ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 13 Выпуск 1 (2012)

Труды IX Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной 80-летию профессора Мартина Давидовича
Гриндлингера

УДК 512.543

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ ГРУППАМИ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

Е. А. Туманова (г. Иваново)

Аннотация

В работе получены некоторые необходимые и достаточные условия аппроксимируемости свободного произведения двух групп с нормальными объединенными подгруппами классом $\mathcal{F}_\pi$ всех конечных π-групп, где π — непустое множество простых чисел.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Группа G называется аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x группы G существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что образ элемента x относительно φ отличен от 1.

Если в качестве $\mathcal{K}$ взять класс $\mathcal{F}$ всех конечных групп, то понятие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость, где p — простое число, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп. Менее исследовано свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где π — непустое множество простых чисел, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп.

Напомним некоторые известные результаты об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами.

Г. Баумслаг [1] доказал, что свободное произведение двух конечных групп с объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой. Этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость, то есть свободное произведение двух конечных p-групп с объединенной подгруппой не обязано быть $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. Критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп был получен Хигменом [2].

Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ (введенные обозначения будем считать фиксированными до конца изложения). При дополнительном предположении о нормальности объединяемых подгрупп ограничение на подгруппу H любого внутреннего автоморфизма группы G является автоморфизмом группы H. Множество $\mathrm{Aut}_G(H)$ всех таких автоморфизмов группы H является подгруппой группы $\mathrm{Aut}\, H$ всех автоморфизмов группы H. При этом предположении следствием теоремы Хигмена является следующий критерий.

Предложение 1. *Свободное произведение G конечных p-групп A и B с объединенными нормальными подгруппами H и K является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная p-группа.*

Нами показано, что аналогичное утверждение справедливо в более общей ситуации.

Теорема 1. *Пусть A и B — конечные π-группы, H и K — нормальные подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. Группа G является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная π-группа.*

С помощью этой теоремы получены как необходимые, так и достаточные условия аппроксимируемости конечными π-группами обобщенного свободного произведения с объединенными (нормальными) подгруппами, аналогичные условиям Г. Баумслага финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения. Эти условия позволили доказать следующие теоремы.

Теорема 2. *Если A и B — $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемые группы, H и K — конечные нормальные подгруппы групп A и B соответственно, $\varphi : H \to K$ — некоторый изоморфизм, то группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная π-группа.*

Теорема 3. *Пусть A — $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая группа, B — $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, H — собственная нормальная подгруппа группы A, K — собственная центральная подгруппа группы B, $\varphi : H \to K$ — некоторый изоморфизм. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе B.*

Теорема 4. *Пусть A — $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая группа, B — $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, H — собственная нормальная циклическая подгруппа группы A, K — собственная нормальная циклическая подгруппа группы B, $\varphi : H \to K$ — некоторый изоморфизм. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе B.*

Напомним, что подмножество M группы X называется $\mathcal{F}_\pi$-отделимым в группе X, если для любого элемента x группы X, не принадлежащего подмножеству M, существует гомоморфизм φ группы X на конечную π-группу такой, что $x\varphi \notin M\varphi$.

Частным случаем теоремы 2 для одноэлементного множества π является теорема 1 из [3]. Теорема 3 обобщает еще одно утверждение из той же работы, в котором установлен критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения конечно порожденных нильпотентных групп с собственными центральными объединенными подгруппами.

Из теоремы 2 вытекает также следующее утверждение.

Следствие 1. *Если A и B — $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемые группы, H и K — конечные циклические нормальные подгруппы групп A и B соответственно, $\varphi : H \to K$ — некоторый изоморфизм, то группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193-209.

[2] Higman G. Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1963. Vol. 1. P.301-305.

[3] Соколов Е. В. Об аппроксимируемости конечными p-группами некоторых свободных произведений с объединенной подгруппой // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, вып. 1. С. 97-102.

Ивановский государственный университет.
Получено 14.05.2012