Математика и её приложения : ЖИМО. 2012. Выпуск 1 (9). С. 103–106.

УДК 512.543

Е. А. Туманова[1]

Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений с нормальным объединением

Ключевые слова: обобщенное свободное произведение, аппроксимируемость конечными π-группами.

Получен критерий аппроксимируемости конечными π-группами обобщенного свободного произведения двух групп с нормальной объединенной подгруппой при условии, что множество всех ее автоморфизмов, индуцированных внутренними автоморфизмами свободных множителей, является конечной группой.

Keywords: generalized free product, residuality by finite π-groups.

The criterion of the residuality of the generalized free product of two groups with a normal amalgamated subgroup by finite π-groups is obtained provided that the set of all authomorphisms of the amalgamated subgroup induced by all internal authomorphisms of the free multipliers is a finite group.

1. Введение

Пусть π — непустое множество простых чисел. Группа G называется аппроксимируемой конечными π-группами ($\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную π-группу такой, что $g\varphi \neq 1$.

Заметим, что если G — произвольная группа и H — ее нормальная подгруппа, то ограничение на подгруппу H любого внутреннего автоморфизма группы G является автоморфизмом группы H. Множество $\mathrm{Aut}_G(H)$ всех таких автоморфизмов является подгруппой группы $\mathrm{Aut}\, H$ всех автоморфизмов группы H.

Ранее автором получен критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных π-групп с нормальными объединенными подгруппами. А именно, доказана

Теорема 1 ([2]). *Пусть π — непустое множество простых чисел, A и B — конечные π-группы, H и K — нормальные подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. Свободное произведение $G = (A * B; H = K, \varphi)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная π-группа.*

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: helenfog@bk.ru.

С помощью этого результата в данной работе получен критерий аппроксимируемости конечными π-группами обобщенного свободного произведения G двух групп A и B с собственными нормальными объединенными подгруппами H и K такого, что группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна. Прежде, чем сформулировать соответствующую теорему, напомним несколько определений.

Подмножество M группы G отделимо конечными π-группами ($\mathcal{F}_\pi$-отделимо) в группе G, если для любого элемента g группы G, не принадлежащего подмножеству M, существует гомоморфизм φ группы G на конечную π-группу такой, что $g\varphi \notin M\varphi$.

Семейство $\{N_i\}_{i\in I}$ нормальных подгрупп некоторой группы G называется фильтрацией, если $\bigcap\limits_{i\in I} N_i = 1$.

Пусть A и B — некоторые группы, $H \leqslant A$, $K \leqslant B$, и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм группы H на группу K. Подгруппы R и S групп A и B соответственно называются (H, K, φ)-совместимыми, если выполнено равенство $(H \cap R)\varphi = K \cap S$.

Теорема 2. *Пусть π — непустое множество простых чисел. Пусть H — собственная нормальная подгруппа группы A, K — собственная нормальная подгруппа группы B, $\varphi : H \to K$ — изоморфизм, $G = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Пусть также $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар нормальных (H, K, φ)-совместимых подгрупп конечного π-индекса групп A и B соответственно. Если $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа, то группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H)$ является конечной π-группой, семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями, подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе B.*

Очевидно, что если подгруппа H центральна в группе G, то множество $\mathrm{Aut}_G(H)$ состоит только из тождественного отображения группы H и, следовательно, является конечной π-группой для любого множества π простых чисел. Поэтому из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Пусть π — непустое множество простых чисел. Пусть H — собственная центральная подгруппа группы A, K — собственная центральная подгруппа группы B, $\varphi : H \to K$ — изоморфизм, $G = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Пусть также $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар нормальных (H, K, φ)-совместимых подгрупп конечного π-индекса групп A и B соответственно. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями, подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе B.*

Сформулированная теорема 2 обобщает теорему 2 из [2], а следствие — теорему 3 из [1].

2. Доказательство теоремы 2

Покажем достаточность условия. Так как подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе A и подгруппа K $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе B, то фактор-группа G/H, изоморфная свободному произведению $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых групп A/H и B/K, также является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группой [3].

Пусть g — произвольный неединичный элемент группы G. Тогда возможны два случая: $g \notin H$ и $g \in H$. Рассмотрим первый случай. Пусть $\varepsilon : G \to G/H$ — естественный гомоморфизм. Так как $g \notin H$, то $g\varepsilon$ — отличный от 1 элемент $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы G/H. Поэтому существует гомоморфизм ψ группы G/H в конечную π-группу такой, что $g\varepsilon\psi \neq 1$.

Рассмотрим второй случай: элемент g группы G содержится в H. Тогда $g \in A$. По условию $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — фильтрация, значит, найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $g \notin R_{\lambda_0}$. Обозначим через R подгруппу R_{λ_0}, через S — подгруппу S_{λ_0}. Так как подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы, то отображение $\overline{\varphi} : HR/R \to KS/S$, действующее по правилу $(hR)\overline{\varphi} = (h\varphi)S$, где $h \in H$, определено корректно и является изоморфизмом подгруппы HR/R фактор-группы A/R на подгруппу KS/S фактор-группы B/S. Это позволяет построить свободное произведение

$$G_{R,S} = (A/R * B/S; HR/R = KS/S, \overline{\varphi})$$

групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и KS/S, объединенными относительно изоморфизма $\overline{\varphi}$. Легко видеть, что существует гомоморфизм $\rho_{R,S} : G \to G_{R,S}$, действие которого на подгруппах A и B совпадает с действием естественных гомоморфизмов $A \to A/R$ и $B \to B/S$. Гомоморфизм $\rho_{R,S}$ сюръективен и переводит H в HR/R. Поэтому $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ — гомоморфный образ конечной π-группы $\mathrm{Aut}_G(H)$. Следовательно, $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ также является конечной π-группой и группа $G_{R,S}$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема в силу теоремы 1. Подействовав гомоморфизмом $\rho_{R,S}$ на элемент g, получим отличный от 1 элемент gR фактор-группы A/R. Значит, существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ в конечную π-группу такой, что $gR\sigma \neq 1$.

Таким образом, группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

Проверим необходимость условия. Так как подгруппа H нормальна в группе G, то ее централизатор $C_G(H)$ также нормален в G и группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ изоморфна фактор-группе $G/C_G(H)$. Из $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G следует $\mathcal{F}_\pi$-отделимость подгруппы $C_G(H)$.

Действительно, пусть g — произвольный элемент группы G, не принадлежащий $C_G(H)$. Тогда найдется элемент h подгруппы H такой, что $[g, h] \neq 1$. В силу $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G существует гомоморфизм γ группы G на конечную π-группу, при котором $[g, h]\gamma \neq 1$. Тогда $g\gamma \notin C_{G\gamma}(H\gamma)$, значит, $g\gamma \notin C_G(H)\gamma$. Следовательно, подгруппа $C_G(H)$ $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе G.

Поэтому фактор-группа $G/C_G(H)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Тогда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ также $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. К тому же $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна по условию, значит, она является конечной π-группой.

Покажем, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — фильтрация.

Пусть g — произвольный отличный от 1 элемент группы A. Значит, g отличен от 1 и в группе G. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, следовательно, существует нормальная подгруппа N конечного π-индекса группы G такая, что $g \notin N$. Полагая $R = A \cap N$ и $S = B \cap N$, получаем, что $g \notin R$ и R, S — нормальные (H, K, φ)-совместимые подгруппы конечного π-индекса групп A и B соответственно. Так как семейство $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ состоит из всех пар нормальных (H, K, φ)-совместимых подгрупп конечного π-индекса групп A и B соответственно, то существует такое $\lambda \in \Lambda$, что $R_\lambda = R$ и $S_\lambda = S$. Поскольку элемент g был выбран произвольным и $g \notin R_\lambda$, то $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda = 1$. Таким образом, семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией. Аналогично доказывается, что $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — фильтрация.

Покажем, что подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе A. Предположим противное. Тогда существует элемент a группы A, не принадлежащий H, но переходящий в некоторый элемент из образа подгруппы H при каждом гомоморфизме группы A на конечную π-группу. Так как K — собственная подгруппа группы B, то существует элемент b группы B, не принадлежащий подгруппе K. Обозначим элемент ab группы G через g. Тогда $\hat{g} \in \mathrm{Aut}_G(H)$. Ввиду того, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа, порядок элемента $\hat{g}$ равен некоторому конечному числу q.

Рассмотрим элемент $f = [a, g^{-q}ag^q]$. Он имеет несократимую запись длины $8q$, следовательно, отличен от 1. Пусть ψ — произвольный гомоморфизм группы G на конечную π-группу. Тогда

$$f\psi = [h\psi, g^{-q}\psi h\psi g^q\psi] = [h, g^{-q}hg^q]\psi$$

для подходящего элемента h подгруппы H. Так как $\widehat{g^q} = \hat{g}^q = id$, то $[h, g^{-q}hg^q]\psi = 1$, что противоречит $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G. Значит, подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе A.

Аналогично показывается $\mathcal{F}_\pi$-отделимость подгруппы K в группе B. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Молдаванский Д. И., Копрова А. Е.* Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп // Научные труды ИвГУ. Математика. Вып. 6 (2008). С. 59–70.
2. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп // Чебышевский сборник. Том 13. Вып. 1 (2012). С. 150–152.
3. *Grunberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.

Поступила в редакцию 27.03.2013.