являются π-ограниченными нильпотентными. Группа P аппроксимируется конечными нильпотентными π-группами тогда и только тогда, когда единичная подгруппа π'-изолирована в группах A и B, а подгруппа U $\{p\}'$-изолирована в группах A и B для некоторого простого числа $p \in \pi$.*

Таким образом, второе направление применения полученных результатов об отделимости подгрупп, в первую очередь теорем 3 и 4, состоит в отыскании критериев нильпотентной аппроксимируемости, основанных на уже известных достаточных условиях аппроксимируемости конечными p-группами. Актуальность подобных исследований объясняется тем, что аппроксимируемость конечными p-группами изучена значительно лучше, чем аппроксимируемость произвольными нильпотентными группами. Отметим также, что известен аналог предложения 1 для HNN-расширений [4, 18] и его обобщение на случай фундаментальных групп произвольных графов групп [2]. Поэтому, несмотря на то, что результатов в описанном направлении получено еще довольно мало, оно представляется весьма перспективным.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Научные труды Ивановского государственного университета. Математика. 1999. Вып. 2. С. 5—7.
2. *Куваев А. Е.* Необходимые условия нильпотентной аппроксимируемости некоторых теоретико-групповых конструкций // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 6. С. 1335—1349.
3. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Ученые записки Ивановского государственного педагогического института. 1958. Т. 18. С. 49—60.
4. *Савельичева Н. С., Соколов Е. В.* Одно необходимое условие нильпотентной аппроксимируемости HNN-расширения нильпотентной группы // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2015. Вып. 2. С. 64—68.
5. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381—1390.
6. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентно аппроксимируемых групп в классе конечных π-групп // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 1. С. 219—229.
7. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 1. С. 171—185.
8. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами // Математические заметки. 2017. Т. 102, № 4. С. 597—612.
9. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами // Известия высших учебных заведений. Математика. 2020. № 3. С. 48—63.
10. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Математика и ее приложения. Журнал Ивановского математического общества. 2012. Вып. 9. С. 91—94.
11. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, № 1. С. 150—152.

12. *Туманова Е. А.* К вопросу об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Математика и ее приложения. Журнал Ивановского математического общества. 2013. Вып. 10. С. 61—64.
13. *Туманова Е. А.* Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, № 3. С. 134—141.
14. *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами свободных конструкций групп : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иваново, 2014.
15. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп // Математические заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 605—614.
16. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Известия высших учебных заведений. Математика. 2015. № 10. С. 27—44.
17. *Kim G., McCarron J.* On amalgamated free products of residually p-finite groups // Journal of Algebra. 1993. Vol. 162, № 1. P. 1—11.
18. *Sokolov E. V.* A necessary condition for the residual nilpotence of HNN-extensions // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, № 2. P. 281—285.

УДК 510.5

Б. Я. Солон

СЛАБО ТОТАЛЬНЫЕ И КО-ТОТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ЧАСТИЧНЫЕ СТЕПЕНИ

В статье рассматриваются новые понятия слабой тотальности и ко-тотальности функций и степеней перечислимости таких функций. Впервые данные понятия, примененные к множествам, были рассмотрены автором в 2005 году. Недавно группа американских математиков обратилась к теме ко-тотальных множеств и степеней перечислимости ввиду того, что наиболее фундаментальным понятием в различных приложениях является свойство ко-тотальности.

Ключевые слова: операторы перечисления, частично вычислимые операторы, частичные степени, тотальные функции, ко-тотальные функции.

B. Ya. Solon

WEAKLY TOTAL AND COTOTAL FUNCTIONS AND PARTIAL DEGREES

The article deals with new notions of weak totality and cototality of functions and enumeration degrees of such functions. For the first time, these notions applied to sets were considered by the author in 2005. Recently, a group of American mathematicians referred to the topic of cototal sets and enumeration degrees in view of the fact that the most fundamental concept in various applications is the property of cototality.

Key words: enumeration operators, partial recursive operators, partial degrees, total functions, cototal functions.

Мы будем использовать понятия и терминологию, которые приняты в монографии [7]. Пусть $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество натуральных