Математические заметки

Том 95 выпуск 4 апрель 2014

УДК 512.543

Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп

Е. А. Туманова

Получен критерий аппроксимируемости конечными π-группами обобщенного свободного произведения двух конечных π-групп с нормальными объединенными подгруппами. На основе этого критерия для обобщенного свободного произведения двух произвольных групп с нормальными объединениями найдены как необходимые, так и достаточные условия аппроксимируемости конечными π-группами, аналогичные условиям Баумслага для свойства финитной аппроксимируемости. Указан ряд применений этого результата.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm10210

1. Введение. Пусть $\mathcal{K}$ – некоторый класс групп. Группа G называется *аппроксимируемой классом* $\mathcal{K}$ (*$\mathcal{K}$-аппроксимируемой*), если для каждого неединичного элемента x группы G существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что образ элемента x относительно φ отличен от единицы.

Если в качестве $\mathcal{K}$ взять класс $\mathcal{F}$ всех конечных групп, то понятие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость, где p – простое число, $\mathcal{F}_p$ – класс всех конечных p-групп. Менее исследовано свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где π – непустое множество простых чисел, $\mathcal{F}_\pi$ – класс всех конечных π-групп.

В данной статье рассматриваются условия $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп, т.е. свободного произведения

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

групп A и B с подгруппами $H \leqslant A$ и $K \leqslant B$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi\colon H \to K$.

Баумслаг [1] доказал, что свободное произведение двух конечных групп с объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой. Этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость, так как существуют примеры обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп, не являющегося $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой (один из них приводится ниже). Критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп был получен Хигманом [2].

При дополнительном предположении о нормальности объединяемых подгрупп H и K в соответствующих свободных множителях A и B подгруппа H является нормальной в группе G, и потому ограничение на подгруппу H любого внутреннего автоморфизма группы G является автоморфизмом группы H. Множество $\mathrm{Aut}_G(H)$ всех таких автоморфизмов является подгруппой группы $\mathrm{Aut}(H)$ всех автоморфизмов группы H. В этом случае следствием критерия Хигмена является

Предложение [2]. *Свободное произведение G конечных p-групп A и B с объединенными нормальными подгруппами H и K является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H)$ – конечная p-группа.*

Приведем теперь пример свободного произведения G двух конечных p-групп с нормальной объединенной подгруппой H, для которого $\mathrm{Aut}_G(H)$ не является p-группой.

Пусть H – четверная группа Клейна, $1 = h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4$ – ее элементы, α, β – автоморфизмы группы H, действующие по правилам

$$
\begin{array}{llll}
h_1\alpha = h_1, & h_2\alpha = h_3, & h_3\alpha = h_2, & h_4\alpha = h_4, \\
h_1\beta = h_1, & h_2\beta = h_4, & h_3\beta = h_3, & h_4\beta = h_2.
\end{array}
$$

Пусть также A и B – расширения группы H при помощи групп автоморфизмов $\langle\alpha\rangle$ и $\langle\beta\rangle$ соответственно, $G = (A * B; H = H, \mathrm{id})$. Тогда группы A и B имеют порядок 8 и, следовательно, являются конечными 2-группами, подгруппа H нормальна в группах A и B, $\alpha \in \mathrm{Aut}_A(H)$, $\beta \in \mathrm{Aut}_B(H)$. При этом элемент $\alpha\beta$ группы $\mathrm{Aut}_G(H)$, как легко видеть, имеет порядок 3. Таким образом, $\mathrm{Aut}_G(H)$ не является 2-группой, и в силу предложения группа G не аппроксимируется конечными 2-группами.

В данной статье будет показано, что утверждение, аналогичное сформулированному выше предложению, справедливо в более общей ситуации. А именно, будет доказана следующая

Теорема 1. *Пусть π – некоторое множество простых чисел, A и B – конечные π-группы, H и K – нормальные подгруппы групп A и B соответственно, φ – изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. Свободное произведение $G = (A * B; H = K, \varphi)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H)$ – конечная π-группа.*

Доказательство теоремы 1 приводится в п. 3. С помощью этой теоремы в п. 4 получены как необходимые, так и достаточные условия аппроксимируемости конечными π-группами обобщенного свободного произведения с объединенными (нормальными) подгруппами (теорема 2), аналогичные известным условиям Баумслага [1] финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп. Эти условия позволили доказать следующие теоремы.

Теорема 3. *Если группы A и B $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы, а H и K – конечные нормальные подгруппы групп A и B соответственно, то группа*

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

$\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H)$ – конечная π-группа.

Теорема 4. *Пусть группа A $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, а B является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой конечно порожденной нильпотентной группой. Если H – собственная нормальная подгруппа группы A и K – собственная центральная подгруппа группы B, то группа*

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

$\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда H является $\mathcal{F}_\pi$-отделимой подгруппой группы A и K является $\mathcal{F}_\pi$-отделимой подгруппой группы B.

Теорема 5. *Пусть группа A $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, а B является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой конечно порожденной нильпотентной группой. Если H – собственная нормальная подгруппа группы A, K – собственная нормальная подгруппа группы B и группы H и K являются циклическими, то группа*

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

$\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда H является $\mathcal{F}_\pi$-отделимой подгруппой группы A и K является $\mathcal{F}_\pi$-отделимой подгруппой группы B.

Напомним, что подмножество M группы X называется *$\mathcal{F}_\pi$-отделимым* в группе X, если для любого элемента x группы X, не принадлежащего подмножеству M, существует гомоморфизм φ группы X на конечную π-группу такой, что $x\varphi \notin M\varphi$.

Отметим, что частным случаем теоремы 3 для одноэлементного множества π является теорема 1 из [3]. Теорема 4 обобщает еще одно утверждение из той же работы, в котором установлен критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения конечно порожденных нильпотентных групп с собственными центральными объединенными подгруппами.

Из теоремы 3 вытекает также следующее утверждение.

Следствие. *Пусть группы A и B $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы и H и K – конечные нормальные подгруппы групп A и B соответственно. Если группы H и K являются циклическими, то группа*

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

$\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

Доказательство теоремы 3 приводится в п. 5. Теоремы 4 и 5 доказываются параллельно в п. 6. Пункт 2 содержит доказательства следствия и некоторых вспомогательных утверждений.

2. Предварительные замечания.

Предложение 1. *Пусть G – произвольная группа, H – конечная нормальная подгруппа группы G. Если существует гомоморфизм φ группы G в конечную π-группу, инъективный на H, то $\operatorname{Aut}_G(H)$ – конечная π-группа. В частности, если группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то $\operatorname{Aut}_G(H)$ – конечная π-группа.*

Доказательство. Пусть гомоморфизм с требуемыми свойствами существует, и пусть N – ядро этого гомоморфизма. Тогда N – нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G и $H \cap N = 1$. Значит, подгруппы H и N поэлементно перестановочны. Следовательно, N содержится в централизаторе $C_G(H)$ подгруппы H

группы G. Поэтому $C_G(H)$ – подгруппа конечного π-индекса группы G. Отсюда и из того, что группа $\mathrm{Aut}_G(H)$, как легко видеть, изоморфна фактор-группе $G/C_G(H)$, следует, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ – конечная π-группа. Предложение доказано.

Воспользуемся предложением 1 чтобы установить справедливость сформулированного во введении следствия из теоремы 3. Для этого достаточно показать, что из его условия вытекает, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ – конечная π-группа.

Заметим предварительно, что если H – нормальная подгруппа обобщенного свободного произведения $G=(A*B;H=K,\varphi)$, то из того, что эта группа порождается подгруппами A и B, легко следует, что подгруппа $\mathrm{Aut}_G(H)$ порождается подгруппами $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\varphi\,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$.

Поскольку группы A и B $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы, в силу предложения 1 $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\mathrm{Aut}_B(K)$ – конечные π-группы. Так как группа H является циклической, $\mathrm{Aut}(H)$ – абелева группа, а в абелевой группе подгруппа, порожденная двумя конечными π-группами, является конечной π-группой. Следовательно, $\mathrm{Aut}_G(H)$ – конечная π-группа, что и требовалось.

Напомним ряд понятий и утверждений, восходящих к работе Баумслага [1]. Пусть A и B – некоторые группы, $H\leqslant A$, $K\leqslant B$, и $\varphi\colon H\to K$ – изоморфизм группы H на группу K.

Нормальные подгруппы R и S групп A и B соответственно называются (H,K,φ)-совместимыми, если выполнено равенство $(H\cap R)\varphi=K\cap S$. В этом случае отображение $\overline{\varphi}\colon HR/R\to KS/S$, действующее по правилу

$$(hR)\overline{\varphi}=(h\varphi)S,\qquad \text{где}\quad h\in H,$$

определено корректно и является изоморфизмом подгруппы HR/R фактор-группы A/R на подгруппу KS/S фактор-группы B/S. Это позволяет наряду со свободным произведением $G=(A*B;H=K,\varphi)$ построить свободное произведение

$$G_{R,S}=(A/R*B/S;HR/R=KS/S,\overline{\varphi})$$

групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и KS/S, объединенными относительно изоморфизма $\overline{\varphi}$. Легко видеть, что существует гомоморфизм $\rho_{R,S}\colon G\to G_{R,S}$, действие которого на подгруппах A и B совпадает с действием естественных гомоморфизмов $A\to A/R$ и $B\to B/S$.

Пусть $\{(R_\lambda,S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – семейство всех пар нормальных (H,K,φ)-совместимых подгрупп конечного индекса групп A и B соответственно. Баумслаг заметил (см. [1; предложение 2]), что если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями. Обратно, он показал, используя упомянутый выше свой результат о финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп, что если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является H-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является K-фильтрацией, то группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема.

(Семейство $\{U_i\}_{i\in I}$ нормальных подгрупп некоторой группы V называется *фильтрацией*, если $\bigcap_{i\in I}U_i=1$. Пусть W – подгруппа группы V. Фильтрация $\{U_i\}_{i\in I}$ называется W-*фильтрацией*, если $\bigcap_{i\in I}WU_i=W$.)

При дополнительном предположении нормальности объединяемых подгрупп в соответствующих свободных множителях здесь будет получен аналог этого результата для свойства $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости. Для этого нам понадобится определенная специализация понятия (H,K,φ)-совместимости.

Пусть снова A и B – некоторые группы, $H \leqslant A$, $K \leqslant B$ и $\varphi\colon H \to K$ – изоморфизм группы H на группу K. Предположим еще, что H – нормальная подгруппа группы A, K – нормальная подгруппа группы B.

Нормальные подгруппы $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$ назовем (H,K,φ,π)-*совместимыми*, если

1) подгруппы R и S (H,K,φ)-совместимы;
2) индексы подгрупп R и S в группах A и B соответственно конечны и являются π-числами;
3) подгруппа группы $\operatorname{Aut}(HR/R)$, порождаемая подгруппами $\operatorname{Aut}_{A/R}(HR/R)$ и $\overline{\varphi}\operatorname{Aut}_{B/S}(KS/S)\overline{\varphi}^{\,-1}$, является конечной π-группой.

Предложение 2. *Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – свободное произведение некоторых групп A и B с нормальными подгруппами H и K соответственно, объединенными относительно изоморфизма $\varphi\colon H \to K$. Пусть N – нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G. Тогда подгруппы $R = A \cap N$ и $S = B \cap N$ (H,K,φ,π)-совместимы.*

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что подгруппы R и S удовлетворяют первым двум условиям из определения (H,K,φ,π)-совместимых подгрупп.

Обозначим через $\overline{A}$ фактор-группу A/R, через $\overline{B}$ – фактор-группу B/S, через $\overline{H}$ и $\overline{K}$ – подгруппы HR/R и KS/S соответственно, через $\overline{G}$ – группу $G_{R,S}$. Таким образом,

$$\overline{G} = (\overline{A} * \overline{B}; \overline{H} = \overline{K}, \overline{\varphi}).$$

Поскольку, как отмечено выше, подгруппа $\operatorname{Aut}_{\overline{G}}(\overline{H})$ в группе $\operatorname{Aut}(\overline{H})$ совпадает с подгруппой, порождаемой подгруппами $\operatorname{Aut}_{A/R}(HR/R)$ и $\overline{\varphi}\operatorname{Aut}_{B/S}(KS/S)\overline{\varphi}^{\,-1}$, достаточно показать, что $\operatorname{Aut}_{\overline{G}}(\overline{H})$ является конечной π-группой.

Определим отображения

$$\alpha\colon \overline{A} \to G/N \qquad \text{и} \qquad \beta\colon \overline{B} \to G/N$$

по правилам

$$(aR)\alpha = aN, \quad \text{где} \quad aR \in \overline{A}, \qquad \text{и} \qquad (bS)\beta = bN, \quad \text{где} \quad bS \in \overline{B},$$

соответственно.

Легко видеть, что данные отображения определены корректно и являются инъективными гомоморфизмами, согласованными с изоморфизмом $\overline{\varphi}$, т.е. $\overline{h}\alpha = \overline{h}\overline{\varphi}\beta$ для каждого элемента $\overline{h}$ группы $\overline{H}$. Тогда существует гомоморфизм ρ группы $\overline{G}$ в группу G/N, действие которого на подгруппах $\overline{A}$ и $\overline{G}$ совпадает с действием гомоморфизмов α и β соответственно. Очевидно, что определенный таким образом гомоморфизм ρ инъективен на подгруппе $\overline{H}$. Следовательно, в силу предложения 1 $\operatorname{Aut}_{\overline{G}}(\overline{H})$ – конечная π-группа.

Таким образом, для подгрупп R и S групп A и B соответственно выполнены все условия из определения (H,K,φ,π)-совместимых подгрупп. Предложение доказано.

3. Доказательство теоремы 1. Необходимость условия в этой теореме имеет место в силу предложения 1. Докажем достаточность. Пусть $\mathrm{Aut}_G(H)$ – конечная π-группа.

Очевидно, что фактор-группа G/H изоморфна свободному произведению фактор-групп A/H и B/K. Рассмотрим гомоморфизм группы G/H на прямое произведение групп A/H и B/K, действующий тождественно на подгруппах A/H и B/K. Хорошо известно, что ядро D этого гомоморфизма, называемое *декартовой подгруппой* группы G/H, является свободной группой.

Пусть N – нормальная подгруппа группы G такая, что $D = N/H$. Тогда $G/N \cong A/H \times B/K$, и поэтому G/N – конечная π-группа.

Таким образом, N – расширение группы H с помощью свободной группы N/H. Как известно, такое расширение расщепляемо, т.е. в N существует свободная подгруппа F, изоморфная N/H, такая, что N является расщепляемым расширением H при помощи F.

Отображение $\rho\colon F \to \mathrm{Aut}_G(H)$, сопоставляющее каждому элементу f группы F ограничение внутреннего автоморфизма $\hat{f}$ группы N на подгруппу H, является гомоморфизмом. Поскольку $F\rho \subseteq \mathrm{Aut}_G(H)$, подгруппа $\mathrm{Ker}\,\rho$ имеет конечный π-индекс в группе F. Так как $[N : F] = |H|$ и каждый элемент из $\mathrm{Ker}\,\rho$ перестановочен с каждым элементом из H, то подгруппа $\mathrm{Ker}\,\rho$ нормальна и имеет конечный π-индекс также и в группе N.

Поскольку произвольная свободная группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для любого простого числа p, группа F $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Значит, подгруппа N является расширением $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой подгруппы $\mathrm{Ker}\,\rho$ при помощи конечной π-группы. Поэтому группа N $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. В свою очередь, N – $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G, следовательно, группа G также $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Теорема доказана.

4. Условия $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения с нормальным объединением.

Теорема 2. *Пусть H – нормальная подгруппа группы A, K – нормальная подгруппа группы B, $\varphi\colon H \to K$ – изоморфизм, $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – семейство всех пар (H, K, φ, π)-совместимых подгрупп групп A и B соответственно. Если группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями. Если выполняется одно из следующих двух равносильных условий*:

1) *семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями, подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе B*;
2) *семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является H-фильтрацией, семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является K-фильтрацией*,

то группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

Доказательство. Докажем *необходимость* условия. Пусть группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Покажем, что тогда семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – фильтрация.

Пусть g – произвольный отличный от 1 элемент группы A. Значит, g отличен от 1 и в группе G. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, следовательно, существует нормальная подгруппа N конечного π-индекса группы G такая, что $g \notin N$. Полагая $R = A \cap N$ и $S = B \cap N$, имеем $g \notin R$, и по предложению 2 подгруппы R

и S (H, K, φ, π)-совместимы. Так как семейство $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ состоит из всех пар (H, K, φ, π)-совместимых подгрупп групп A и B соответственно, то существует такое $\lambda \in \Lambda$, что $R_\lambda = R$ и $S_\lambda = S$. Поскольку элемент g был выбран произвольным и $g \notin R_\lambda$, то $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda = 1$.

Таким образом, семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией.

Аналогично доказывается, что $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – фильтрация.

Проверим равносильность условий 1) и 2). Первое условие очевидным образом следует из второго. Покажем, что справедливость условия 1) в свою очередь влечет условие 2).

Пусть $a \in A \setminus H$ – произвольный элемент. Так как H – $\mathcal{F}_\pi$-отделимая нормальная подгруппа группы A, то фактор-группа A/H $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Значит, существует нормальная подгруппа X/H конечного π-индекса группы A/H, не содержащая aH. Тогда X – нормальная подгруппа конечного π-индекса группы A такая, что $a \notin X$. Положим $Y = B$. Так как $H \leqslant X$ и $K \leqslant Y$, то подгруппы X и Y (H, K, φ, π)-совместимы. Следовательно, семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – H-фильтрация. Аналогично показывается, что $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является K-фильтрацией.

Докажем *достаточность* условия. Так как подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе A, и подгруппа K $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе B, то фактор-группы A/H и B/K $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы. Свободное произведение G/H $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых групп A/H и B/K также является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группой [4].

Покажем, что группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Пусть g – произвольный неединичный элемент группы G. Тогда возможны два случая: $g \notin H$ и $g \in H$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $\varepsilon\colon G \to G/H$ – естественный гомоморфизм. Так как $g \notin H$, то $g\varepsilon$ – отличный от 1 элемент $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы G/H. Поэтому существует гомоморфизм ψ группы G/H в конечную π-группу такой, что $g\varepsilon\psi \neq 1$.

Рассмотрим второй случай: элемент g группы G содержится в H. Тогда $g \in A$. $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – фильтрация, значит, найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $g \notin R_{\lambda_0}$. Обозначим через R подгруппу R_{λ_0}, через S – подгруппу S_{λ_0} и рассмотрим группу

$$G_{R,S} = (A/R * B/S; HR/R = KS/S, \overline{\varphi}).$$

Подействовав гомоморфизмом $\rho_{R,S}$ на элемент g, получим отличный от 1 элемент gR фактор-группы A/R.

Заметим, что группа $G_{R,S}$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема в силу теоремы 1 и определения (H, K, φ, π)-совместимых подгрупп. Значит, существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ в конечную π-группу такой, что $(gR)\sigma \neq 1$.

Таким образом, группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 3. *Необходимость* условия имеет место в силу предложения 1. Проверим *достаточность*.

Пусть $\mathrm{Aut}_G(H)$ – конечная π-группа. Пусть также $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – семейство всех пар (H, K, φ, π)-совместимых подгрупп групп A и B соответственно.

Покажем, что если R и S – нормальные (H, K, φ)-совместимые подгруппы конечного π-индекса групп A и B соответственно, то R и S (H, K, φ, π)-совместимы. Действительно, (H, K, φ)-совместимость подгрупп R и S позволяет построить свободное произведение

$$G_{R,S} = (A/R * B/S; HR/R = KS/S, \overline{\varphi}).$$

Так как гомоморфизм $\rho_{R,S}\colon G \to G_{R,S}$ сюръективен и переводит нормальную подгруппу H группы G в подгруппу HR/R группы $G_{R,S}$, то группа $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ является гомоморфным образом конечной π-группы $\mathrm{Aut}_G(H)$. Следовательно, $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ также является конечной π-группой. Таким образом, подгруппы R и S (H, K, φ, π)-совместимы.

Покажем, что $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – фильтрация. Пусть a – произвольный неединичный элемент группы A. Группа A $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, значит, в ней существует нормальная подгруппа M конечного π-индекса, не содержащая a. Так как H – конечная подгруппа $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы A, то найдется нормальная подгруппа N конечного π-индекса этой группы, тривиально пересекающаяся с H. Обозначим $R = M\cap N$. Тогда R – нормальная подгруппа конечного π-индекса группы A, $R\cap H = 1$ и $a\notin R$.

В группе B найдем нормальную подгруппу конечного π-индекса S такую, что $K\cap S = 1$. Тогда подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы. Значит, они (H, K, φ, π)-совместимы, и для некоторого номера $\lambda\in\Lambda$, $R = R_\lambda$. Таким образом, $a\notin R_\lambda$, следовательно, $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – фильтрация.

Аналогично доказывается, что $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – фильтрация. Отсюда следует, в частности, что группы A и B $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы.

Легко видеть, что произвольная конечная подгруппа $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы является $\mathcal{F}_\pi$-отделимой. Таким образом, подгруппы H и K $\mathcal{F}_\pi$-отделимы в группах A и B соответственно, и группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема в силу теоремы 2. Теорема доказана.

6. Доказательство теорем 4 и 5. Проверим *достаточность* условий теорем. Пусть R – нормальная подгруппа конечного π-индекса группы A. Покажем, что тогда существует нормальная подгруппа S конечного π-индекса группы B такая, что R и S (H, K, φ)-совместимы. Обозначим $H\cap R$ через U, $U\varphi$ – через V. Таким образом, нам достаточно найти подгруппу S конечного π-индекса группы B такую, что $K\cap S = V$.

Обозначим через π' множество всех простых чисел, не принадлежащих π. Напомним, что подгруппа Y некоторой группы X называется *π'-изолированной*, если для произвольного элемента x группы X и произвольного π'-числа q из того, что x^q – элемент подгруппы Y, следует, что x также является элементом подгруппы Y. Легко видеть, что каждая $\mathcal{F}_\pi$-отделимая подгруппа π'-изолирована.

Так как R – нормальная подгруппа конечного π-индекса группы A, то U – нормальная подгруппа конечного π-индекса группы H. Следовательно, V – нормальная подгруппа конечного π-индекса группы K. Так как K – $\mathcal{F}_\pi$-отделимая подгруппа группы B, то K π'-изолирована в B. Отсюда и из того, что V – нормальная подгруппа конечного π-индекса группы K, следует π'-изолированность подгруппы V в группе B. В работе [5] показано, что в конечно порожденной нильпотентной группе для любого простого числа p каждая p'-изолированная подгруппа является $\mathcal{F}_p$-отделимой. Практически не меняя рассуждений из [5], можно доказать, что для любого множества простых чисел π произвольная π'-изолированная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы $\mathcal{F}_\pi$-отделима. Следовательно, V является $\mathcal{F}_\pi$-отделимой подгруппой группы B.

Если K – центральная подгруппа группы B, то V, очевидно, нормальна в B. Если же K – нормальная циклическая подгруппа группы B, то и любая ее подгруппа будет нормальна в B. Таким образом, V – нормальная $\mathcal{F}_\pi$-отделимая подгруппа группы B, поэтому фактор-группа B/V $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

Итак, K/V – конечная π-подгруппа $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы B/V. Следовательно, существует нормальная подгруппа S/V конечного π-индекса группы B/V такая, что $K/V \cap S/V = 1$. Значит, $K \cap S = V$, и подгруппа S является искомой.

Покажем теперь, что произвольные нормальные (H, K, φ)-совместимые подгруппы R и S конечного π-индекса групп A и B соответственно являются (H, K, φ, π)-совместимыми. Как и выше, для этого достаточно показать, что $\operatorname{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ – конечная π-группа.

В случае центральности подгруппы K в группе B группа $\operatorname{Aut}_{B/S}(KS/S)$ является единичной. Поэтому подгруппа группы $\operatorname{Aut}(HR/R)$, порождаемая подгруппами $\operatorname{Aut}_{A/R}(HR/R)$ и $\overline{\varphi}\operatorname{Aut}_{B/S}(KS/S)\overline{\varphi}^{-1}$, совпадает с $\operatorname{Aut}_{A/R}(HR/R)$. Из предложения 1 следует, очевидно, что $\operatorname{Aut}_{A/R}(HR/R)$ – конечная π-группа.

Теперь рассмотрим случай, когда K – нормальная циклическая подгруппа группы B. Тогда в силу следствия из теоремы 3 группа $G_{R,S}$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Из предложения 1 теперь получаем, что $\operatorname{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ – конечная π-группа.

Тем самым, (H, K, φ, π)-совместимость подгрупп R и S доказана.

Таким образом, нами показано, что если $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – семейство всех пар (H, K, φ, π)-совместимых подгрупп групп A и B соответственно, то произвольная нормальная подгруппа R конечного π-индекса группы A принадлежит семейству $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Отсюда и из $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы A следует, что это семейство является фильтрацией.

Покажем теперь, что семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ есть фильтрация. Пусть x – произвольный неединичный элемент группы B, и предположим сначала, что $x \in K$. Тогда существует неединичный элемент h группы H такой, что $h\varphi = x$. Так как группа A $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, найдется нормальная подгруппа R конечного π-индекса группы A, не содержащая h. В силу доказанного существует нормальная подгруппа S конечного π-индекса группы B такая, что R и S (H, K, φ, π)-совместимы. Тогда x не может принадлежать подгруппе S, а значит, и пересечению всех подгрупп семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Пусть теперь $x \notin K$. Тогда xK – неединичный элемент фактор-группы B/K. Из предположения об $\mathcal{F}_\pi$-отделимости подгруппы K в группе B следует $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость фактор-группы B/K. Значит, существует нормальная подгруппа N/K конечного π-индекса группы B/K, не содержащая элемент xK. Тогда N – нормальная подгруппа конечного π-индекса группы B, содержащая подгруппу K и не содержащая элемента x. Так как $K \subseteq N$, подгруппы A и N являются, очевидно, (H, K, φ)-совместимыми, и потому в силу доказанного выше подгруппа N принадлежит семейству $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Следовательно, элемент x не принадлежит пересечению всех подгрупп семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, и утверждение о том, что это семейство является фильтрацией, доказано.

$\mathcal{F}_\pi$-Аппроксимируемость группы G следует теперь из теоремы 2.

Необходимость условий в теоремах 4 и 5 будем доказывать от противного.

Если подгруппа H не является $\mathcal{F}_\pi$-отделимой в группе A, то существует элемент a группы A, не принадлежащий подгруппе H, такой, что для любой нормальной подгруппы N конечного π-индекса группы A справедливо включение $a \in HN$. Так как

K – собственная подгруппа группы B, можем выбрать элемент b группы B, не принадлежащий подгруппе K. Заметим, что в обеих теоремах подгруппа H является абелевой.

Рассмотрим элемент

$$g = [a, b^{-1}ab] = a^{-1}b^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab$$

группы G. Он имеет несократимую запись длины 8 и, следовательно, отличен от единицы. Пусть M – произвольная нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G и $N = M \cap A$. Так как N является нормальной подгруппой конечного π-индекса группы A, имеем $a \in HN$, и потому для некоторого элемента h подгруппы H выполнено сравнение $a \equiv h \pmod N$. Следовательно, $a \equiv h \pmod M$. И, значит,

$$[a, b^{-1}ab] \equiv [h, b^{-1}hb] \pmod M.$$

Так как H является нормальной абелевой подгруппой группы G, $[h, b^{-1}hb] = 1$, откуда получаем включение $g \in M$. Таким образом, неединичный элемент g группы G лежит в каждой нормальной подгруппе конечного π-индекса группы G, что противоречит $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G.

Таким образом $\mathcal{F}_\pi$-отделимость в группе A подгруппы H доказана. Доказательство $\mathcal{F}_\pi$-отделимости в группе B подгруппы K является аналогичным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] G. Baumslag, "On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **106** (1963), 193–209.

[2] G. Higman, "Amalgams of p-groups", *J. Algebra*, **1**:3 (1964), 301–305.

[3] Е. В. Соколов, "Об аппроксимируемости конечными P-группами некоторых свободных произведений с объединенной подгруппой", *Чебышевский сб.*, **3**:1 (2002), 97–102.

[4] K. W. Gruenberg, "Residual properties of infinite soluble groups", *Proc. London Math. Soc.* (3), **7** (1957), 29–62.

[5] Е. Д. Логинова, "Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами", *Сиб. матем. журн.*, **40**:2 (1999), 395–407.

Е. А. Туманова
Ивановский государственный университет
E-mail: helenfog@bk.ru

Поступило
05.10.2012
Исправленный вариант
11.06.2013