ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 512.543

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ГРУПП ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ С НОРМАЛЬНОЙ ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

Е. А. Туманова (г. Иваново)

Аннотация

Получено достаточное условие аппроксимируемости произвольным корневым классом групп $\mathcal{K}$ обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{K}$-групп с нормальными объединенными подгруппами.

Ключевые слова: корневые классы групп, аппроксимационные свойства, обобщенные свободные произведения.

CERTAIN CONDITIONS OF THE ROOT-CLASS RESIDUALITY OF GENERALIZED FREE PRODUCTS WITH A NORMAL AMALGAMATED SUBGROUP

E. A. Tumanova (Ivanovo)

Abstract

Let $\mathcal{K}$ be an arbitrary root class of groups. We prove a sufficient condition of the $\mathcal{K}$-residuality of the generalized free product of two $\mathcal{K}$-groups with a normal amalgamated subgroup.

Keywords: root classes of groups, residual properties, generalized free products.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Группа G называется аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x группы G существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что образ элемента x относительно φ отличен от единицы.

Если в качестве $\mathcal{K}$ взять класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с аппроксимируемостью всеми конечными группами изучаются также свойства аппроксимируемости конечными p-группами, где p — простое число, конечными π-группами, где π — непустое множество простых чисел, разрешимыми группами, нильпотентными группами.

Напомним далее, что содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп $\mathcal{K}$ называется корневым [1], если выполняются следующие три условия.

1. Если группа X принадлежит классу $\mathcal{K}$ и Y — подгруппа группы X, то группа Y также принадлежит классу $\mathcal{K}$.

2. Прямое произведение любых двух групп из класса $\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

3. Если $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X такой, что фактор-группы X/Y и Y/Z принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и фактор-группа X/T принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Примерами корневых классов могут служить упоминавшиеся выше классы всех конечных π-групп и всех разрешимых групп, а также класс разрешимых групп без кручения. Известно и много других корневых классов групп. Вместе с тем, класс нильпотентных групп не является корневым, так как он не замкнут относительно взятия расширений и, следовательно, не удовлетворяет условию 3 из определения корневого класса.

В данной статье рассматриваются условия аппроксимируемости произвольным корневым классом групп обобщенного свободного произведения

$$G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$$

двух групп A и B с нормальными подгруппами $H \leqslant A$ и $K \leqslant B$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi\colon H \to K$ (введенные обозначения предполагаются фиксированными до конца статьи, в формулировках выделенных утверждений подразумеваются выполненными также предположения о нормальности объединяемых подгрупп).

Г. Баумслаг [2] доказал, что свободное произведение двух конечных групп с произвольными (необязательно нормальными) объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой. Этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на аппроксимируемость конечными p-группами. Критерий аппроксимируемости данным классом обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп был получен Хигманом [3].

При дополнительном предположении о нормальности объединенных подгрупп H и K в соответствующих свободных множителях подгруппа H является нормальной в обобщенном свободном произведении G, и потому ограничение на подгруппу H любого внутреннего автоморфизма группы G оказывается автоморфизмом группы H. Множество $\mathrm{Aut}_G(H)$ всех таких автоморфизмов является подгруппой группы $\mathrm{Aut}\,H$ всех автоморфизмов группы H. В этом случае следствием критерия Хигмана служит

Предложение 1. *Если A и B являются конечными p-группами, то обобщенное свободное произведение G аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная p-группа* [3].

Ранее автором было показано, что аналогичное утверждение справедливо в более общей ситуации. А именно, имеет место

Предложение 2. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Если A и B являются конечными π-группами, то обобщенное свободное произведение G аппроксимируется конечными π-группами тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная π-группа* [4, теорема 1].

Сформулируем основные результаты данной работы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$. Если фактор-группы A/H, B/K и группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$, то обобщенное свободное произведение G является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.*

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$, подгруппы H и K конечны. Обобщенное свободное произведение G является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$, подгруппы H и K являются циклическими. Тогда группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Следствие 3. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$ и хотя бы одна из подгрупп H и K лежит в центре соответствующего свободного множителя. Тогда группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Из полученных в данной статье результатов следует, что утверждение предложения 2 можно распространить на свойство аппроксимируемости замкнутым относительно факторизации корневым классом конечных групп. Далее приведем примеры, показывающие, что в случае произвольного корневого класса $\mathcal{K}$ ни одно из условий $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$ не является необходимым для $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G.

Пример 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — класс всех разрешимых групп без кручения, A — свободная абелева группа ранга 2 с базисом $\{a; b\}$, B, H, K — бесконечные циклические группы, порожденные элементами c, b, c^3 соответственно, $\varphi\colon H \to K$ — изоморфизм, переводящий b в c^3.*

Тогда группы A, B принадлежат классу $\mathcal{K}$. Подгруппы H и K центральны в группах A и B соответственно, откуда следует, что группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ тривиальна и потому также принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Фактор-группа A/H изоморфна $\mathbb{Z}$, значит, является $\mathcal{K}$-группой, в то время как фактор-группа B/K изоморфна $\mathbb{Z}_3$ и, следовательно, не содержится в классе $\mathcal{K}$.

Покажем, что при этом обобщенное свободное произведение G является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.

В самом деле, поскольку задание группы G порождающими символами и определяющими соотношениями имеет вид

$$G = \langle a, b, c;\ ab = ba, b = c^3\rangle = \langle a, c;\ ac^3 = c^3a\rangle,$$

легко видеть, что эта группа является расщепляемым расширением свободной группы ранга 3 при помощи бесконечной циклической группы. Известно [5, теорема 1], что любая свободная группа аппроксимируема произвольным корневым классом групп. Значит, G является расширением $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathcal{K}$-группы и, следовательно, $\mathcal{K}$-аппроксимируема (см. предложение 3 ниже).

Пример 2. *Пусть снова $\mathcal{K}$ — класс всех разрешимых групп без кручения, A — свободная абелева группа ранга 2 с базисом $\{a; b\}$. Пусть также B — неабелево расщепляемое расширение бесконечной циклической группы с порождающим c при помощи бесконечной циклической группы с порождающим d, т. е.*

$$B = \langle c, d;\ d^{-1}cd = c^{-1}\rangle;$$

H, K — бесконечные циклические группы, порожденные элементами b и c^n, $n \geqslant 1$, соответственно; $\varphi\colon H \to K$ — изоморфизм подгрупп, отождествляющий элементы b и c^n.

Тогда A и B являются $\mathcal{K}$-группами, но группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ не принадлежит классу $\mathcal{K}$, так как содержит элемент порядка 2 — автоморфизм группы H, совпадающий с ограничением на эту группу внутреннего автоморфизма группы G, производимого элементом d.

Фактор-группа A/H содержится в $\mathcal{K}$, так как она изоморфна $\mathbb{Z}$. Если $n = 1$, то фактор-группа B/K также изоморфна $\mathbb{Z}$ и, следовательно, является $\mathcal{K}$-группой. Если же $n > 1$, то cK — отличный от 1 элемент конечного порядка фактор-группы B/K. Значит, B/K не является группой без кручения, а потому не содержится в классе $\mathcal{K}$.

Докажем $\mathcal{K}$-аппроксимируемость обобщенного свободного произведения G.

Обозначим через N *нормальное замыкание элемента* a *в группе* G. *Так как подгруппа* N *нормальна в группе* G *и* $N \cap H = 1$, *то в силу теоремы о строении подгрупп обобщенного свободного произведения [6] группа* N *представима в виде свободного произведения некоторой свободной группы и семейства подгрупп, изоморфных* $N \cap A$ *или* $N \cap B$.

Как уже было сказано выше, любая свободная группа аппроксимируема произвольным корневым классом групп. Отсюда и из того, что группы A *и* B *принадлежат классу* $\mathcal{K}$, *следует, что* N $\mathcal{K}$*-аппроксимируема как свободное произведение* $\mathcal{K}$*-аппроксимируемых групп [1, теорема 4.1], [5, теорема 2]. Фактор-группа* G/N *изоморфна группе* B *и потому принадлежит классу* $\mathcal{K}$. *Значит,* G *является расширением* $\mathcal{K}$*-аппроксимируемой группы* N *при помощи* $\mathcal{K}$*-группы* G/N *и, следовательно,* $\mathcal{K}$*-аппроксимируема в силу уже упоминавшегося предложения* 3.

Пример 3. *Вначале проведем несложное общее построение.*

Пусть A, B, C — *некоторые изоморфные группы,* $\varepsilon\colon A \to C$ *и* $\delta\colon B \to C$ — *изоморфизмы,* $L \leqslant C$, $H = L\varepsilon^{-1}$, $K = L\delta^{-1}$ *и* $\varphi = (\varepsilon \circ \delta^{-1})|_H$ — *изоморфизм подгрупп* H *и* K.

Отображения ε *и* δ, *очевидно, согласованы с изоморфизмом* φ, *и поэтому их можно продолжить до гомоморфизма* ψ *группы* G *на группу* C. *Положим* $N = \ker\psi$. *Так как* ε *и* δ *инъективны, то* $N \cap A = N \cap B = 1$. *Отсюда в силу теоремы Х. Нейман следует, что* N — *свободная группа.*

Если, кроме того, $\mathcal{K}$ — *некоторый корневой класс групп и* $C \in \mathcal{K}$, *то группа* G *оказывается расширением* $\mathcal{K}$*-аппроксимируемой группы* N *при помощи* $\mathcal{K}$*-группы* C *и, следовательно,* $\mathcal{K}$*-аппроксимируема.*

Пусть теперь $\mathcal{K}$ — *класс всех разрешимых групп без кручения,* C — *некоторое расщепляемое расширение бесконечной циклической группы с порождающим* c *при помощи бесконечной циклической группы с порождающим* d *(т. е. либо свободная абелева группа ранга* 2, *либо метабелева группа из примера* 2*),* L — *подгруппа группы* C, *порожденная элементом* c^3.

Тогда группы A *и* B *принадлежат классу* $\mathcal{K}$. *При этом* $c\varepsilon^{-1}H$ *и* $c\delta^{-1}K$ — *отличные от* 1 *элементы конечного порядка фактор-групп* A/H *и* B/K *соответственно. Значит,* A/H *и* B/K *не содержатся в классе* $\mathcal{K}$.

Если группа C *абелева, то* $\mathrm{Aut}_G(H) = 1$ *и, следовательно,* $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$. *Если же группа* C *не является абелевой, то, как и в примере* 2, $\mathrm{Aut}_G(H) \notin \mathcal{K}$.

Прежде, чем доказать сформулированные теорему и следствия, приведем необходимые нам вспомогательные утверждения.

Предложение 3. *Пусть* $\mathcal{K}$ — *корневой класс групп. Тогда произвольное расширение* $\mathcal{K}$*-аппроксимируемой группы при помощи* $\mathcal{K}$*-группы является* $\mathcal{K}$*-аппроксимируемой группой* [1, лемма 1.5].

Предложение 4. *Пусть класс групп $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, X — произвольная группа, Y — нормальная подгруппа группы X. Если существует сюръективный гомоморфизм γ группы X в некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на Y, то группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. В частности, если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений, группа X $\mathcal{K}$-аппроксимируема и ее подгруппа Y конечна, то группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{K}^*(X)$ множество всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{K}$. Пусть гомоморфизм с требуемыми свойствами существует и N — ядро этого гомоморфизма. Тогда $N \in \mathcal{K}^*(X)$ и $Y \cap N = 1$. Значит, подгруппы Y и N поэлементно перестановочны. Следовательно, N содержится в централизаторе $C_X(Y)$ подгруппы Y группы X. Отсюда и из того, что группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$, как легко видеть, изоморфна фактор-группе $X/C_X(Y)$, получаем, что

$$\mathrm{Aut}_X(Y) \cong X/C_X(Y) \cong (X/N)/(C_X(Y)/N) \in \mathcal{K},$$

так как класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации.

Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений, то в силу теоремы Ремака пересечение конечного числа подгрупп семейства $\mathcal{K}^*(X)$ снова является подгруппой данного семейства. Поэтому, пользуясь $\mathcal{K}$-аппроксимируемостью группы X и конечностью подгруппы Y, можем найти подгруппу $N \in \mathcal{K}^*(X)$ такую, что $Y \cap N = 1$. Предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y, $\rho\colon Y \to \mathrm{Aut}\, Z$ — сопровождающий гомоморфизм. Если группы Z и Y $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, а группа $Y\rho$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, то расщепляемое расширение X является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.*

Доказательство. Предположение о том, что группа X представляет собой расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y, означает, напомним, что Y — подгруппа группы X, Z — нормальная подгруппа группы X, $X = YZ$ и $Y \cap Z = 1$. Отображение ρ группы Y в группу автоморфизмов группы Z, сопоставляющее элементу $y \in Y$ ограничение на подгруппу Z внутреннего автомофизма группы X, производимого элементом y, является гомоморфным и называется сопровождающим гомоморфизмом этого расщепляемого расширения.

Обозначим через C ядро гомоморфизма ρ. Так как подгруппа C нормальна в группе Y и подгруппа Z нормальна в группе X, то подгруппа CZ нормальна в X и

$$X/CZ = YZ/CZ = YCZ/CZ \cong Y/(Y \cap CZ) = Y/C \cong Y\rho.$$

Отсюда и из того, что группа $Y\rho$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, получаем, что $X/CZ \in \mathcal{K}$.

Очевидно, что подгруппа C поэлементно перестановочна с Z. Поэтому подгруппа CZ является прямым произведением $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп C, Z и, следовательно, $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Значит, согласно предложению 3 группа X $\mathcal{K}$-аппроксимируема как расширение $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathcal{K}$-группы. Предложение доказано.

Теперь покажем справедливость утверждения теоремы.

Очевидно, что фактор-группа G/H изоморфна свободному произведению фактор-групп A/H и B/K. Рассмотрим гомоморфизм группы G/H на прямое произведение этих групп, действующий тождественно на подгруппах A/H и B/K. Хорошо известно, что ядро D данного гомоморфизма, называемое декартовой подгруппой группы G/H, является свободной группой.

Пусть N — нормальная подгруппа группы G такая, что $D = N/H$. Тогда $G/N \cong A/H \times B/K$. Отсюда, из условий $A/H, B/K \in \mathcal{K}$ и замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно прямых произведений, следует, что фактор-группа G/N принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Подгруппа N представляет собой расширение группы H с помощью свободной группы N/H. Как известно, такое расширение расщепляемо, то есть в N существует свободная подгруппа F, изоморфная N/H, такая, что N является расщепляемым расширением H при помощи F. Очевидно, что если ρ — сопровождающий гомоморфизм этого расширения, то $F\rho$ оказывается подгруппой группы $\mathrm{Aut}_G(H)$.

Как уже отмечалось выше, каждая свободная группа $\mathcal{K}$-аппроксимируема для любого корневого класса групп $\mathcal{K}$. Значит, группа F $\mathcal{K}$-аппроксимируема. В силу замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп группа H принадлежит классу $\mathcal{K}$. Следовательно, она также $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Наконец, $F\rho$ содержится в классе $\mathcal{K}$ как подгруппа $\mathcal{K}$-группы $\mathrm{Aut}_G(H)$.

Следовательно, в силу предложения 5 расщепляемое расширение N является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.

Таким образом, G — расширение $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы N при помощи $\mathcal{K}$-группы G/N. Следовательно, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу предложения 3. Теорема доказана.

Переходя к доказательству следствий, видим, что необходимость условия следствия 1 имеет место в силу предложения 4, а достаточность — в силу теоремы.

Докажем следствия 2 и 3. Для этого достаточно показать, что группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Тогда в силу теоремы группа G будет $\mathcal{K}$-аппроксимируемой.

Очевидно, что группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ порождается подгруппами $U = \mathrm{Aut}_A(H)$ и $V = \varphi\,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$. Так как A и B — $\mathcal{K}$-группы, то согласно предложению 4 группы $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\mathrm{Aut}_B(K)$ также принадлежат классу $\mathcal{K}$.

Если H — циклическая группа, то $\mathrm{Aut}\,H$ — абелева группа. Известно, что подгруппа, порожденная двумя подгруппами в абелевой группе, является их произведением. Поэтому $\mathrm{Aut}_G(H) = UV$ и $\mathrm{Aut}_G(H)/V \cong U/U \cap V$. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации получаем, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — расширение $\mathcal{K}$-группы при помощи $\mathcal{K}$-группы. Так как класс $\mathcal{K}$ корневой, то такое расширение является $\mathcal{K}$-группой. Значит, группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Теперь рассмотрим случай, когда хотя бы одна из подгрупп H и K лежит в центре соответствующего свободного множителя. Пусть для определенности подгруппа H центральна в группе A. Тогда группа $\mathrm{Aut}_A(H)$ состоит только из тождественного отображения группы H, а потому является единичной. Следовательно, группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ совпадает со своей подгруппой $\varphi \,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$. Последняя принадлежит классу $\mathcal{K}$ ввиду изоморфности группе $\mathrm{Aut}_B(K)$. Следствия доказаны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29 —62.

2. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193 —209.

3. Higman G. Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1963. Vol. 1. P. 301 —305.

4. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 1. С. 150 —152.

5. Азаров Д. Н., Тьеджо Д. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Вып. 5. С. 6 —10.

6. Karrass A., Solitar D. The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 150. P. 227 —255.

Ивановский государственный университет
Поступило 13.09.2013