Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Ивановский государственный университет»

На правах рукописи
УДК 512.543

Туманова Елена Александровна

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГРУПП

Специальность 01.01.06 —
математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Д. И. Молдаванский

Иваново – 2014

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. В современной теории групп значительное место занимают свободные конструкции групп, а именно, свободные произведения, обобщенные свободные произведения (т. е. свободные произведения с объединенными подгруппами) и HNN-расширения. Изучение различных свойств этих конструкций, как правило, осуществляется в рамках ветви теории групп, называемой комбинаторной теорией групп. Одно из направлений современных исследований по данной тематике заключается в рассмотрении аппроксимационных свойств свободных конструкций групп. Наиболее изученным среди таких свойств является ставшее уже классическим свойство финитной аппроксимируемости, то есть аппроксимируемости классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп.

Впервые понятие финитно аппроксимируемой группы появилось в работе А. И. Мальцева [17], опубликованной в 1940 году, и вскоре стало широко исследуемым не только в нашей стране, но и за рубежом. Сравнительно быстро было установлено, что обычное свободное произведение наследует от сомножителей выполнимость данного свойства [40]. В то же время стало понятно, что ситуация с обобщенным свободным произведением, а позднее — и с HNN-расширением является более сложной: группы, построенные таким образом из финитно аппроксимируемых групп, могут не быть финитно аппроксимируемыми. Это привело к возникновению значительного числа работ, направленных на получение достаточных условий сохранения свободными конструкциями свойства финитной аппроксимируемости.

Г. Баумслаг доказал, что свободное произведение двух конечных групп с объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой [32]. Представленная в статье [32] методика изучения финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений была перенесена на HNN-расширения Б. Баумслагом и М. Треткоффом [30], доказавшими также финитную аппроксимируемость HNN-расширения произвольной конечной группы. Последний факт был независимо установлен Д. Коэном [37]. Эти работы стали основополагающими в исследовании аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений и HNN-расширений.

Несмотря на то, что на данный момент уже получено большое количество результатов в указанном направлении, изучение финитной аппроксимируемости и по сей день не утратило свою актуальность, так как до сих пор имеется довольно много открытых вопросов. Поэтому и в настоящее время ученые различных стран не оставляют без внимания это свойство. Например, в 2011 году Д. Н. Азаровым и А. В. Розовым был найден критерий финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух финитно аппроксимируемых разрешимых групп конечного ранга с собственными нормальными объединенными подгруппами [5]. Кроме того, в [2], [3], [20], [36], [39], [42] и [50] также анализируются условия финитной аппроксимируемости свободных конструкций групп.

За время своего существования понятие финитной аппроксимируемости многократно обобщалось, расширялось и уточнялось в различных направлениях. В результате появились понятия аппроксимируемости классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп, где p — простое число, аппроксимируемости классом $\mathcal{F}_\pi$ всех конечных π-групп, где π — непустое множество простых чисел, аппроксимируемости классом $\mathcal{FS}_\pi$ всех конечных разрешимых π-групп и многие другие. Наконец, самое общее в этом направлении — понятие аппроксимируемости произвольным классом групп $\mathcal{K}$.

В данной диссертационной работе будет рассмотрено свойство аппроксимируемости корневыми классами групп.

Следуя К. Грюнбергу [40], содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп $\mathcal{K}$ будем называть корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяет условию Грюнберга: если X — некоторая группа и $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X такой, что X/Y, $Y/Z \in \mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и $X/T \in \mathcal{K}$.

Данное определение не позволяет легко разграничить корневые и некорневые классы групп. Характеризация корневых классов в других терминах была дана Е. В. Соколовым [51] (см. предложение 1.3.1 ниже). Что же касается корневых классов, состоящих только из конечных групп, то для них известна еще более понятная и легко проверяемая характеризация: класс конечных групп является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений [11]. Имеет смысл упомянуть и тот факт, что пересечение любых двух корневых классов групп — снова корневой класс [51].

Легко видеть, что корневыми являются многие активно изучаемые классы групп: класс всех конечных групп; периодических π-групп, где π — непустое множество простых чисел; разрешимых групп; всех групп без кручения. Отметим, что к числу их пересечений принадлежат упоминавшиеся выше классы $\mathcal{F}_p$, $\mathcal{F}_\pi$ и $\mathcal{FS}_\pi$. Поэтому свойство аппроксимируемости корневым классом обобщает такие интенсивно исследуемые свойства как финитная аппроксимируемость, аппроксимируемость конечными p-группами, аппроксимируемость разрешимыми группами, а также позволяет систематизировать и интегрировать в единое целое отдельные известные результаты теории аппроксимируемости групп.

В упомянутой выше работе [40] К. Грюнберг показал, что если $\mathcal{K}$ — такой корневой класс групп, что всякая свободная группа $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то свободное произведение произвольного семейства $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп $\mathcal{K}$-аппроксимируемо. Позднее Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо [7] установили аппроксимируемость каждой свободной группы любым корневым классом, тем самым распространив сформулированное К. Грюнбергом утверждение на произвольный корневой класс групп.

Аппроксимируемость корневыми классами других свободных конструкций (обобщенных свободных произведений, HNN-расширений) изучалась в статьях [4], [6], [7], [9], [10], [26], [51], [52]. Другие свойства корневых классов групп рассматривались в работах [11], [12], [24], [51]. Во многих случаях удается показать, что некоторое свойство конкретного корневого класса групп справедливо не только для данного корневого класса, но и в более общей ситуации, а иногда и вовсе верно для всех корневых классов групп. Так, например, при изучении аппроксимируемости и отделимости корневыми классами групп утверждения, справедливые для уже привычных нам классов $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_p$ и $\mathcal{F}_\pi$ часто удается обобщить, накладывая на корневой класс лишь требование замкнутости относительно факторизации (т. е. взятия гомоморфных образов).

Степень разработанности темы исследования. Как уже было отмечено выше, вопрос об аппроксимируемости произвольным корневым классом $\mathcal{K}$ свободного произведения $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп разрешен положительно. Что же касается более сложно устроенных свободных конструкций групп — обобщенного свободного произведения и HNN-расширения — на данный момент имеется совсем мало простых, удобных в применении достаточных условий их аппроксимируемости произвольным корневым классом групп и, тем более, критериев.

Упоминавшиеся выше утверждения о финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп и HNN-расширения произвольной конечной группы не могут быть распространены даже на свойство аппроксимируемости классом $\mathcal{F}_p$. Критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп был получен Г. Хигманом [41]. Для $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширения конечной p-группы на данный момент установлено несколько критериев. Первыми такой критерий получили Е. Рэптис и Д. Варсос [49]. Затем Д. И. Молдаванским был найден другой критерий [19], который, как оказалось, является весьма удобным для исследования аппроксимационных свойств HNN-расширений с бесконечной базовой группой (см., например, [21], [22]). Кроме того, в последнее время был получен еще один критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширения конечной p-группы [29].

Что же касается свойства аппроксимируемости классом $\mathcal{F}_\pi$, здесь ситуация оказывается более сложной. Общего критерия аппроксимируемости данным классом обобщенного свободного произведения двух конечных π-групп до сих пор не найдено. Аналогичным образом обстоит дело и с HNN-расширением конечной π-группы. Определенные результаты удается получить, только накладывая некоторые ограничения на свободные множители и объединяемые подгруппы (в случае обобщенного свободного произведения) или базовую группу и связанные подгруппы (в случае HNN-расширения). Так, например, Д. И. Молдаванский и А. Е. Копрова доказали, что обобщенное свободное произведение двух конечных π-групп с центральными объединенными подгруппами $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемо [14]. Затем автором был получен критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных π-групп с нормальными объединенными подгруппами [54, теорема 1], частным случаем которого является упомянутое только что утверждение.

В статье [23] изучается $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых групп с центральными объединенными подгруппами. В работе [27] приводятся достаточные условия $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений, свободные множители и базовые группы которых являются конечно порожденными нильпотентными, а объединяемые и связанные подгруппы конечны. Кроме того, в [65] получен целый ряд результатов об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости HNN-расширений.

Нет утверждений общего характера и для аппроксимируемости классом $\mathcal{S}$ всех разрешимых групп. Определенное продвижение в изучении $\mathcal{S}$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений сделано в работах [43], [44], [45]. Наибольшее число результатов получено для $\mathcal{S}$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений конечно порожденных нильпотентных групп.

Переходя к более общему свойству — аппроксимируемости произвольным корневым классом, сталкиваемся с еще менее разработанной областью теории групп. В упомянутой выше статье [7] Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо рассматривают аппроксимируемость произвольным корневым классом групп $\mathcal{K}$ не только обычных, но и обобщенных свободных произведений двух групп. Ими получен критерий $\mathcal{K}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения, свободные множители которого изоморфны, а связывающий объединяемые подгруппы изоморфизм совпадает с ограничением на них изоморфизма сомножителей. При помощи доказанного в этой работе результата о $\mathcal{K}$-аппроксимируемости обычных свободных произведений найдено достаточное условие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости произвольного обобщенного свободного произведения двух групп, но оно, к сожалению, не слишком удобно в использовании. В [52] перечисленные результаты распространены на конструкцию свободного произведения произвольного семейства групп с одной объединенной подгруппой. Кроме того, в работе [52] представлено, по-видимому, первое исследование аппроксимируемости произвольным корневым классом $\mathcal{K}$ HNN-расширений групп. А именно, установлен критерий аппроксимируемости классом $\mathcal{K}$ HNN-расширения $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы с совпадающими связанными подгруппами при условии, что связывающий подгруппы изоморфизм является тождественным отображением (см. предложение 4.2.5 ниже).

Позднее в работах [10] и [51] были предприняты попытки дальнейшего исследования аппроксимируемости свободных конструкций корневыми классами групп. В [10] изучается аппроксимируемость замкнутым относительно факторизации корневым классом групп HNN-расширений с тривиально пересекающимися центральными связанными подгруппами. В [51] предметом исследования выступают условия аппроксимируемости разрешимыми $\mathcal{K}$-группами обобщенных свободных произведений двух нильпотентных $\mathcal{K}$-групп, где $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп.

В статьях [4], [9] рассматривается более слабое свойство — почти аппроксимируемость корневым классом групп.

Таким образом, несмотря на значительное число опубликованных результатов об условиях аппроксимируемости свободных конструкций групп рядом конкретных корневых классов, исследования по аппроксимируемости этих конструкций произвольным корневым классом можно считать находящимися в самом начале.

Цели и задачи исследования. Целью данной диссертационной работы является исследование аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных конструкций групп. Для реализации сформулированной цели был поставлен, а затем решен ряд *задач:*

- исследовать аппроксимируемость корневыми классами групп обобщенных свободных произведений двух групп с нормальным объединением;
- изучить аппроксимируемость корневыми классами обобщенных свободных произведений, в которых объединенная подгруппа является ретрактом хотя бы в одном из свободных множителей;

- исследовать аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений групп с совпадающими связанными подгруппами.

Научная новизна. В данной диссертационной работе автором получен ряд результатов, характеризующих свойства аппроксимируемости замкнутыми относительно факторизации, а также произвольными корневыми классами групп некоторых обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп. Все полученные результаты являются новыми. Перечислим основные из них.

Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп.

- Найдено достаточное условие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{K}$-групп с нормальными объединенными подгруппами, которое превращается в критерий, если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации. Также найдены критерии аппроксимируемости замкнутым относительно факторизации корневым классом групп $\mathcal{K}$ обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с нормальными объединенными подгруппами при различных дополнительных условиях, накладываемых на сами эти подгруппы и группы их автоморфизмов.

- Доказано, что свободное произведение произвольного семейства $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с одной объединенной подгруппой, являющейся ретрактом в каждом свободном множителе, $\mathcal{K}$-аппроксимируемо. Также получены достаточные условия $\mathcal{K}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп, объединенная подгруппа которого является ретрактом в одном из сомножителей.

- Для HNN-расширения, связанные подгруппы которого совпадают и нормальны в базовой группе, получены достаточное условие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости (в случае, когда базовая группа принадлежит классу $\mathcal{K}$) и ряд критериев $\mathcal{K}$-аппроксимируемости (в предположениях, что класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, а базовая группа $\mathcal{K}$-аппроксимируема). Кроме того, найдено достаточное условие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости HNN-расширения $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы, связанные подгруппы которого совпадают и являются ретрактами в базовой группе.

Теоретическая и практическая значимость работы. Данная диссертация носит теоретический характер. Все полученные в ней результаты, а также использованные методы исследования могут быть применены для дальнейшего изучения аппроксимационных свойств свободных конструкций групп, в частности, обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп.

Методология и методы исследования. В качестве основного метода исследования была выбрана представленная в [32] методика Г. Баумслага изучения финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений двух групп, которая затем была перенесена рядом ученых на исследование других аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений двух групп. Также была использована разработанная на ее основе Б. Баумслагом и М. Треткоффом аналогичная методика для анализа условий финитной аппроксимируемости HNN-расширений групп. Кроме того, в ходе исследования автором применялись классические приемы комбинаторной теории групп и некоторые теоремы о строении подгрупп свободных конструкций.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся основные результаты данной диссертационной работы, сформулированные в виде теорем и следствий из них, в том числе теоремы 2.3.1, 3.1.1, 3.1.2, 3.2.2, 4.3.1, 4.8.1 и следствия 2.3.2, 4.3.2.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов, выносимых на защиту, подтверждается изложенными в работе подробными доказательствами. Результаты проведенного исследования были представлены на IX Международной конференции “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”, посвященной восьмидесятилетию профессора М. Д. Гриндлингера (Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2012 г.), на научной конференции фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых “Молодая наука в классическом университете” (Иваново: ИвГУ, 2013 г.), на научных конференциях “Научно-исследовательская деятельность в классическом университете” (Иваново: ИвГУ, 2013, 2014 гг.), на международной конференции “Алгебра и математическая логика: теория и приложения” (Казань: КФУ, 2014 г.), на XII Международной конференции “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”, посвященной восьмидесятилетию профессора В. Н. Латышева (Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2014 г.), на семинаре по теории групп под руководством Д. И. Молдаванского (Иваново: ИвГУ, 2013, 2014 гг.).

Все основные результаты, полученные автором в ходе диссертационного исследования, опубликованы в 15 научных работах: 7 статьях, из которых 2 статьи опубликованы в журналах, принадлежащих списку ВАК; 4 тезисах докладов на международных конференциях и 4 тезисах докладов на конференциях в ИвГУ.

Глава 1

Основные понятия

1.1. Аппроксимируемость и отделимость

Напомним еще раз, что группа X называется *аппроксимируемой классом групп* $\mathcal{L}$ (*$\mathcal{L}$-аппроксимируемой*), если для каждого неединичного элемента $x \in X$ существует гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{L}$ (*$\mathcal{L}$-группу*), переводящий x в элемент, отличный от единицы. Обобщением $\mathcal{L}$-аппроксимируемости служит понятие *отделимости в классе* $\mathcal{L}$ (*$\mathcal{L}$-отделимости*), введенное А. И. Мальцевым в [18]. Подмножество M группы X называется $\mathcal{L}$-отделимым в этой группе, если для каждого элемента $x \in X \setminus M$ существует гомоморфизм σ группы X на $\mathcal{L}$-группу такой, что $x\sigma \notin M\sigma$. Очевидно, что $\mathcal{L}$-аппроксимируемость группы X равносильна $\mathcal{L}$-отделимости в ней ее единичной подгруппы.

Всюду далее, если $\mathcal{L}$ — некоторый класс групп, X — произвольная группа, через $\mathcal{L}^*(X)$ будем обозначать множество всех таких нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{L}$.

Заметим, что между всевозможными гомоморфизмами группы X на группы из класса $\mathcal{L}$ и подгруппами семейства $\mathcal{L}^*(X)$ существует взаимно однозначное соответствие: каждый такой гомоморфизм определяет подгруппу из $\mathcal{L}^*(X)$ — ядро данного гомоморфизма и наоборот, по любой подгруппе $Y \in \mathcal{L}^*(X)$ можно построить гомоморфизм группы X на фактор-группу X/Y, принадлежащую классу $\mathcal{L}$. Эта эквивалентность позволяет, в частности, дать равносильные определения понятий $\mathcal{L}$-аппроксимируемости и $\mathcal{L}$-отделимости:

а) группа X называется $\mathcal{L}$-аппроксимируемой, если для каждого неединичного элемента $x \in X$ существует подгруппа $Y \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $x \notin Y$;

б) подмножество M группы X называется $\mathcal{L}$-отделимым в этой группе, если для каждого элемента $x \in X \setminus M$ существует подгруппа $Y \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $x \notin MY$.

Тот факт, что между гомоморфизмами группы X на $\mathcal{L}$-группы и подгруппами семейства $\mathcal{L}^*(X)$ имеется взаимно однозначное соответствие, далее будет использоваться весьма часто, причем без специальных оговорок.

Предложение 1.1.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей класс групп, X — произвольная группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Пересечение конечного числа подгрупп семейства $\mathcal{L}^*(X)$ снова является подгруппой данного семейства.*
2. *Если группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема и Y — ее конечная подгруппа, то подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X и существует подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $Y \cap N = 1$.*
3. *Если X — конечная $\mathcal{L}$-аппроксимируемая группа, то она принадлежит классу $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Действительно, если $N_1, N_2, \ldots, N_k$ — подгруппы семейства $\mathcal{L}^*(X)$, то по теореме Ремака фактор-группа

$$X/(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k)$$

вкладывается в прямое произведение фактор-групп X/N_1, X/N_2, …, X/N_k и в силу условий, наложенных на класс $\mathcal{L}$, принадлежит этому классу.

Пусть Y — конечная подгруппа группы X и элемент $x \in X$ не содержится в подгруппе Y. Пользуясь $\mathcal{L}$-аппроксимируемостью группы X, выберем для каждого неединичного элемента z из множества

$$M = \{xy^{-1} \mid y \in Y\} \cup Y$$

не содержащую его подгруппу $N_z \in \mathcal{L}^*(X)$ и обозначим через N пересечение всех таких подгрупп. Так как множество M конечно, то в силу утверждения 1 справедливо включение $N \in \mathcal{L}^*(X)$. Нетрудно видеть также, что $x \notin YN$ и $Y \cap N = 1$. Тем самым, второе утверждение доказано.

Третье утверждение предложения легко следует из второго. Предложение доказано. $\square$

Предложение 1.1.2. *Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа, Y — ее нормальная подгруппа.*

1. *Если фактор-группа X/Y $\mathcal{L}$-аппроксимируема, то подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X.*
2. *Если класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно факторизации, то из $\mathcal{L}$-отделимости подгруппы Y в группе X следует $\mathcal{L}$-аппроксимируемость фактор-группы X/Y.*

Доказательство. Пусть сначала фактор-группа X/Y $\mathcal{L}$-аппроксимируема. Пусть также x — произвольный элемент группы X, не принадлежащий подгруппе Y. Тогда xY — неединичный элемент $\mathcal{L}$-аппроксимируемой группы X/Y. Следовательно, существует гомоморфизм ψ группы X/Y на некоторую $\mathcal{L}$-группу такой, что $(xY)\psi \neq 1$. Тогда образ элемента x относительно композиции γ естественного гомоморфизма $X \to X/Y$ и гомоморфизма ψ не содержится в $Y\gamma$. В силу произвольности выбора элемента x это означает, что подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X.

Предположим теперь, что подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X и класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно факторизации. И пусть xY — произвольный неединичный элемент фактор-группы X/Y. Тогда элемент x не содержится в подгруппе Y и ввиду $\mathcal{L}$-отделимости последней в группе X найдется подгруппа N семейства $\mathcal{L}^*(X)$ такая, что $x \notin YN$, а потому $xY \notin YN/Y$. Так как $N \in \mathcal{L}^*(X)$ и класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно факторизации, то

$$(X/Y)/(YN/Y) \cong X/YN \cong (X/N)/(YN/N) \in \mathcal{L}.$$

Следовательно, фактор-группа X/Y $\mathcal{L}$-аппроксимируема. Предложение доказано. $\square$

Предложение 1.1.3. [25, предложение 1.2.4]. *Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп. Если группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема, то централизатор $C_X(Y)$ произвольного подмножества Y группы X является $\mathcal{L}$-отделимой подгруппой.* $\square$

Предложение 1.1.4. [25, предложение 1.2.5]. *Пусть класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — $\mathcal{L}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X. Если существует подгруппа $Z \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$, то подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X.* $\square$

Заметим, что если X — некоторая группа, Y — ее нормальная подгруппа, то ограничение на эту подгруппу любого внутреннего автоморфизма группы X оказывается автоморфизмом группы Y. Множество $\mathrm{Aut}_X(Y)$ всех таких автоморфизмов является подгруппой группы $\mathrm{Aut}\,Y$ всех автоморфизмов группы Y.

Предложение 1.1.5. *Пусть класс групп $\mathcal{L}$ замкнут относительно факторизации, X — произвольная группа, Y — нормальная подгруппа группы X. Если существует подгруппа $Z \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$, то группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{L}$. В частности, если класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений конечного числа сомножителей, группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема и ее подгруппа Y конечна, то группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Так как $Y \cap Z = 1$, то подгруппы Y и Z поэлементно перестановочны. Следовательно, Z содержится в централизаторе $C_X(Y)$ подгруппы Y в группе X. Поэтому $X/C_X(Y) \cong (X/Z)/(C_X(Y)/Z)$ и, так как класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно факторизации, то $X/C_X(Y) \in \mathcal{L}$. Группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$, как легко видеть, изоморфна фактор-группе $X/C_X(Y)$, следовательно, $\mathrm{Aut}_X(Y) \in \mathcal{L}$.

Если класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений конечного числа сомножителей, группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема и ее подгруппа Y конечна, то согласно утверждению 2 предложения 1.1.1 существует подгруппа $Z \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $Y \cap Z = 1$. В силу доказанного выше отсюда следует, что группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{L}$. Предложение доказано. $\square$

Говорят (см., например, [38]), что группа имеет *конечный ранг Гирша-Зайцева*, равный r, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой, и число бесконечных циклических факторов данного ряда равно r.

Предложение 1.1.6. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — $\mathcal{L}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X, имеющая конечный ранг Гирша-Зайцева. Тогда существует* *подгруппа $Z \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$. В частности, Y является $\mathcal{L}$-группой.*

Доказательство. Пусть $1 = Y_0 \leqslant Y_1 \leqslant \ldots \leqslant Y_n = Y$ — субнормальный ряд группы Y, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой. Доказательство будем вести индукцией по длине этого ряда.

Если $n = 0$, то утверждение предложения очевидным образом следует из $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы X. Поэтому далее будем считать, что $n \geqslant 1$ и для всех подгрупп, обладающих рядом указанного выше вида длины, меньшей n, искомое утверждение имеет место.

Так как группа X, а, значит, и ее подгруппа Y_1, аппроксимируется группами без кручения, то она сама не имеет кручения. Поэтому Y_1 — бесконечная циклическая группа, порожденная некоторым элементом y. Также из $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы X следует, что существует нормальная подгруппа M этой группы такая, что $X/M \in \mathcal{L}$ и $y \notin M$. Из отсутствия кручения в фактор-группе X/M вытекает, что элемент y имеет бесконечный порядок по модулю подгруппы M. Поэтому $M \cap Y_1 = 1$.

Так как

$$M \cap Y_{i+1}/M \cap Y_i \cong (M \cap Y_{i+1})Y_i/Y_i \leqslant Y_{i+1}/Y_i,$$

то группа $M \cap Y$ также обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой, причем длина этого ряда строго меньше n. Поэтому в силу индуктивного предположения существует подгруппа $L \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $L \cap (M \cap Y) = 1$.

Обозначим $L \cap M$ через Z. Тогда $Z \cap Y = 1$ и ввиду утверждения 1 предложения 1.1.1 подгруппа Z содержится в семействе $\mathcal{L}^*(X)$. Следовательно, Z — искомая подгруппа. Предложение доказано. □

1.2. Свободные конструкции групп

В данном параграфе приводятся определения и некоторые известные свойства свободных конструкций, встречающихся в настоящей работе. Используемые здесь и далее обозначения и термины согласованы с монографией [15].

Свободным произведением двух групп X_1 *и* X_2 *с подгруппами* $Y_1 \leqslant X_1$ *и* $Y_2 \leqslant X_2$*, объединенными относительно изоморфизма* $\sigma\colon Y_1 \to Y_2$, (или просто *обобщенным свободным произведением групп* X_1 *и* X_2) называется группа

$$P = (X_1 * X_2;\ Y_1 = Y_2,\ \sigma),$$

образующими которой являются образующие групп X_1 и X_2, а определяющими соотношениями — соотношения групп X_1 и X_2, а также всевозможные соотношения вида $y = y\sigma$, где y — слово от образующих группы X_1, определяющее элемент из подгруппы Y_1, $y\sigma$ — слово от образующих группы X_2, определяющее образ данного элемента относительно изоморфизма σ. Группы X_1 и X_2 называются *свободными множителями* группы P, подгруппы Y_1 и Y_2 — *объединенными подгруппами.*

Хорошо известно, что тождественные отображения образующих свободных множителей X_1 и X_2 в соответствующие образующие группы P определяют инъективные гомоморфизмы. Поэтому группы X_1 и X_2 можно считать подгруппами группы P. Объединенные подгруппы Y_1 и Y_2 при этом оказываются совпадающими, а изоморфизм σ превращается в тождественное отображение.

Легко видеть, что каждый элемент $z \in P$ может быть записан в виде произведения $z = z_1 z_2 \ldots z_n$, где $n \geqslant 1$, $z_i \in X_1 \cup X_2$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и, если $n > 1$, то для любого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ элементы z_i и z_{i+1} лежат в разных свободных множителях и, следовательно, не содержатся в объединенных подгруппах. Запись такого вида называется *несократимой*, а элементы z_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — *слогами* данной записи. Хотя несократимая запись заданного элемента z определена неоднозначно, количество слогов во всех таких записях одинаково и называется *длиной несократимой записи* элемента z.

Одним из основных свойств конструкции свободного произведения с объединенными подгруппами является утверждение о том, что каждый элемент, имеющий несократимую запись неединичной длины, отличен от 1. Это свойство будет неоднократно использоваться в данной работе.

Обобщением конструкции свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами служит *свободное произведение произвольного семейства групп с одной объединенной подгруппой*, определяемое следующим образом.

Пусть $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — некоторое семейство групп, и пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ в группе X_λ фиксирована подгруппа Y_λ. Пусть также для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ существует изоморфизм $\sigma_{\lambda\mu}\colon Y_\lambda \to Y_\mu$, причем для произвольных $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ выполнены соотношения

$$\sigma_{\lambda\mu}\sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\lambda\nu},\ \sigma_{\lambda\mu}^{-1} = \sigma_{\mu\lambda},\ \sigma_{\lambda\lambda} = \mathrm{id}_{Y_\lambda}\,.$$

Тогда определена группа

$$\mathbb{P} = (X_\lambda\ (\lambda \in \Lambda);\ Y_\lambda = Y_\mu,\ \sigma_{\lambda\mu}\ (\lambda, \mu \in \Lambda)),$$

порождаемая объединением (попарно непересекающихся) систем образующих всех групп X_λ и определяемая определяющими соотношениями всех групп X_λ и всевозможными соотношениями вида $y = y\sigma_{\lambda\mu}$, где $y \in Y_\lambda$; $\lambda, \mu \in \Lambda$. Хорошо известно, что все группы X_λ вкладываются в группу $\mathbb{P}$. Подгруппы Y_λ при этом совпадают, поэтому построенную таким образом группу $\mathbb{P}$ называют свободным произведением групп X_λ, $\lambda \in \Lambda$, с одной объединенной подгруппой.

Несократимая запись элемента группы $\mathbb{P}$ определяется так же, как и в случае обобщенного свободного произведения двух групп, и обладает теми же свойствами: все несократимые записи одного и того же элемента имеют одну и ту же длину и всякий элемент, обладающий несократимой записью неединичной длины, отличен от 1.

Если в приведенном выше определении все подгруппы Y_λ положить равными 1, то получившаяся в результате группа $\mathbb{P}$ называется обычным *свободным произведением семейства групп* $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Пусть далее X — некоторая группа, Y_1, Y_2 — изоморфные подгруппы группы X и $\sigma\colon Y_1 \to Y_2$ — изоморфизм. Тогда *HNN-расширением группы* X *с подгруппами* Y_1 *и* Y_2, *связанными при помощи изоморфизма* σ, называется группа

$$E = (X, t;\ t^{-1}Y_1t = Y_2,\ \sigma),$$

образующими которой являются образующие группы X и символ t, а определяющими соотношениями — определяющие соотношения группы X, а также всевозможные соотношения вида $t^{-1}yt = y\sigma$, где y и $y\sigma$ — слова от образующих группы X, определяющие элемент из подгруппы Y_1 и его образ относительно изоморфизма σ. Группа X называется *базовой группой*, подгруппы Y_1 и Y_2 — *связанными подгруппами*, а символ t —

проходной буквой HNN-расширения E. Как и в случае обобщенного свободного произведения, группа X вкладывается в E посредством тождественного отображения образующих, что позволяет считать ее подгруппой группы E.

Нетрудно показать, что каждый элемент $z \in E$ может быть записан в виде $z = z_0 t^{\varepsilon_1} z_1 \ldots t^{\varepsilon_n} z_n$, где $z_0, z_1, \ldots, z_n \in X$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ и для всякого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполняются следующие условия:

1) если $-\varepsilon_i = 1 = \varepsilon_{i+1}$, то $z_i \notin Y_1$;
2) если $\varepsilon_i = 1 = -\varepsilon_{i+1}$, то $z_i \notin Y_2$.

Запись такого вида называется *приведенной*. Как и несократимая запись элемента обобщенного свободного произведения, приведенная запись определена неоднозначно, но количество вхождений в нее букв t и t^{-1} является инвариантом и называется *длиной* этой приведенной записи. Лемма Бриттона утверждает, что элемент, обладающий приведенной записью ненулевой длины, отличен от 1. Данный факт будет использоваться в главе 4 при изучении аппроксимационных свойств HNN-расширений.

1.3. Корневые классы

Как уже было сказано во введении, содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп $\mathcal{K}$ называется *корневым*, если выполняются следующие три условия.

1. Если группа X принадлежит классу $\mathcal{K}$ и Y — подгруппа группы X, то группа Y также принадлежит классу $\mathcal{K}$.
2. Прямое произведение любых двух групп из класса $\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.
3. Условие Грюнберга: если $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X такой, что фактор-группы X/Y и Y/Z принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и фактор-группа X/T принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Легко видеть, что в сформулированном определении второе условие вытекает из третьего и, таким образом, является излишним. Следующее предложение дает три равносильных определения корневого класса.

Предложение 1.3.1. [51, теорема 1]. *Пусть $\mathcal{K}$ — наследственный (т. е. замкнутый относительно взятия подгрупп) класс групп. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Класс $\mathcal{K}$ удовлетворяет условию Грюнберга.*
2. *Класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно декартовых сплетений.*
3. *Класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно расширений и для любых двух групп X, $Y \in \mathcal{K}$ содержит декартово произведение*

$$\prod_{y \in Y} X_y,$$

где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$. □

Из утверждений 2 и 3 приведенного предложения видно, что каждый корневой класс содержит достаточно много групп. Более точно множество групп, заведомо принадлежащих заданному корневому классу, описывают следующие два предложения.

Предложение 1.3.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то он включает и все полициклические группы.*

Доказательство. Пусть X — непериодическая группа, принадлежащая классу $\mathcal{K}$, и g — элемент бесконечного порядка этой группы. Тогда ввиду замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп бесконечная циклическая подгруппа, порожденная элементом g, принадлежит этому классу. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации следует, что все конечные циклические группы также содержатся в классе $\mathcal{K}$. Таким образом, все циклические группы являются $\mathcal{K}$-группами. Класс $\mathcal{K}$ является корневым, значит, он замкнут относительно расширений. Следовательно, произвольная полициклическая группа принадлежит классу $\mathcal{K}$. Предложение доказано. □

Аналогичным образом доказывается

Предложение 1.3.3. [12, предложение 2]. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, π — множество всех простых делителей порядков всевозможных конечных $\mathcal{K}$-групп. Если множество π непусто, то класс $\mathcal{FS}_\pi$ всех конечных разрешимых π-групп содержится в $\mathcal{K}$.* □

В приводимом далее предложении собраны известные результаты, создающие основу для изучения аппроксимируемости корневыми классами свободных конструкций групп.

Предложение 1.3.4. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Произвольная свободная группа аппроксимируется классом $\mathcal{K}$* [7, теорема 1].
2. *Свободное произведение произвольного семейства $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп в свою очередь аппроксимируется классом $\mathcal{K}$* [40, лемма 1.5], [7].
3. *Произвольное расширение $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathcal{K}$-группы аппроксимируется классом $\mathcal{K}$* [7, лемма]. $\square$

Непосредственно из предложения 1.3.4 и теорем о строении подгрупп обобщенных свободных произведений и HNN-расширений вытекает

Предложение 1.3.5. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Обобщенное свободное произведение P двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп в свою очередь аппроксимируется классом $\mathcal{K}$, если существует гомоморфизм группы P на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на объединенной подгруппе. В частности, если существует гомоморфизм группы P на группу из класса $\mathcal{K}$, действующий инъективно на свободных множителях, то группа P $\mathcal{K}$-аппроксимируема* [7, теорема 3].
2. *HNN-расширение E $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы аппроксимируется классом $\mathcal{K}$, если существует гомоморфизм группы E на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на связанных подгруппах. В частности, если существует гомоморфизм группы E на группу из класса $\mathcal{K}$, действующий инъективно на базовой группе, то группа E $\mathcal{K}$-аппроксимируема* [52, теорема 4.1]. $\square$

1.4. Расщепляемые расширения и ретракты

Напомним, что группа X представляет собой *расщепляемое расширение* группы Z при помощи группы Y, если Y — подгруппа группы X, Z —

нормальная подгруппа группы X, $X = YZ$ и $Y \cap Z = 1$. Отображение δ группы Y в группу автоморфизмов группы Z, сопоставляющее элементу $y \in Y$ ограничение на подгруппу Z внутреннего автоморфизма группы X, производимого элементом y, является гомоморфным и называется *сопровождающим гомоморфизмом* этого расщепляемого расширения.

О подгруппе Y говорят также, что она является *ретрактом* в группе X, а естественный гомоморфизм группы X на фактор-группу X/Z называют *ретрактирующим.* Иначе говоря, подгруппа Y служит ретрактом в X, если существует гомоморфизм группы X на группу Y, действующий на подгруппе Y тождественно.

Предложение 1.4.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y, $\delta\colon Y \to \operatorname{Aut} Z$ — сопровождающий гомоморфизм, $L = \ker\delta$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Подгруппа LZ нормальна в группе X и представляет собой прямое произведение подгрупп L и Z; $X/LZ \cong Y\delta$.*
2. *Если группы Z и Y $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, а группа $Y\delta$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, то расщепляемое расширение X $\mathcal{K}$-аппроксимируемо.*
3. *Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации и группа $Y\delta$ конечна, то из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы X следует, что группы Z и Y $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, а группа $Y\delta$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. 1. Так как подгруппа L нормальна в группе Y и подгруппа Z нормальна в группе X, то подгруппа LZ нормальна в X и

$$X/LZ = YZ/LZ = YLZ/LZ \cong Y/(Y \cap LZ) = Y/L \cong Y\delta.$$

Очевидно, что подгруппа L поэлементно перестановочна с Z. Поэтому подгруппа LZ является прямым произведением групп L и Z.

2. Так как группы Z и Y $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, то подгруппа LZ представляет собой прямое произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп и, следовательно, $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Таким образом, группа X является расширением $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы LZ при помощи $\mathcal{K}$-группы $Y\delta$ и потому $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу утверждения 3 предложения 1.3.4.

3. Из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости расщепляемого расширения X следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость его подгрупп Z и Y, а также (в силу предложения 1.1.3) $\mathcal{K}$-отделимость централизатора $C_X(Z)$ в группе X. Как уже было отмечено в доказательстве предложения 1.1.5, $\mathrm{Aut}_X(Z) \cong X/C_X(Z)$. Отсюда, из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации и предложения 1.1.2 следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы $\mathrm{Aut}_X(Z)$. Значит, ее подгруппа $Y\delta$ также $\mathcal{K}$-аппроксимируема. При этом $Y\delta$ конечна, следовательно, она содержится в классе $\mathcal{K}$ в силу утверждения 3 предложения 1.1.1. Предложение доказано. $\square$

Предложение 1.4.2. *Пусть класс групп $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, и пусть X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y. Пусть также M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(X)$, $U = M \cap Z$, $V = M \cap Y$, W — подгруппа из $\mathcal{L}^*(Y)$ такая, что $W \subseteq V$, и пусть $L = WU$. Тогда $L \in \mathcal{L}^*(X)$ и X/L — расщепляемое расширение ZL/L при помощи YL/L.*

Доказательство. Покажем, что подгруппа L нормальна в группе X. Действительно,

$$L^X = (WU)^X = W^X U = W^{YZ} U = W^Z U.$$

Так как подгруппа Z нормальна в группе X, то $[W, Z] \subseteq Z$. Так как M — нормальная подгруппа группы X и $W \leqslant M$, то $[W, Z] \subseteq M$. Поэтому $[W, Z] \subseteq U$ и, следовательно, $W^Z \subseteq WU$. Тогда $L^X \subseteq WU = L$. Значит, L — нормальная подгруппа группы X.

Покажем, что фактор-группа X/L принадлежит классу $\mathcal{L}$.

Так как L нормальна в группе X, то L нормальна и в M. Рассмотрим фактор-группу M/L:

$$\begin{aligned} M/L = M/LU = M/L(M \cap Z) &\cong \\ \cong MZ/LZ = MZ/WUZ = MZ/WZ &\leqslant \\ \leqslant X/WZ = YZ/WZ &\cong Y/W(Y \cap Z). \end{aligned}$$

Так как X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y, то $Y \cap Z = 1$. Поэтому $Y/W(Y \cap Z) = Y/W$. Теперь, воспользовавшись замкнутостью класса $\mathcal{L}$ относительно взятия подгрупп и тем, что $W \in \mathcal{L}^*(Y)$, получаем, что $M/L \in \mathcal{L}$.

Заметим, что $(X/L)/(M/L) \cong X/M$. При этом $M/L \in \mathcal{L}$, $X/M \in \mathcal{L}$ и класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия расширений. Следовательно, $X/L \in \mathcal{L}$.

Покажем, что X/L — расщепляемое расширение ZL/L при помощи YL/L.

Очевидно, что подгруппа ZL/L нормальна в группе X/L. Так как $X = YZ$, то $X/L \subseteq YL/L \cdot ZL/L$. Обратное включение очевидно. Поэтому $X/L = YL/L \cdot ZL/L$. Так как $L = WU$, то $YL = YU$ и $ZL = WZ$. Отсюда и из условия $Y \cap Z = 1$ легко следует, что $YL \cap ZL \subseteq WU = L$. Поэтому $YL/L \cap ZL/L = 1$. Предложение доказано. $\square$

Предложение 1.4.3. *Пусть класс групп $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, и пусть X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y. Если группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема, то подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X.*

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент группы X, не принадлежащий подгруппе Y. Тогда он представим в виде $x = yz$, где $z \in Z \setminus \{1\}$ и $y \in Y$. В силу $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы X существует подгруппа $M \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $z \notin M$. Положим $U = M \cap Z$, $V = M \cap Y$ и $L = VU$. Тогда по предложению 1.4.2 $L \in \mathcal{L}^*(X)$.

Предположим, что $x \in YL$. Заметим, что $YL = YVU = YU$. Поэтому существуют элементы $y' \in Y$ и $u \in U$ такие, что $x = y'u$. Следовательно, $yz = y'u$. Отсюда и из того, что $Y \cap Z = 1$, получаем, что $z = u \in U$. Тогда $z \in M$, что противоречит выбору подгруппы M. Следовательно, $x \notin YL$.

Таким образом, если $x \notin Y$, то найдется подгруппа $L \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $x \notin YL$. Следовательно, подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X. Предложение доказано. $\square$

1.5. Изолированность

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Как обычно, через π' будем обозначать множество всех простых чисел, не принадлежащих π.

Говорят, что подгруппа Y некоторой группы X π'-*изолирована* в X, если для произвольного элемента x группы X и произвольного π'-числа q из того, что x^q — элемент подгруппы Y, следует, что x также является элементом подгруппы Y.

Если $\mathcal{L}$ — некоторый класс групп, состоящий только из периодических групп, то через $\pi(\mathcal{L})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов всевозможных $\mathcal{L}$-групп. Следующее предложение дает весьма общее необходимое условие $\mathcal{L}$-отделимости подгрупп.

Предложение 1.5.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп, состоящий только из периодических групп, X — некоторая группа, Y — ее подгруппа. Если подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X, то она $\pi(\mathcal{L})'$-изолирована в X.*

Доказательство. Пусть q — $\pi(\mathcal{L})'$-число и x — элемент группы X такой, что $x^q \in Y$. Пусть также N — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(X)$. Тогда X/N — периодическая $\pi(\mathcal{L})$-группа. Обозначим через s порядок ее элемента xN. Отсюда $x^s \in N$, а потому $x^s \in YN$. С другой стороны, $x^q \in Y$, поэтому $x^q \in YN$. Таким образом, $x^s \in YN$ и $x^q \in YN$, причем q и s взаимно просты. Следовательно, $x \in YN$. Так как подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ была выбрана произвольным образом, то

$$x \in \bigcap_{N \in \mathcal{L}^*(X)} YN.$$

Отсюда и из $\mathcal{L}$-отделимости подгруппы Y в группе X вытекает, что $x \in Y$. Предложение доказано. $\square$

Если класс $\mathcal{L}$ является корневым, а группа X — конечно порожденной нильпотентной, то необходимое условие $\mathcal{L}$-отделимости подгруппы, доставляемое предложением 1.5.1, оказывается и достаточным, как показывает приводимое далее предложение 1.5.3. Его доказательство опирается на следующее известное утверждение, частный случай которого для одноэлементного множества π доказан в [16].

Предложение 1.5.2. [1, глава 2, предложение 23]. *Пусть π — непустое множество простых чисел. Подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы X отделима в этой группе классом $\mathcal{F}_\pi$ всех конечных π-групп тогда и только тогда, когда она π'-изолирована в X.* $\square$

Предложение 1.5.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп. Тогда произвольная $\pi(\mathcal{K})'$-изолированная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы $\mathcal{K}$-отделима.*

Доказательство. Пусть X — произвольная конечно порожденная нильпотентная группа и Y — некоторая ее $\pi(\mathcal{K})'$-изолированная подгруппа. Так как класс $\mathcal{K}$ является корневым, а потому содержит хотя бы одну неединичную группу, то множество $\pi(\mathcal{K})$ непусто. Отсюда и из предложения 1.5.2 следует, что подгруппа Y отделима в группе X конечными $\pi(\mathcal{K})$-группами. Так как гомоморфный образ нильпотентной группы снова является нильпотентной группой, то подгруппа Y оказывается отделимой в X конечными нильпотентными $\pi(\mathcal{K})$-группами, а, значит, и конечными разрешимыми $\pi(\mathcal{K})$-группами. В силу предложения 1.3.3 класс конечных разрешимых $\pi(\mathcal{K})$-групп содержится в $\mathcal{K}$. Следовательно, подгруппа Y $\mathcal{K}$-отделима в группе X. Предложение доказано. $\square$

1.6. Регулярность и квазирегулярность

Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа. Будем говорить, что группа X *$\mathcal{L}$-регулярна* по своей нормальной подгруппе Y, если для любой подгруппы $M \in \mathcal{L}^*(Y)$, нормальной в X, найдется подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $N \cap Y = M$. Напомним также, что согласно [25] группа X называется *$\mathcal{L}$-квазирегулярной* по своей подгруппе Y, если для любой подгруппы $M \in \mathcal{L}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $N \cap Y \leqslant M$.

Условия $\mathcal{L}$-регулярности и $\mathcal{L}$-квазирегулярности оказываются весьма полезными при изучении аппроксимационных свойств свободных конструкций групп. Приводимые далее предложения описывают некоторые случаи, когда данные условия выполняются.

Предложение 1.6.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп. Если X — некоторая группа и $Y \in \mathcal{K}^*(X)$, то группа X $\mathcal{K}$-регулярна и $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе Y.*

Доказательство. Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(Y)$. Тогда субнормальный ряд $1 \leqslant M \leqslant Y \leqslant X$ удовлетворяет условию Грюнберга. Следовательно, существует подгруппа $N \in \mathcal{K}^*(X)$ такая, что $N \subseteq M$. Тогда $N \cap Y = N \leqslant M$ и группа X $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе Y.

Если, кроме того, подгруппа M нормальна в X, то фактор-группа X/M является расширением $\mathcal{K}$-группы Y/M при помощи $\mathcal{K}$-группы

$(X/M)/(Y/M) \cong X/Y$. Так как класс $\mathcal{K}$ является корневым, то группа X/M также принадлежит классу $\mathcal{K}$. Поэтому $M \in \mathcal{K}^*(X)$ и, поскольку $M \leqslant Y$, $M \cap Y = M$. Таким образом, группа X $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе Y. Предложение доказано. $\square$

Предложение 1.6.2. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс конечных групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — некоторая группа, Y — $\mathcal{L}$-отделимая подгруппа группы X. Группа X $\mathcal{L}$-квазирегулярна по подгруппе Y тогда и только тогда, когда все подгруппы семейства $\mathcal{L}^*(Y)$ $\mathcal{L}$-отделимы в группе X.*

Доказательство. Сначала покажем необходимость условия. Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(Y)$, x — произвольный элемент группы X, не принадлежащий M. Если $x \notin Y$, то в силу $\mathcal{L}$-отделимости подгруппы Y в группе X в семействе $\mathcal{L}^*(X)$ найдется подгруппа N такая, что $x \notin YN$ и, следовательно, $x \notin MN$.

Пусть теперь $x \in Y$. Так как группа X $\mathcal{L}$-квазирегулярна по подгруппе Y, то существует подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$, удовлетворяющая условию $N \cap Y \leqslant M$. Отсюда и из того, что $M \subseteq Y$, получаем, что $MN \cap Y \subseteq M$. Обратное включение очевидно. Значит, $MN \cap Y = M$.

Следовательно, $x \notin MN$. Поэтому подгруппа M, а, значит, и все подгруппы семейства $\mathcal{L}^*(Y)$, $\mathcal{L}$-отделимы в группе X.

Проверим достаточность условия. Пусть снова M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(Y)$, и пусть $1 = y_1, \ldots, y_n$ — некоторая полная система представителей смежных классов группы Y по подгруппе M. Так как класс $\mathcal{L}$ состоит из конечных групп, то множество $\{y_1, \ldots, y_n\}$ конечно. Поэтому, пользуясь $\mathcal{L}$-отделимостью подгруппы M в группе X и утверждением 1 предложения 1.1.1, можем найти подгруппу $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такую, что $y_2, \ldots, y_n$ не содержатся в MN.

Предположим, что $N \cap Y \nsubseteq M$. Тогда в подгруппе $N \cap Y$ найдется элемент g, не принадлежащий M. Следовательно, его можно записать в виде $g = xy_i$ для подходящих $x \in M$ и $i \in \{2, \ldots, n\}$. Тогда $y_i = x^{-1}g \in MN$, что противоречит выбору подгруппы N.

Поэтому $N \cap Y \leqslant M$. Это означает $\mathcal{L}$-квазирегулярность группы X по подгруппе Y. Предложение доказано. $\square$

Предложение 1.6.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп, X — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, Y — $\mathcal{K}$-отделимая подгруппа группы X. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Группа X $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе Y.*
2. *Если подгруппа Y нормальна в группе X и класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, то группа X $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе Y.*

Доказательство. Проверим сначала первое утверждение. Пусть V — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(Y)$. Так как подгруппа Y $\mathcal{K}$-отделима в группе X, то ввиду предложения 1.5.1 Y $\pi(\mathcal{K})'$-изолирована в X. Отсюда и из того, что $V \in \mathcal{K}^*(Y)$, следует $\pi(\mathcal{K})'$-изолированность подгруппы V в группе X. Тогда в силу предложения 1.5.3 подгруппа V $\mathcal{K}$-отделима в этой группе.

Так как X — конечно порожденная нильпотентная группа, то любой ее гомоморфный образ, являющийся периодической группой, конечен. Следовательно, подгруппа V отделима в группе X конечными $\mathcal{K}$-группами. Очевидно, что класс конечных $\mathcal{K}$-групп замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому в силу произвольности выбора подгруппы V, включения $Y \in \mathcal{K}^*(Y)$ и предложения 1.6.2 группа X $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе Y.

Докажем теперь второе утверждение. Пусть подгруппа Y нормальна в группе X, класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации и V — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(Y)$, нормальная в группе X. В силу доказанного выше подгруппа V $\mathcal{K}$-отделима в группе X. Поэтому ввиду замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации и предложения 1.1.2 группа X/V $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Так как X — конечно порожденная нильпотентная группа, то и Y/V — конечно порожденная нильпотентная группа. Поскольку $V \in \mathcal{K}^*(Y)$ и класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, фактор-группа Y/V является периодической, а потому конечной подгруппой $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы X/V. Поэтому в силу утверждения 2 предложения 1.1.1 существует подгруппа $S/V \in \mathcal{K}^*(X/V)$ такая, что $Y/V \cap S/V = 1$.

Тогда $S \in \mathcal{K}^*(X)$ и $Y \cap S = V$. Следовательно, группа X $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе Y. Предложение доказано. □

Глава 2

Аппроксимируемость свободных произведений с нормальными объединенными подгруппами

2.1. Общие условия аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп

В данной главе рассматриваются условия аппроксимируемости замкнутыми относительно факторизации, а также произвольными корневыми классами групп обобщенного свободного произведения двух групп. До конца главы будем считать, что A и B — некоторые группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K, $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Кроме того, всюду, за исключением параграфа 2.1, предполагается, что H и K являются нормальными подгруппами групп A и B соответственно.

Напомним ряд понятий и утверждений, восходящих к работе Г. Баумслага [32].

Подгруппы R и S групп A и B соответственно называются (H, K, φ)-*совместимыми*, если выполнено равенство $(H \cap R)\varphi = K \cap S$. Легко видеть, что если подгруппы $R \leqslant A$, $S \leqslant B$ (H, K, φ)-совместимы и нормальны в свободных множителях, то отображение $\varphi_{R,S}\colon HR/R \to KS/S$, действующее по правилу $(hR)\varphi_{R,S} = (h\varphi)S$, где $h \in H$, определено корректно и является изоморфизмом подгруппы HR/R фактор-группы A/R на подгруппу KS/S фактор-группы B/S. Это позволяет наряду с обобщенным свободным произведением

$$G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$$

построить свободное произведение

$$G_{R,S} = (A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \varphi_{R,S})$$

групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и KS/S, объединенными относительно изоморфизма $\varphi_{R,S}$. Нетрудно показать также, что существует сюръективный гомоморфизм $\rho_{R,S}\colon G \to G_{R,S}$, действие которого на подгруппах A и B совпадает с действием естественных гомоморфизмов $A \to A/R$ и $B \to B/S$.

Предложение 2.1.1. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G, $R = A \cap N$ и $S = B \cap N$. Тогда подгруппы R и S являются (H, K, φ)-совместимыми и существует гомоморфизм группы $G_{R,S}$ на группу G/N, действующий на подгруппах A/R и B/S инъективно.*

Обратно, если для (H, K, φ)-совместимых нормальных подгрупп R и S групп A и B соответственно существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на некоторую группу, действующий на подгруппах A/R и B/S инъективно, и $N = \ker(\rho_{R,S}\sigma)$, то $R = A \cap N$ и $S = B \cap N$.

Доказательство. Если группы A и B считать подгруппами группы G, то в этой группе для любого элемента $h \in H$ выполнено равенство $h\varphi = h$, откуда легко следует, что $(H \cap N)\varphi = K \cap N$.

В самом деле, если элемент x группы B входит в ее подгруппу $(H\cap N)\varphi$, то $x = h\varphi$ для некоторого $h \in H \cap N$. Тогда $x \in K$ и, так как $x = h$, то $x \in N$, откуда $x \in K \cap N$. Обратно, если $x \in K \cap N$, то $x \in K$, и потому $x = h\varphi$ для некоторого $h \in H$. Поскольку $h = x$, имеем также $h \in N$, следовательно, $x \in (H \cap N)\varphi$.

Так как

$$H \cap R = H \cap (A \cap N) = H \cap N$$

и, аналогично, $K \cap S = K \cap N$, в силу предыдущего получаем $(H \cap R)\varphi = K \cap S$, и (H, K, φ)-совместимость подгрупп R и S доказана.

Хорошо известно (и легко видеть), что ядро M гомоморфизма $\rho_{R,S}$ группы G на группу $G_{R,S}$ совпадает с нормальным замыканием в группе G объединения подгрупп R и S. Следовательно, $M \subseteq N$ и потому существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на фактор-группу G/N, действующий по правилу: для любого элемента $x \in G_{R,S}$ полагаем $x\sigma = gN$ для некоторого элемента $g \in G$ такого, что $x = g\rho_{R,S}$.

Действительно, если для элементов f и g группы G выполнено равенство $f\rho_{R,S} = g\rho_{R,S}$, то элемент $f^{-1}g$ лежит в подгруппе M, а потому и в подгруппе N. Следовательно, $fN = gN$, и корректность определения отображения σ доказана. Гомоморфность и сюръективность этого отображения очевидны.

Произвольный элемент x из подгруппы A/R группы $G_{R,S}$ имеет вид $x = aR$ для некоторого элемента $a \in A$. Поскольку по определению гомоморфизма $\rho_{R,S}$ выполнено равенство $a\rho_{R,S} = aR$, имеем $x\sigma = aN$. Таким образом, если x лежит в ядре гомоморфизма σ, то $a \in N$ и потому $a \in A \cap N = R$. Следовательно, $x = 1$, и инъективность действия гомоморфизма σ на подгруппе A/R доказана. Инъективность действия гомоморфизма σ на подгруппе B/S проверяется аналогично.

Предположим теперь, что для некоторых (H, K, φ)-совместимых нормальных подгрупп R и S групп A и B соответственно существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на некоторую группу, действующий на подгруппах A/R и B/S инъективно. Полагая $N = \ker(\rho_{R,S}\sigma)$, покажем, что $R = A \cap N$ и $S = B \cap N$.

Так как для гомоморфизма $\rho_{R,S}$ справедливо равенство $R\rho_{R,S} = 1$, включение $R \subseteq A \cap N$ очевидно. Обратно, если элемент $a \in A$ принадлежит подгруппе N, то $1 = (a\rho_{R,S})\sigma = (aR)\sigma$, и так как σ на подгруппе A/R действует инъективно, имеем $aR = 1$, т. е. $a \in R$. Таким образом, включение $A \cap N \subseteq R$ также справедливо, и равенство $R = A \cap N$ доказано. Равенство $S = B \cap N$ проверяется аналогично. Предложение доказано. $\square$

Следуя [32], семейство $\{Y_i\}_{i \in I}$ нормальных подгрупп некоторой группы X будем называть *фильтрацией*, если

$$\bigcap_{i \in I} Y_i = 1.$$

Пусть $\mathcal{L}$ — некоторый класс групп, X — произвольная группа, Y — подгруппа группы X. Через $\mathcal{L}^*(X, Y)$ обозначим семейство всех подгрупп группы Y вида $Z \cap Y$, где Z — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(X)$.

Будем говорить, что подгруппа Y группы X *отделима семейством* Σ *нормальных подгрупп* этой группы, если для любого элемента $x \in X$, не принадлежащего подгруппе Y, среди подгрупп семейства Σ найдется подгруппа N такая, что $x \notin YN$. Если в качестве Σ взять семейство $\mathcal{L}^*(X)$, получается обычное определение отделимости подгруппы Y классом $\mathcal{L}$, которое было сформулировано в параграфе 1.1. Очевидно также, что подгруппа Y отделима семейством Σ в том и только в том случае, когда имеет место равенство

$$Y = \bigcap_{N \in \Sigma} YN,$$

и потому семейство Σ является фильтрацией тогда и только тогда, когда этим семейством отделима единичная подгруппа группы X.

В работе [32] Г. Баумслаг указал необходимые и достаточные условия финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения G, которые с использованием введенного выше определения могут быть сформулированы следующим образом.

Предложение 2.1.2. [32, предложение 2]. *Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство всех пар нормальных (H, K, φ)-совместимых подгрупп конечного индекса групп A и B соответственно.*

1. *Если группа G финитно аппроксимируема, то ее единичная подгруппа отделима семействами $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.*
2. *Если единичная подгруппа группы G отделима семействами $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, подгруппа H отделима семейством $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и подгруппа K отделима семейством $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, то группа G финитно аппроксимируема.* $\square$

Покажем, что условия 1 и 2 предложения 2.1.2 можно сформулировать в других терминах.

Как уже было отмечено во введении, класс $\mathcal{F}$ всех конечных групп является корневым. Если $R \in \mathcal{F}^*(G, A)$ и подгруппа $N \in \mathcal{F}^*(G)$ такова, что $R = N \cap A$, то по предложению 2.1.1 подгруппы R и $S = N \cap B$ (H, K, φ)-совместимы и являются, очевидно, нормальными подгруппами конечного индекса групп A и B соответственно. Поэтому $R = R_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$.

Обратно, пусть подгруппа R группы A совпадает с некоторой подгруппой R_λ, и пусть $S = S_\lambda$. Тогда группа $G_{R,S}$ представляет собой обобщенное свободное произведение двух конечных групп A/R и B/S. Следовательно, она финитно аппроксимируема [32, теорема 2]. Согласно утверждению 2 предложения 1.1.1 существует подгруппа $N_{R,S} \in \mathcal{F}^*(G_{R,S})$ такая, что

$$N_{R,S} \cap A/R = N_{R,S} \cap B/S = 1.$$

Тогда естественный гомоморфизм $\sigma\colon G_{R,S} \to G_{R,S}/N_{R,S}$ действует инъективно на подгруппах A/R и B/S. Поэтому снова по предложению 2.1.1 $R = N \cap A$, $S = N \cap B$, где $N = \ker(\rho_{R,S}\sigma)$. Поскольку группа $G_{R,S}/N_{R,S}$ конечна, $N \in \mathcal{F}^*(G)$ и, значит, $R \in \mathcal{F}^*(G, A)$.

Таким образом множество подгрупп, составляющих семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, совпадает с множеством $\mathcal{F}^*(G, A)$. Совпадение множества подгрупп семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и множества $\mathcal{F}^*(G, B)$ проверяется аналогично. Отсюда вытекает, что приводимое далее предложение 2.1.3 является обобщением предложения 2.1.2.

Предложение 2.1.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп.*

1. *Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то ее единичная подгруппа отделима семействами $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ соответственно.*
2. *Если подгруппы 1 и H отделимы семейством $\mathcal{K}^*(G, A)$, подгруппы 1 и K отделимы семейством $\mathcal{K}^*(G, B)$, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Проверим сначала первое утверждение. Покажем, что единичная подгруппа отделима семейством $\mathcal{K}^*(G, A)$.

Пусть g — произвольный неединичный элемент, принадлежащий пересечению всех подгрупп семейства $\mathcal{K}^*(G, A)$. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, следовательно, существует подгруппа $N \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $g \notin N$. Значит, элемент g не содержится в подгруппе $N \cap A$ семейства $\mathcal{K}^*(G, A)$. Поэтому g не входит в пересечение всех подгрупп данного семейства, что противоречит выбору элемента g. Таким образом, единичная подгруппа отделима семейством $\mathcal{K}^*(G, A)$.

Аналогично проверяется, что единичная подгруппа отделима семейством $\mathcal{K}^*(G, B)$.

Докажем теперь второе утверждение. Пусть g — произвольный неединичный элемент группы G. Рассмотрим два случая: $g \in H$ и $g \notin H$.

Пусть сначала $g \in H$. Тогда g не принадлежит хотя бы одной из подгрупп семейства $\mathcal{K}^*(G, A)$ ввиду отделимости единичной подгруппы данным семейством. Обозначим эту подгруппу через R_0. Так как $R_0 = D_0 \cap A$ для подходящей подгруппы $D_0 \in \mathcal{K}^*(G)$ и элемент g группы A не содержится в R_0, то $g \notin D_0$.

Таким образом, для произвольного неединичного элемента g группы G, лежащего в H, существует подгруппа $D_0 \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $g \notin D_0$.

Пусть теперь $g \notin H$ и $g = g_1 g_2 \dots g_n$ — несократимая запись элемента g. Так как $g \notin H$, то для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ $g_k \notin H$, причем если $n > 1$, то соседние слоги лежат в разных свободных множителях.

Пусть для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$ $g_k \in A$. Так как при этом $g_k \notin H$ и подгруппа H отделима семейством $\mathcal{K}^*(G, A)$, то существует подгруппа $R_k \in \mathcal{K}^*(G, A)$ такая, что $g_k \notin HR_k$. Если $g_k \in B$, то аналогичным образом находим подгруппу $S_k \in \mathcal{K}^*(G, B)$ такую, что $g_k \notin KS_k$.

По определению семейства $\mathcal{K}^*(G, A)$ для любой подгруппы R_k данного семейства существует подгруппа $D_k \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $R_k = D_k \cap A$. Аналогично для каждой подгруппы S_k семейства $\mathcal{K}^*(G, B)$ существует подгруппа $D_k \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $S_k = D_k \cap B$.

Обозначим через D пересечение всех подгрупп D_k, где $k \in \{1, \dots, n\}$. В силу утверждения 1 предложения 1.1.1 $D \in \mathcal{K}^*(G)$. Обозначим $R = A \cap D$, $S = B \cap D$. Тогда подгруппа R нормальна в группе A и, если $g_k \in A$, то $g_k \notin HR$. Аналогично подгруппа S нормальна в группе B и, если $g_k \in B$, то $g_k \notin KS$. В силу предложения 2.1.1 подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы и существует гомоморфизм группы $G_{R,S}$ на $\mathcal{K}$-группу G/D, действующий на подгруппах A/R и B/S инъективно. Из утверждения 1 предложения 1.3.5 теперь следует, что группа $G_{R,S}$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Подействуем гомоморфизмом $\rho_{R,S}$ на элемент g:

$$g\rho_{R,S} = (g_1 g_2 \dots g_n)\rho_{R,S} = g_1\rho_{R,S} g_2\rho_{R,S} \dots g_n\rho_{R,S} \neq 1.$$

Действительно, если $g_k \in A$, то $g_k \notin HR$ и потому $g_k R \notin HR/R$; если $g_k \in B$, то $g_k \notin KS$, значит, $g_k S \notin KS/S$. Причем если $n > 1$, то соседние слоги лежат в разных свободных множителях.

Таким образом, если $n = 1$, то $g\rho_{R,S}$ не принадлежит объединяемой подгруппе, значит, отличен от 1; если $n > 1$, то получаем несократимую запись элемента $g\rho_{R,S}$ группы $G_{R,S}$ длины, большей 1. Следовательно, $g\rho_{R,S} \neq 1$.

Так как группа $G_{R,S}$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема, существует гомоморфизм ψ этой группы на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $g\rho_{R,S}\psi \neq 1$. В силу произвольности выбора элемента g отсюда вытекает, что группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Предложение доказано. $\square$

Заметим, что первое утверждение предложения 2.1.3 справедливо для произвольного класса групп.

2.2. Некоторые свойства рассматриваемых обобщенных свободных произведений

Далее до конца главы будем предполагать, что подгруппы H и K являются нормальными в группах A и B соответственно. При таком предположении подгруппа H оказывается нормальной в группе G, и потому определена подгруппа $\mathrm{Aut}_G(H)$ группы $\mathrm{Aut}\, H$, состоящая, напомним, из ограничений на подгруппу H всевозможных внутренних автоморфизмов группы G.

Предложение 2.2.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и фактор-групп. Подгруппа H $\mathcal{L}$-отделима в группе A тогда и только тогда, когда она отделима семейством $\mathcal{L}^*(G, A)$. Подгруппа K $\mathcal{L}$-отделима в группе B тогда и только тогда, когда она отделима семейством $\mathcal{L}^*(G, B)$.*

Доказательство. Если подгруппа H отделима семейством $\mathcal{L}^*(G, A)$, то она оказывается и $\mathcal{L}$-отделимой в группе A, так как в силу замкнутости класса $\mathcal{L}$ относительно взятия подгрупп каждая подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(G, A)$ содержится в $\mathcal{L}^*(A)$.

Пусть теперь подгруппа H $\mathcal{L}$-отделима в A. Отсюда, из нормальности подгруппы H в группе A и замкнутости класса $\mathcal{L}$ относительно факторизации в силу предложения 1.1.2 следует $\mathcal{L}$-аппроксимируемость фактор-группы A/H.

Пусть g — элемент группы A, не принадлежащий подгруппе H. Найдем подгруппу $N \in \mathcal{L}^*(G, A)$ такую, что $g \notin HN$.

Очевидно, что подгруппы H и B (H, K, φ)-совместимы и группа $G_{H,B}$ изоморфна фактор-группе A/H. Тогда gH — отличный от 1 элемент $\mathcal{L}$-аппроксимируемой группы $G_{H,B}$. Значит, существует гомоморфизм ψ группы $G_{H,B}$ на некоторую группу из класса $\mathcal{L}$ такой, что $(gH)\psi \neq 1$.

Пусть $\sigma = \rho_{H,B}\psi$, $N = \ker \sigma \cap A$. Тогда $N \in \mathcal{L}^*(G, A)$ и $g \notin N$. Так как $H \subseteq N$, то $HN = N$. Поэтому $g \notin HN$ и, следовательно, N — искомая подгруппа. Значит, подгруппа H отделима семейством $\mathcal{L}^*(G, A)$.

Аналогично проверяется справедливость второго утверждения. Предложение доказано. □

Таким образом, если корневой класс групп замкнут относительно факторизации и объединяемые подгруппы нормальны в соответствующих свободных множителях, то справедлива следующая более удобная в применении версия предложения 2.1.3.

Предложение 2.2.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп.*

1. *Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то семейства $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ являются фильтрациями.*
2. *Если семейства $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ являются фильтрациями, подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.* □

При некоторых дополнительных ограничениях сформулированное в предложении 2.2.2 достаточное условие аппроксимируемости обобщенного свободного произведения G становится необходимым.

Предложение 2.2.3. *Пусть $\mathcal{L}$ — наследственный класс групп и группа G $\mathcal{L}$-аппроксимируема. Пусть также выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $\mathrm{Aut}_G(H)$ *— конечная группа,*
2) $\mathrm{Aut}_G(H)$ *— абелева группа,*
3) $\mathrm{Aut}_G(H)$ *совпадает с* $\mathrm{Aut}_A(H)$ *или с* $\varphi \, \mathrm{Aut}_B(K) \varphi^{-1}$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Если $K \neq B$, то подгруппа H $\mathcal{L}$-отделима в группе A.*
2. *Если $H \neq A$, то подгруппа K $\mathcal{L}$-отделима в группе B.*

Доказательство. Утверждение 1 будем доказывать от противного.

Пусть подгруппа H не является $\mathcal{L}$-отделимой в группе A. Тогда существует элемент a группы A, не принадлежащий подгруппе H, такой, что для любой подгруппы N семейства $\mathcal{L}^*(A)$ справедливо включение $a \in HN$. Так как K — собственная подгруппа группы B, можем выбрать элемент $b \in B$, не принадлежащий подгруппе K. Обозначим через α и β ограничения на подгруппу H внутренних автоморфизмов группы G, производимых элементами a и b соответственно.

Предположим сначала, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа. Обозначим элемент ab группы G через g. Тогда $\hat{g}|_H = \alpha\beta \in \mathrm{Aut}_G(H)$. Ввиду того, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа, порядок элемента $\hat{g}|_H$ равен некоторому конечному числу q.

Рассмотрим элемент $f = [a, g^{-q}ag^q]$. Он имеет несократимую запись длины $8q$, следовательно, отличен от 1. Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(G)$ и $N = M \cap A$. Отсюда и из наследственности класса $\mathcal{L}$ вытекает, что подгруппа N принадлежит семейству $\mathcal{L}^*(A)$, а потому $a \in HN$ и для некоторого элемента h подгруппы H выполнено сравнение $a \equiv h \pmod{N}$. Следовательно, $a \equiv h \pmod{M}$. Поэтому

$$f \equiv [h, g^{-q}hg^q] \pmod{M}.$$

Так как

$$\widehat{g^q}|_H = (\hat{g}|_H)^q = \mathrm{id}_H,$$

то $[h, g^{-q}hg^q] = 1$, откуда получаем включение $f \in M$. Следовательно, неединичный элемент f группы G лежит в каждой подгруппе семейства $\mathcal{L}^*(G)$, что противоречит $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы G.

Теперь будем считать, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа, и положим также

$$g_1 = b^{-1}ab, \quad g_2 = a^{-1}b^{-1}aba, \quad g = [g_1, g_2].$$

Элемент g имеет несократимую запись длины 16, значит, $g \neq 1$. Пусть, как и выше, M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(G)$ и $N = M \cap A$. Тогда $a \in HN$ и для подходящего элемента $h \in H$ справедливо сравнение $a \equiv h \pmod{N}$, а потому $a \equiv h \pmod{M}$ и, значит,

$$g_1 = b^{-1}ab = b^{-1}a^{-1}aab \equiv h\alpha\beta \pmod{M},$$
$$g_2 = a^{-1}b^{-1}aba \equiv h\beta\alpha \pmod{M}.$$

Отсюда и из того, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа, заключаем, что $g_1 \equiv g_2 \pmod{M}$. Значит, $g \equiv 1 \pmod{M}$, что вновь противоречит $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы G.

Наконец, предположим, что выполняется третье условие.

Пусть сначала $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$. Тогда $\beta = \widehat{a_0}|_H$ для некоторого элемента $a_0 \in A$. Рассмотрим элемент $g = a_0^{-1}a^{-1}a_0b^{-1}ab$ группы G.

Так как $a \notin H$ и подгруппа H нормальна в A, то $a_0^{-1}a^{-1}a_0 \notin H$. Поэтому элемент g имеет несократимую запись длины 4 и, следовательно, отличен от единицы. Пусть снова M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(G)$, $h \in H$ — такой элемент, что $a \equiv h \pmod{M}$. Тогда

$$a_0^{-1}a^{-1}a_0b^{-1}ab \equiv a_0^{-1}h^{-1}a_0b^{-1}hb \pmod{M}.$$

Заметим, что $b^{-1}hb = h\beta = a_0^{-1}ha_0$. Следовательно,

$$g \equiv a_0^{-1}h^{-1}a_0a_0^{-1}ha_0 = 1 \pmod{M},$$

откуда, как и выше, получаем противоречие с $\mathcal{L}$-аппроксимируемостью группы G.

Пусть теперь $\mathrm{Aut}_G(H) = \varphi\,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$ и $\alpha = \varphi\widehat{b_0}|_K\varphi^{-1}$ для некоторого элемента $b_0 \in B$. Рассмотрим элемент

$$g = b_0^{-1}(b^{-1}a^{-1}b)b_0a^{-1}(b^{-1}ab)a = (bb_0)^{-1}a^{-1}(bb_0)a^{-1}b^{-1}aba$$

группы G.

Длина несократимой записи элемента g равна 8, если $bb_0 \notin K$, и не меньше 4, если $bb_0 \in K$. Поэтому $g \neq 1$. Как всегда, пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(G)$, $h \in H$ — такой элемент, что $a \equiv h \pmod{M}$. Тогда $b^{-1}ab \equiv b^{-1}hb \pmod{M}$. Так как $h \in H$ и подгруппа H нормальна в G, то

$$b^{-1}hb \in H, \quad b_0^{-1}(b^{-1}hb)b_0 \in H.$$

Напомним также, что для любого элемента $x \in H$ в группе G верно равенство $x\varphi = x$. Поэтому

$$\begin{aligned} g &\equiv b_0^{-1}(b^{-1}h^{-1}b)b_0(b^{-1}hb)\alpha \\ &= b_0^{-1}(b^{-1}h^{-1}b)b_0(b_0^{-1}(b^{-1}hb)\varphi b_0)\varphi^{-1} \\ &= b_0^{-1}(b^{-1}h^{-1}b)b_0b_0^{-1}(b^{-1}hb)b_0 \\ &= 1 \pmod{M}, \end{aligned}$$

что противоречит $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы G.

Утверждение 2 проверяется аналогично. Предложение доказано. $\square$

2.3. Основная теорема

Приводимая далее теорема является основным результатом данной главы, а следствие из нее будет неоднократно использоваться в дальнейших рассуждениях.

Теорема 2.3.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$. Если $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, то существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах A, B, и, в частности, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Очевидно, что фактор-группа G/H изоморфна свободному произведению фактор-групп A/H и B/K. Рассмотрим гомоморфизм группы G/H на прямое произведение этих фактор-групп, действующий тождественно на подгруппах A/H и B/K. Из теоремы Х. Нейманн [48] следует, что ядро D данного гомоморфизма, называемое декартовой подгруппой группы G/H, является свободной группой.

Пусть N — нормальная подгруппа группы G такая, что $D = N/H$. Тогда

$$N \cap A = H, \quad N \cap B = K, \quad G/N \cong A/H \times B/K.$$

Отсюда и из того, что $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$ и класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия прямых произведений, следует, что фактор-группа G/N принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Подгруппа N представляет собой расширение группы H с помощью свободной группы N/H. Как известно, такое расширение расщепляемо, то есть в N существует свободная подгруппа F, изоморфная N/H, такая, что N является расщепляемым расширением H при помощи F.

Пусть $\rho\colon F \to \mathrm{Aut}\, H$ — сопровождающий гомоморфизм данного расщепляемого расширения, $C = \ker\rho$. Тогда $F\rho \leqslant \mathrm{Aut}_G(H)$ и, следовательно, $F\rho \in \mathcal{K}$. В силу утверждения 1 предложения 1.4.1 подгруппа CH нормальна в группе N и является прямым произведением подгрупп C и H, а фактор-группа N/CH изоморфна $\mathcal{K}$-группе $F\rho$. Заметим также, что произведение CH можно рассматривать как расщепляемое расширение группы C при помощи $\mathcal{K}$-группы H.

Тогда факторы N/CH и CH/C субнормального ряда $1 \leqslant C \leqslant CH \leqslant N$ группы N принадлежат классу $\mathcal{K}$. А потому согласно условию Грюнберга в группе N найдется нормальная подгруппа M такая, что $M \subseteq C$ и $N/M \in \mathcal{K}$.

Аналогично субнормальный ряд $1 \leqslant M \leqslant N \leqslant G$ группы G удовлетворяет упомянутому выше условию Грюнберга ($G/N \in \mathcal{K}$, $N/M \in \mathcal{K}$), в силу которого в группе G существует нормальная подгруппа L такая, что $L \subseteq M$ и $G/L \in \mathcal{K}$.

Так как $N \cap A = H$, $N \cap B = K$, $F \leqslant N$ и $F \cap H = 1$, то $F \cap A = F \cap B = 1$. Из включений $L \subseteq C \subseteq F$ теперь следует, что $L \cap A = L \cap B = 1$.

Таким образом, естественный гомоморфизм группы G на $\mathcal{K}$-группу G/L инъективен на подгруппах A и B. В силу утверждения 1 предложения 1.3.5 отсюда следует, что группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Теорема доказана. $\square$

Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то теорема 2.3.1 превращается в критерий, формулируемый следующим образом.

Следствие 2.3.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$. Тогда следующие два утверждения равносильны и при выполнении любого из них группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

1. *Существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах A и B.*
2. *Группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Так как класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, то из условий $A \in \mathcal{K}$ и $B \in \mathcal{K}$ следует, что $A/H \in \mathcal{K}$ и $B/K \in \mathcal{K}$. Поэтому импликация $2 \Rightarrow 1$ вытекает из теоремы 2.3.1. Импликация $1 \Rightarrow 2$ имеет место в силу предложения 1.1.5. Следствие доказано. $\square$

В последнем параграфе настоящей главы будут приведены примеры, показывающие, что в случае, когда корневой класс $\mathcal{K}$ не замкнут относительно факторизации, ни одно из условий $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$ не является необходимым для существования гомоморфизма группы G на $\mathcal{K}$-группу, инъективного на свободных множителях A и B. В частности, утверждение следствия 2.3.2 для такого класса перестает быть верным.

2.4. Случай, когда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой или совпадает с одной из подгрупп $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\varphi \mathrm{Aut}_B(K) \varphi^{-1}$

Во всех приводимых далее в настоящей главе теоремах и следствиях свободные множители A и B аппроксимируются корневым классом $\mathcal{K}$, но уже необязательно принадлежат этому классу, и аппроксимируемость группы G изучается при различных условиях, накладываемых на объединяемые подгруппы и группу $\mathrm{Aut}_G(H)$. В данном параграфе, как следует из его названия, такими условиями являются абелевость группы $\mathrm{Aut}_G(H)$ или ее совпадение с одной из подгрупп $\mathrm{Aut}_A(H)$, $\varphi \,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$. Прежде, чем перейти непосредственно к рассмотрению указанного случая, докажем два вспомогательных предложения, которые будут использоваться также и в последующих параграфах.

Предложение 2.4.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, группы $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\mathrm{Aut}_B(K)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$. Если группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой или совпадает с одной из подгрупп $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\varphi \,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$, то группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Из того, что обобщенное свободное произведение G порождается подгруппами A и B, легко следует, что группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ порождается подгруппами $U = \mathrm{Aut}_A(H)$ и $V = \varphi \,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$. Очевидно, что $\varphi \,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1} \cong \mathrm{Aut}_B(K)$. Поэтому, если $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$ или $\mathrm{Aut}_G(H) = \varphi \,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$, то утверждение предложения тривиально.

Пусть $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа. Тогда она совпадает с произведением порождающих ее подгрупп U и V. Поэтому $\mathrm{Aut}_G(H)/V \cong U/U \cap V$. Так как группы $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\mathrm{Aut}_B(K)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$ и этот класс замкнут относительно факторизации, получаем, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — расширение $\mathcal{K}$-группы при помощи $\mathcal{K}$-группы. Класс $\mathcal{K}$ — корневой, значит, такое расширение снова является $\mathcal{K}$-группой, и потому группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Предложение доказано. $\square$

Предложение 2.4.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно. Если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$,
2) $\mathrm{Aut}_G(H)$ — *абелева группа,*
3) $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$ *или* $\mathrm{Aut}_G(H) = \varphi \,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$,

то семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ совпадают с множествами $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ соответственно.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $\lambda \in \Lambda$ и обозначим через R подгруппу R_λ, через S — подгруппу S_λ. Так как подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы, то можем рассмотреть свободное произведение

$$G_{R,S} = (A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \varphi_{R,S})$$

фактор-групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и KS/S, объединенными относительно изоморфизма $\varphi_{R,S}\colon HR/R \to KS/S$, и гомоморфизм $\rho_{R,S}\colon G \to G_{R,S}$. Покажем, что $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ является $\mathcal{K}$-группой.

В силу своего определения $\rho_{R,S}$ сюръективен и переводит H на HR/R. Поэтому $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ — гомоморфный образ группы $\mathrm{Aut}_G(H)$. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации следует, что если группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, то $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ также оказывается $\mathcal{K}$-группой.

Пусть теперь группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой или совпадает с одной из групп $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\varphi\,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$. Поскольку $R \in \mathcal{K}^*(A)$ и $S \in \mathcal{K}^*(B)$, фактор-группы A/R и B/S принадлежат классу $\mathcal{K}$. Отсюда согласно предложению 1.1.5 получаем, что группы $\mathrm{Aut}_{A/R}(HR/R)$ и $\mathrm{Aut}_{B/S}(KS/S)$ также содержатся в $\mathcal{K}$. Если группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ абелева, то и ее гомоморфный образ $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ является абелевой группой. Значит, выполнены условия предложения 2.4.1, согласно которому группа $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Если же $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$ (или $\mathrm{Aut}_G(H) = \varphi\,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$), то, как легко видеть, $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R) = \mathrm{Aut}_{A/R}(HR/R)$ (соответственно $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R) = \varphi_{R,S}\,\mathrm{Aut}_{B/S}(KS/S)\varphi_{R,S}^{-1}$). Поэтому снова $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R) \in \mathcal{K}$.

Таким образом, $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ является $\mathcal{K}$-группой. Поэтому в силу следствия 2.3.2 существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах A/R и B/S. Полагая $N = \ker(\rho_{R,S}\sigma)$, получаем, что $N \in \mathcal{K}^*(G)$ и согласно второй части предложения 2.1.1 $R = A \cap N$, $S = B \cap N$. Таким образом, подгруппы R и S содержатся в семействах $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ соответственно. Ввиду произвольности выбора λ отсюда следует, что все подгруппы семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ принадлежат $\mathcal{K}^*(G, A)$ и все подгруппы семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ принадлежат $\mathcal{K}^*(G, B)$. Справедливость противоположных включений вытекает из первой части предложения 2.1.1 и замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп. Предложение доказано. $\square$

Теорема 2.4.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно, $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно. Пусть также группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой или совпадает с одной из подгрупп $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\varphi\,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) *семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями,*
2) *подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*

Доказательство. В силу предложения 2.4.2 множества подгрупп, составляющих семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, совпадают с множествами $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ соответственно. Поэтому достаточность условий 1)—2) и необходимость условия 1) вытекают из предложения 2.2.2. Необходимость условия 2) следует из предложения 2.2.3. Теорема доказана. □

Понятно, что если, скажем, $K = B$, то $G = A$ и из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости этой группы вовсе не следует $\mathcal{K}$-отделимость в ней подгруппы H. Поэтому условия $H \neq A$ и $K \neq B$ в формулировке приведенной теоремы являются существенными.

Прежде, чем переходить к следствиям теоремы 2.4.3 докажем вспомогательное

Предложение 2.4.4. *Пусть $\mathcal{L}$ — наследственный класс групп, группы A и B/K $\mathcal{L}$-аппроксимируемы, группа B $\mathcal{L}$-регулярна по подгруппе K. И пусть подгруппы H и K являются циклическими или $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$. Пусть также $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{L}^*(A)$ и $\mathcal{L}^*(B)$ соответственно. Тогда семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями.*

Доказательство. Покажем, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией. Предположим, напротив, что существует неединичный элемент $g \in A$, принадлежащий пересечению всех подгрупп семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Из $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы A следует, что существует подгруппа $R \in \mathcal{L}^*(A)$, не содержащая элемент g. Обозначим $H \cap R$ через U, $U\varphi$ — через V. Из наследственности класса $\mathcal{L}$ следует, что $V \in \mathcal{L}^*(K)$.

Так как подгруппы H и R нормальны в группе A, то и подгруппа U нормальна в A. Поэтому $U\alpha = U$ для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}_A(H)$. Если $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$, то для каждого $\beta \in \mathrm{Aut}_B(K)$ справедливо равенство $U\varphi\beta\varphi^{-1} = U$ и потому $V\beta = V$. Следовательно, подгруппа V нормальна в B. Если же K — нормальная циклическая подгруппа группы B, то и любая ее подгруппа нормальна в B.

Поэтому ввиду $\mathcal{L}$-регулярности группы B по подгруппе K существует подгруппа $S \in \mathcal{L}^*(B)$ такая, что $K \cap S = V$. Значит, подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы. Таким образом, $g \notin R$ и $R \in \{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, что противоречит выбору элемента g.

Убедимся, что семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ также является фильтрацией. Рассуждая от противного, зафиксируем произвольный неединичный элемент g, принадлежащий пересечению всех подгрупп семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Предположим сначала, что g содержится в подгруппе K. Тогда g имеет прообраз относительно изоморфизма φ, то есть существует неединичный элемент h группы H такой, что $h\varphi = g$. Далее, как и выше, находим пару подгрупп (R, S) семейства $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ такую, что $h \notin R$. Тогда $g \notin S$, что противоречит выбору данного элемента.

Пусть теперь элемент g не содержится в подгруппе K. Тогда gK — отличный от 1 элемент $\mathcal{L}$-аппроксимируемой группы B/K. Следовательно, существует гомоморфизм σ группы B/K на некоторую $\mathcal{L}$-группу такой, что $(gK)\sigma \neq 1$. Пусть $N = \ker(\varepsilon\sigma)$, где $\varepsilon\colon B \to B/K$ — естественный гомоморфизм. Тогда $N \in \mathcal{L}^*(B)$ и $g \notin N$. Так как $K \subseteq N$, то $K \cap N = K$, а потому подгруппы A и N (H, K, φ)-совместимы. Кроме того, подгруппы A и N принадлежат семействам $\mathcal{L}^*(A)$ и $\mathcal{L}^*(B)$ соответственно. Таким образом, $g \notin N$ и $N \in \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, что вновь противоречит выбору элемента g. Значит, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — фильтрация. Предложение доказано. □

Следствие 2.4.5. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно, $K \in \mathcal{K}^*(B)$. И пусть подгруппы H и K являются циклическими или $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A.*

Доказательство. Необходимость условия вытекает из теоремы 2.4.3. Проверим достаточность условия. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно. Так как $K \in \mathcal{K}^*(B)$, то в силу предложения 1.6.1 группа B $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе K. Группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема по условию, B/K принадлежит $\mathcal{K}$ и потому также $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Следовательно, в силу предложения 2.4.4 семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями. Так как фактор-группа B/K $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то ввиду предложения 1.1.2 подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B. Поэтому группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема согласно теореме 2.4.3. Следствие доказано. □

Следствие 2.4.6. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно. И пусть подгруппы H и K являются циклическими или $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*

Доказательство. Необходимость условий сразу же вытекает из теоремы 2.4.3. Проверим достаточность. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно.

Предположим сначала, что класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп. Тогда в силу предложения 1.6.3 группа B $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе K. Из $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы K в группе B и замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации ввиду предложения 1.1.2 следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость фактор-группы B/K. Теперь согласно предложению 2.4.4 семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями и в силу теоремы 2.4.3 группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Пусть теперь $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу. Тогда согласно предложению 1.3.2 он включает и все полициклические группы а, значит, и все конечно порожденные нильпотентные группы. Поэтому оказываются выполненными условия следствия 2.4.5, из которого и вытекает $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G. Следствие доказано. □

2.5. Случай, когда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна

Теорема 2.5.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно. Пусть также $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно. Если $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) *группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$,*
2) *семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями,*
3) *подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*

Доказательство. Проверим достаточность условий 1 — 3. Так как группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, то в силу предложения 2.4.2 множества подгрупп, составляющих семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, совпадают с множествами $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ соответственно. Поэтому $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G следует из предложения 2.2.2.

Проверим необходимость условий 1 — 3. Так как подгруппа H нормальна в группе G, то ее централизатор $C_G(H)$ также нормален в G и группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ изоморфна фактор-группе $G/C_G(H)$. Из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G в силу предложения 1.1.3 следует $\mathcal{K}$-отделимость подгруппы $C_G(H)$. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации ввиду предложения 1.1.2 получаем $\mathcal{K}$-аппроксимируемость фактор-группы $G/C_G(H)$. Тогда $\mathrm{Aut}_G(H)$ также $\mathcal{K}$-аппроксимируема. К тому же группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна по условию, значит, она принадлежит классу $\mathcal{K}$ согласно утверждению 3 предложения 1.1.1.

Теперь, как и выше, можем воспользоваться предложением 2.4.2, согласно которому множества подгрупп семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ совпадают с множествами $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ соответственно. Поэтому в силу предложения 2.2.2 семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями.

$\mathcal{K}$-отделимость подгруппы H в группе A и подгруппы K в группе B вытекает из предложения 2.2.3. Теорема доказана. □

Если конечными являются не только группа $\mathrm{Aut}_G(H)$, но и объединяемые подгруппы, критерий аппроксимируемости группы G имеет более простую формулировку.

Теорема 2.5.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемые группы, H и K — конечные подгруппы. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*
2. *Существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе H.*
3. *Группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Импликация $1 \Rightarrow 2$ следует из утверждения 2 предложения 1.1.1, импликация $2 \Rightarrow 3$ — из предложения 1.1.5. Проверим импликацию $3 \Rightarrow 1$.

Прежде всего, заметим, что если хотя бы одна из объединяемых подгрупп совпадает с соответствующим свободным множителем, то вся группа G совпадает с другим свободным множителем и потому $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Следовательно, далее мы можем считать, что подгруппы H и K являются собственными.

В силу утверждения 2 предложения 1.1.1 подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A и подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B.

Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп семейств $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно. Покажем, что тогда семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями.

Предположим, напротив, что в пересечении всех подгрупп семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ найдется неединичный элемент a. Тогда a — отличный от 1 элемент $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы A. Следовательно, существует подгруппа $R \in \mathcal{K}^*(A)$ такая, что $a \notin R$. В силу предложения 1.1.1 подгруппу R можно выбрать так, чтобы, кроме того, выполнялось соотношение $H \cap R = 1$. Аналогично строим подгруппу S группы B такую, что $S \in \mathcal{K}^*(B)$ и $K \cap S = 1$. Тогда подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы. Значит, $R = R_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Тогда a не принадлежит пересечению всех подгрупп семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, что противоречит выбору элемента a. Следовательно, $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — фильтрация.

Аналогично проверяется, что семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ также является фильтрацией.

Теперь требуемое утверждение следует из теоремы 2.5.1. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что теорема 2.5.2 обобщает и расширяет следствие 2 из работы [41], представляющее собой критерий аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения двух конечных p-групп с нормальными объединенными подгруппами, а также теорему 2 из статьи [6], которая в свою очередь является обобщением результата Д. И. Молдаванского и А. Е. Копровой [14] об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных π-групп с центральными объединенными подгруппами.

Следствие 2.5.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемые группы, H и K — конечные подгруппы. Если группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой или совпадает с одной из подгрупп $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\varphi\,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. В силу предложения 1.1.5 группы $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\mathrm{Aut}_B(K)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$. Тогда согласно предложению 2.4.1 группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ также принадлежит классу $\mathcal{K}$. Поэтому обобщенное свободное произведение G $\mathcal{K}$-аппроксимируемо в силу теоремы 2.5.2. Следствие доказано. □

2.6. Случай, когда объединенная подгруппа имеет конечный ранг Гирша-Зайцева

Теорема 2.6.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, группы A и B аппроксимируются $\mathcal{K}$-группами без кручения, подгруппы H и K имеют конечный ранг Гирша-Зайцева. Тогда следующие два условия равносильны и при выполнении любого из них группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

1. *Группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*
2. *Существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе H.*

Доказательство. Импликация $2 \Rightarrow 1$ имеет место в силу предложения 1.1.5. Проверим справедливость импликации $1 \Rightarrow 2$. Легко видеть, что класс всех $\mathcal{K}$-групп без кручения замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому в силу предложения 1.1.6 существует нормальная подгруппа R группы A такая, что фактор-группа A/R является $\mathcal{K}$-группой без кручения и $R \cap H = 1$. Аналогично существует подгруппа S, нормальная в группе B, такая, что B/S — $\mathcal{K}$-группа без кручения и $S \cap K = 1$.

Выбранные таким образом подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы. Следовательно, можем построить обобщенное свободное произведение $G_{R,S}$. Как уже отмечалось в доказательстве предложения 2.4.2, группа $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ является гомоморфным образом группы $\mathrm{Aut}_G(H)$. Так как $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$ и класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, то $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R) \in \mathcal{K}$. Поэтому согласно следствию 2.3.2 существует гомоморфизм γ группы $G_{R,S}$ на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах A/R и B/S. Так как $R \cap H = 1$ и гомоморфизм $\rho_{R,S}$ продолжает естественный гомоморфизм группы A на фактор-группу A/R, то композиция $\rho_{R,S}\gamma$ представляет собой гомоморфизм группы G на $\mathcal{K}$-группу, инъективный на подгруппе H. Таким образом, импликация $1 \Rightarrow 2$ также имеет место.

Осталось отметить, что $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G следует из утверждения 1 предложения 1.3.5. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2.6.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, группы A и B аппроксимируются $\mathcal{K}$-группами без кручения, подгруппы H и K имеют конечный ранг Гирша-Зайцева. Если группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой или совпадает с одной из подгрупп $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\varphi \, \mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. В силу предложения 1.1.6 существует гомоморфизм группы A на некоторую $\mathcal{K}$-группу без кручения, инъективный на H. Тогда согласно предложению 1.1.5 группа $\mathrm{Aut}_A(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Аналогично проверяется, что группа $\mathrm{Aut}_B(K)$ также содержится в классе $\mathcal{K}$. Тогда согласно предложению 2.4.1 группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$ и группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 2.6.1. Следствие доказано. $\square$

2.7. Примеры

Приведем теперь заявленные примеры, показывающие, что если корневой класс $\mathcal{K}$ не замкнут относительно факторизации, то ни одно из условий $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, наложенных на группу G в теореме 2.3.1, не является необходимым для существования гомоморфизма этой группы на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективного на свободных множителях.

Пример 2.7.1. Пусть $\mathcal{K}$ — класс всех разрешимых групп без кручения, A — свободная абелева группа ранга 2 с базисом $\{a; b\}$, B, H, K — бесконечные циклические группы, порожденные элементами c, b, c^3 соответственно, $\varphi\colon H \to K$ — изоморфизм, переводящий b в c^3.

Тогда группы A, B принадлежат классу $\mathcal{K}$. Подгруппы H и K центральны в группах A и B соответственно, откуда следует, что группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ тривиальна и потому также принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Фактор-группа A/H изоморфна $\mathbb{Z}$, значит, является $\mathcal{K}$-группой, в то время как фактор-группа B/K изоморфна $\mathbb{Z}_3$ и, следовательно, не содержится в классе $\mathcal{K}$.

Покажем, что при этом существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на A и B.

Заметим, что задание группы G порождающими символами и определяющими соотношениями имеет вид

$$G = \langle a, b, c;\ ab = ba,\ b = c^3 \rangle = \langle a, c;\ ac^3 = c^3 a \rangle.$$

Пусть $F = \langle x, y;\ xy = yx \rangle$ — свободная абелева группа ранга 2. Отображение порождающих группы G в группу F, выполняемое по правилу $a \to x$, $c \to y$ и естественным образом продолжаемое до отображения слов, переводит определяющее соотношение группы G в равенство, верное в группе F, и потому задает сюръективный гомоморфизм $\rho\colon G \to F$. Так как $A\rho = \mathrm{sgp}\{x, y^3\}$ и $B\rho = \mathrm{sgp}\{y\}$, то

$$\ker \rho \cap A = \ker \rho \cap B = 1,$$

и потому ρ является искомым гомоморфизмом.

Пример 2.7.2. Пусть снова $\mathcal{K}$ — класс всех разрешимых групп без кручения, A — свободная абелева группа ранга 2 с базисом $\{a; b\}$. Пусть также B — неабелево расщепляемое расширение бесконечной циклической группы с порождающим c при помощи бесконечной циклической группы с порождающим d, т. е.

$$B = \langle c, d;\ d^{-1}cd = c^{-1} \rangle;$$

H, K — бесконечные циклические группы, порожденные элементами b и c^n, $n \geqslant 1$, соответственно; $\varphi\colon H \to K$ — изоморфизм подгрупп, отождествляющий элементы b и c^n.

Тогда A и B являются $\mathcal{K}$-группами, но группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ не принадлежит классу $\mathcal{K}$, так как содержит элемент порядка 2 — автоморфизм группы H, совпадающий с ограничением на эту группу внутреннего автоморфизма группы G, производимого элементом d.

Фактор-группа A/H содержится в $\mathcal{K}$, так как она изоморфна $\mathbb{Z}$. Если $n = 1$, то фактор-группа B/K также изоморфна $\mathbb{Z}$ и, следовательно, является $\mathcal{K}$-группой. Если же $n > 1$, то cK — отличный от 1 элемент конечного порядка фактор-группы B/K. Значит, B/K не является группой без кручения, а потому не содержится в классе $\mathcal{K}$.

Построим гомоморфизм группы G на $\mathcal{K}$-группу, инъективный на свободных множителях A и B.

Обозначим через N нормальное замыкание элемента a в группе G и положим $U = N \cap A$. Из представления группы G порождающими символами и определяющими соотношениями

$$G = \langle a, b, c, d;\ ab = ba,\ d^{-1}cd = c^{-1},\ b = c^n \rangle = \\ = \langle a, c, d;\ ac^n = c^n a,\ d^{-1}cd = c^{-1} \rangle$$

видно, что $N \cap B = 1$ и $G/N \cong B$. Поэтому в силу теоремы о строении подгрупп обобщенного свободного произведения [46] группа N представима в виде свободного произведения некоторой свободной группы F и семейства подгрупп, сопряженных с U, причем среди сомножителей есть и сама подгруппа U.

Определим гомоморфизм ρ группы N на группу U таким образом, что каждый элемент свободной группы F переходит в 1, а элементы групп, изоморфных U, отображаются в соответствующие им элементы группы U. Тогда гомоморфизм ρ инъективен на всех сомножителях, изоморфных U, включая и саму группу U.

Так как группа A принадлежит классу $\mathcal{K}$ и последний замкнут относительно взятия подгрупп, то группа U также содержится в классе $\mathcal{K}$. Тогда $1 \leqslant \ker \rho \leqslant N \leqslant G$ — субнормальный ряд группы G такой, что фактор-группы G/N и $N/\ker\rho$ принадлежат классу $\mathcal{K}$. Отсюда в силу условия

Грюнберга в группе G существует нормальная подгруппа M такая, что $M \subseteq \ker\rho$ и фактор-группа G/M содержится в классе $\mathcal{K}$.

Так как $M \subseteq \ker\rho$ и $\ker\rho \subseteq N$, то

$$M \cap A = M \cap \ker\rho \cap N \cap A = M \cap \ker\rho \cap U = 1$$

и $M \cap B = M \cap N \cap B = 1$.

Таким образом, естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/M является искомым.

Пример 2.7.3. Вначале проведем несложное общее построение. Пусть A, B, C — некоторые изоморфные группы, $\varepsilon\colon A \to C$ и $\delta\colon B \to C$ — изоморфизмы, $L \leqslant C$, $H = L\varepsilon^{-1}$, $K = L\delta^{-1}$ и $\varphi = (\varepsilon\delta^{-1})|_H$ — изоморфизм подгрупп H и K.

Отображения ε и δ, очевидно, согласованы с изоморфизмом φ, и поэтому их можно продолжить до гомоморфизма ψ группы G на группу C. Положим $N = \ker\psi$. Так как ε и δ инъективны, то $N \cap A = N \cap B = 1$.

Если, кроме того, $\mathcal{K}$ — некоторый корневой класс групп и $C \in \mathcal{K}$, то ψ — гомоморфизм группы G на $\mathcal{K}$-группу C, инъективный на подгруппах A и B.

Пусть теперь $\mathcal{K}$ — класс всех разрешимых групп без кручения, C — некоторое расщепляемое расширение бесконечной циклической группы с порождающим c при помощи бесконечной циклической группы с порождающим d (т. е. либо свободная абелева группа ранга 2, либо метабелева группа из примера 2.7.2), L — подгруппа группы C, порожденная элементом c^3. Тогда группы A и B принадлежат классу $\mathcal{K}$. При этом $c\varepsilon^{-1}H$ и $c\delta^{-1}K$ — отличные от 1 элементы конечного порядка фактор-групп A/H и B/K соответственно. Значит, A/H и B/K не содержатся в классе $\mathcal{K}$. Если группа C абелева, то $\mathrm{Aut}_G(H) = 1$ и, следовательно, $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$. Если же группа C не является абелевой, то, как и в примере 2.7.2, $\mathrm{Aut}_G(H) \notin \mathcal{K}$.

Глава 3

Аппроксимируемость свободных произведений с объединенными ретрактами

3.1. Случай, когда объединенная подгруппа является ретрактом в одном из свободных множителей

Всюду в данной главе, как и в предыдущей, предполагается, что $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Однако, вместо нормальности на объединенные подгруппы накладывается другое условие: хотя бы одна из них должна быть ретрактом в соответствующем свободном множителе. Отметим, что результаты, которые удается получить в данной главе, справедливы для любых корневых классов групп, в том числе незамкнутых относительно факторизации.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда один свободный множитель принадлежит корневому классу $\mathcal{K}$, а в другом, аппроксимируемом классом $\mathcal{K}$, объединенная подгруппа является ретрактом. При данных предположениях группа G оказывается $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, и это утверждение будет использоваться далее при изучении общего случая.

Теорема 3.1.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, K — ретракт в группе B. Пусть также группа A принадлежит классу $\mathcal{K}$, а группа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Тогда группа A является ретрактом в G и, в частности, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Так как подгруппа K является ретрактом в группе B, то существует нормальная подгруппа N группы B такая, что B — расщепляемое расширение группы N при помощи группы K. Поскольку $N \cap K = 1$, подгруппы 1 и N (H, K, φ)-совместимы. Поэтому можно рассмотреть группу $G_{1,N} = (A * B/N;\ H = KN/N,\ \varphi_{1,N})$.

В силу выбора подгруппы N справедливо равенство $B/N = KN/N$. Следовательно, $G_{1,N} = A$. Так как гомоморфизм $\rho_{1,N}\colon G \to G_{1,N}$ продолжает тождественное отображение группы A, то он инъективен на этой группе и потому последняя является ретрактом группы G. При этом $A \in \mathcal{K}$ и, значит, $G_{1,N}$ оказывается $\mathcal{K}$-группой. Таким образом, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу утверждения 1 предложения 1.3.5. Теорема доказана. $\square$

Воспользуемся теоремой 3.1.1 и докажем достаточное условие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G, в котором группа A уже необязательно принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Теорема 3.1.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, K — ретракт в группе B. Пусть группы A и B $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, подгруппа H группы A $\mathcal{K}$-отделима, группа A $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе H. Тогда группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть M и N — произвольные подгруппы семейств $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно. Построим пару (H, K, φ)-совместимых подгрупп $R \in \mathcal{K}^*(A)$ и $S \in \mathcal{K}^*(B)$ таких, что $R \leqslant M$, $S \leqslant N$ и группа $G_{R,S}$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Так как $M \in \mathcal{K}^*(A)$, то $M \cap H \in \mathcal{K}^*(H)$. Аналогично $N \in \mathcal{K}^*(B)$, значит, $N \cap K \in \mathcal{K}^*(K)$. Тогда прообраз подгруппы $N \cap K$ относительно изоморфизма φ содержится в $\mathcal{K}^*(H)$. Следовательно,

$$T = (M \cap H) \cap (N \cap K)\varphi^{-1} \in \mathcal{K}^*(H)$$

в силу утверждения 1 предложения 1.1.1. Так как группа A $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе H, то существует подгруппа $P \in \mathcal{K}^*(A)$ такая, что $P \cap H \leqslant T$.

Поскольку K — ретракт в группе B, найдется такая нормальная подгруппа J группы B, что B является расщепляемым расширением группы J при помощи группы K. Обозначим через S подгруппу $(P \cap H)\varphi(N \cap J)$. Тогда согласно предложению 1.4.2 $S \in \mathcal{K}^*(B)$ и B/S — расщепляемое расширение JS/S при помощи KS/S.

Пусть $R = P \cap M$. Тогда, снова в силу утверждения 1 предложения 1.1.1, $R \in \mathcal{K}^*(A)$. Покажем, что подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы.

Из построения группы P вытекает справедливость включения

$$P \cap H \subseteq M \cap H.$$

Тогда

$$(H \cap R)\varphi = (H \cap P \cap M)\varphi = ((P \cap H) \cap (M \cap H))\varphi = (P \cap H)\varphi.$$

Так как $K \cap J = 1$ и $(P \cap H)\varphi \leqslant K$, то

$$K \cap S = K \cap (P \cap H)\varphi(N \cap J) = (P \cap H)\varphi.$$

Таким образом, подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы.

Поскольку A/R и B/S — $\mathcal{K}$-группы и KS/S — ретракт в группе B/S, группа $G_{R,S}$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 3.1.1. Следовательно, подгруппы R и S являются искомыми.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G.

Пусть g — произвольный неединичный элемент группы G. Тогда возможны два случая: $g \in H$ и $g \notin H$.

Рассмотрим первый случай. Тогда g — неединичный элемент $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы A. Значит, найдется подгруппа $M \in \mathcal{K}^*(A)$ такая, что $g \notin M$.

В силу доказанного выше существуют (H, K, φ)-совместимые подгруппы $R \in \mathcal{K}^*(A)$ и $S \in \mathcal{K}^*(B)$ такие, что $R \leqslant M$, $S \leqslant B$ и группа $G_{R,S}$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Тогда под действием гомоморфизма $\rho_{R,S}$ элемент g переходит в отличный от 1 элемент gR фактор-группы A/R. Значит, существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на $\mathcal{K}$-группу такой, что $(gR)\sigma \neq 1$.

Рассмотрим второй случай: $g \notin H$. Пусть $g = g_1 g_2 \ldots g_l$ — несократимая запись элемента g длины $l \geqslant 1$. Так как $g \notin H$, то для любого $k \in \{1, \ldots, l\}$ $g_k \notin H$, причем если $l > 1$, то соседние слоги лежат в разных свободных множителях.

Пусть для некоторого $k \in \{1, \ldots, l\}$ $g_k \in A$. Тогда из $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы H в группе A и того, что $g_k \notin H$, следует, что существует подгруппа $E_k \in \mathcal{K}^*(A)$ такая, что $g_k \notin HE_k$.

Так как K — ретракт $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы B, то в силу предложения 1.4.3 подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в B. Поэтому если для некоторого $k \in \{1, \ldots, l\}$ $g_k \in B$, то аналогично находим подгруппу $F_k \in \mathcal{K}^*(B)$ такую, что $g_k \notin KF_k$.

Пусть

$$\Omega_A = \{k \mid 1 \leqslant k \leqslant l \wedge g_k \in A\},$$
$$\Omega_B = \{k \mid 1 \leqslant k \leqslant l \wedge g_k \in B\}.$$

Обозначим

$$M = \bigcap_{k\in\Omega_A} E_k, \quad N = \bigcap_{k\in\Omega_B} F_k.$$

Тогда в силу утверждения 1 предложения 1.1.1 $M \in \mathcal{K}^*(A)$, $N \in \mathcal{K}^*(B)$ и $g_k \notin HM$, если $g_k \in A$; $g_k \notin KN$, если $g_k \in B$.

Как и выше, построим пару (H, K, φ)-совместимых подгрупп $R \in \mathcal{K}^*(A)$ и $S \in \mathcal{K}^*(B)$ такую, что $R \leqslant M$, $S \leqslant N$ и группа $G_{R,S}$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Подействуем гомоморфизмом $\rho_{R,S}$ на элемент g. Тогда

$$g\rho_{R,S} = (g_1 g_2 \ldots g_l)\rho_{R,S} = g_1\rho_{R,S} g_2\rho_{R,S} \ldots g_l\rho_{R,S} \neq 1.$$

Действительно, если $g_k \in A$, то $g_k \notin HR$, значит, $g_kR \notin HR/R$. Если $g_k \in B$, то $g_k \notin KS$, значит, $g_kS \notin KS/S$. Таким образом, если $l = 1$, то $g\rho_{R,S}$ не входит в объединенную подгруппу, следовательно, отличен от 1. Если $l > 1$, то запись элемента $g\rho_{R,S}$ является несократимой и имеет длину, большую 1, значит, $g\rho_{R,S} \neq 1$.

Построенная группа $G_{R,S}$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Поэтому существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на $\mathcal{K}$-группу такой, что $(g\rho_{R,S})\sigma \neq 1$. Следовательно, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Теорема доказана. $\square$

В последнем параграфе настоящей главы будет показано, что условия $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы H в группе A и $\mathcal{K}$-квазирегулярности группы A по подгруппе H, содержащиеся в формулировке теоремы 3.1.2, в общем случае не являются необходимыми для $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G.

Следствие 3.1.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, $H \in \mathcal{K}^*(A)$, подгруппа K — ретракт в группе B. Тогда группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Из условия $A/H \in \mathcal{K}$ в силу утверждения 1 предложения 1.1.2 следует, что подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A. $\mathcal{K}$-квазирегулярность группы A по подгруппе H вытекает из предложения 1.6.1.

Из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы B следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость ее подгруппы K, а, значит, и изоморфной ей группы H. Тогда группа A

представляет собой расширение $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы H при помощи $\mathcal{K}$-группы A/H. Следовательно, группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема согласно утверждению 3 предложения 1.3.4.

Теперь группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 3.1.2. Следствие доказано. □

Следствие 3.1.4. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, A — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K — ретракт в группе B. Тогда группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то согласно предложению 1.6.3 группа A $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе H и группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 3.1.2.

Пусть класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу. Тогда бесконечная циклическая группа также принадлежит классу $\mathcal{K}$ ввиду замкнутости последнего относительно взятия подгрупп. Хорошо известно (см., например, [28, с. 13]), что в конечно порожденной нильпотентной группе без кручения все члены верхнего центрального ряда изолированы. Отсюда с помощью очевидной индукции легко следует, что каждая такая группа обладает конечным субнормальным рядом с бесконечными циклическими факторами. Так как класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно расширений, это означает, что все конечно порожденные нильпотентные группы без кручения содержатся в $\mathcal{K}$.

Поскольку группа A является конечно порожденной нильпотентной, ее периодическая часть $\tau(A)$ конечна. Ввиду $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы A и утверждения 2 предложения 1.1.1 отсюда вытекает существование такой подгруппы $N \in \mathcal{K}^*(A)$, что $N \cap \tau(A) = 1$. Тогда N является конечно порожденной нильпотентной группой без кручения и в силу доказанного выше принадлежит классу $\mathcal{K}$. Следовательно, группа A представляет собой расширение $\mathcal{K}$-группы N при помощи $\mathcal{K}$-группы A/N и потому в свою очередь содержится в классе $\mathcal{K}$. Теперь $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G вытекает из теоремы 3.1.1. □

Следствие 3.1.5. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, группы A и B аппроксимируются $\mathcal{K}$-группами без кручения, подгруппы H и K имеют* *конечный ранг Гирша-Зайцева, K — ретракт в группе B. Тогда группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Как уже было отмечено в доказательстве теоремы 2.6.1, класс всех $\mathcal{K}$-групп без кручения замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому в силу предложения 1.1.6 существует нормальная подгруппа Z группы A такая, что фактор-группа A/Z является $\mathcal{K}$-группой без кручения и $Z \cap H = 1$. Тогда группа A, очевидно, $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе H и ввиду предложения 1.1.4 подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A. Следовательно, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 3.1.2. □

3.2. Случай, когда объединенная подгруппа является ретрактом в каждом свободном множителе

Если объединенная подгруппа является ретрактом в каждом свободном множителе, ситуация становится более определенной, чем в предыдущем параграфе. Группа G оказывается аппроксимируемой корневым классом $\mathcal{K}$ без каких-либо дополнительных условий, накладываемых на объединенные подгруппы и свободные множители (за исключением, разумеется, $\mathcal{K}$-аппроксимируемости последних). Более того, это утверждение остается верным и для свободного произведения произвольного семейства групп с одной объединенной подгруппой, как показывает теорема 3.2.2, сформулированная ниже и являющаяся основным результатом данного параграфа.

Справедливость следующего предложения установлена в [6], однако здесь приводится другое, более простое и короткое, его доказательство, опирающееся на теорему 3.1.2.

Предложение 3.2.1. [6, теорема 1]. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, A и B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемые группы, подгруппа H — ретракт в группе A, подгруппа K — ретракт в группе B. Тогда группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. В силу предложения 1.4.3 подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A. Покажем, что группа A $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе H.

Так как H — ретракт в группе A, то найдется такая нормальная подгруппа Z группы A, что A — расщепляемое расширение Z при помощи H, то есть $A = HZ$ и $Z \cap H = 1$. Пусть N — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(H)$. Тогда в силу предложения 1.4.2 подгруппа NZ принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(A)$. Из соотношения $Z \cap H = 1$ вытекает, что $NZ \cap H \leqslant N$. Следовательно, группа A $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе H.

Значит, обобщенное свободное произведение G $\mathcal{K}$-аппроксимируемо в силу теоремы 3.1.2. Предложение доказано. □

Таким образом, теорема 3.1.2 обобщает один из результатов работы [6], а также доказанное Дж. Болером и Б. Эвансом утверждение о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух финитно аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами [35] и полученное П. А. Бобровским и Е. В. Соколовым [34] аналогичное утверждение для аппроксимируемости конечными p-группами.

Теорема 3.2.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп и*

$$G = (G_\lambda\ (\lambda \in \Lambda);\ H_\lambda = H_\mu,\ \varphi_{\lambda\mu}\ (\lambda, \mu \in \Lambda)) \ -$$

свободное произведение групп G_λ, $\lambda \in \Lambda$, с одной объединенной подгруппой. Пусть также для любого $\lambda \in \Lambda$ подгруппа H_λ является ретрактом в G_λ и группа G_λ $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Тогда объединенная подгруппа является ретрактом в G и группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Доказательство. Так как для любого $\lambda \in \Lambda$ H_λ — ретракт в группе G_λ, то для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа N_λ группы G_λ такая, что $G_\lambda = N_\lambda H_\lambda$ и $N_\lambda \cap H_\lambda = 1$. Тогда $G_\lambda / N_\lambda \cong H_\lambda$.

Пусть Ω — некоторое подмножество множества Λ. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ введем нормальную подгруппу R_λ группы G_λ, полагая $R_\lambda = N_\lambda$, если $\lambda \notin \Omega$, и $R_\lambda = 1$, если $\lambda \in \Omega$. Обозначим через $\overline{G}_\lambda$ фактор-группу G_λ / R_λ и через $\overline{H}_\lambda$ ее подгруппу $H_\lambda R_\lambda / R_\lambda$. Очевидно, что $\overline{G}_\lambda \cong H_\lambda$, если $\lambda \notin \Omega$, и $\overline{G}_\lambda \cong G_\lambda$, если $\lambda \in \Omega$.

Определим отображение $\overline{\varphi}_{\lambda\mu} \colon \overline{H}_\lambda \to \overline{H}_\mu$, действующее по правилу $(hR_\lambda)\overline{\varphi}_{\lambda\mu} = (h\varphi_{\lambda\mu})R_\mu$, где $h \in H_\lambda$. Так как $N_\lambda \cap H_\lambda = 1$ для любого $\lambda \in \Lambda$, то отображение $\overline{\varphi}_{\lambda\mu}$ определено корректно и является изоморфизмом подгруппы $\overline{H}_\lambda$ группы $\overline{G}_\lambda$ на подгруппу $\overline{H}_\mu$ группы $\overline{G}_\mu$.

Нетрудно показать, что для семейства изоморфизмов подгрупп

$$\{\overline{\varphi}_{\lambda\mu}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$$

выполняются соотношения

$$\overline{\varphi}_{\lambda\mu}\overline{\varphi}_{\mu\nu} = \overline{\varphi}_{\lambda\nu},\ \overline{\varphi}_{\lambda\mu}^{-1} = \overline{\varphi}_{\mu\lambda},\ \overline{\varphi}_{\lambda\lambda} = \mathrm{id}_{\overline{H}_\lambda},$$

где $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$. Поэтому можем построить свободное произведение

$$G_\Omega = (\overline{G}_\lambda\ (\lambda \in \Lambda);\ \overline{H}_\lambda = \overline{H}_\mu,\ \overline{\varphi}_{\lambda\mu}\ (\lambda, \mu \in \Lambda))$$

групп $\overline{G}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, с одной объединенной подгруппой.

Легко видеть, что отображение $\rho_\Omega\colon G \to G_\Omega$, индуцированное естественными гомоморфизмами групп G_λ на $\overline{G}_\lambda$, где $\lambda \in \Lambda$, переводит все определяющие соотношения группы G в равенства, справедливые в группе G_Ω. Поэтому ρ_Ω — гомоморфизм, являющийся, очевидно, сюръективным.

Зафиксируем произвольное $\lambda \in \Lambda$ и покажем, что H_λ — ретракт в группе G. Положим Ω равным пустому множеству и $N = \ker \rho_\Omega$. Тогда

$$N \cap H_\lambda = N \cap G_\lambda \cap H_\lambda = R_\lambda \cap H_\lambda = N_\lambda \cap H_\lambda = 1.$$

Так как Ω — пустое множество, то для любого $\lambda \in \Lambda$ выполнено включение $N_\lambda \subseteq N$, откуда $G_\lambda = H_\lambda N_\lambda \subseteq H_\lambda N$. Значит, обобщенное свободное произведение G также содержится в $H_\lambda N$. Обратное включение очевидно. Следовательно, $G = H_\lambda N$. Таким образом, H_λ — ретракт в группе G.

Перейдем теперь к доказательству $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G.

Заметим, что если мощность множества Λ равна 2, то $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G имеет место в силу предложения 3.2.1. Отсюда и из того, что объединенная подгруппа является ретрактом в G, с помощью очевидной индукции получаем, что группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема для любого конечного множества Λ.

Пусть теперь множество Λ бесконечно. Убедимся, что и в этом случае группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Пусть g — произвольный неединичный элемент группы G. Тогда он имеет несократимую запись $g = g_1 g_2 \ldots g_l$, где $l \geqslant 1$, $g_i \in G_{\lambda_i} \setminus 1$ и, если $l > 1$, то $g_i \notin H_{\lambda_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$. Обозначим через Ω множество индексов $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l\}$. Согласно построению группы G_Ω гомоморфизм ρ_Ω действует инъективно на подгруппах G_{λ_i}, $i \in \{1, \ldots, l\}$. Поэтому $g_i\rho_\Omega \neq 1$ для всех

$i \in \{1, \dots, l\}$ и $g\rho_\Omega = (g_1\rho_\Omega)(g_2\rho_\Omega)\dots(g_l\rho_\Omega)$ — несократимая запись элемента $g\rho_\Omega$. Следовательно, $g\rho_\Omega \neq 1$.

Заметим, что если $\lambda \notin \Omega$, то $\overline{G}_\lambda = \overline{H}_\lambda$. Поэтому G_Ω изоморфна свободному произведению

$$(\overline{G}_\lambda\ (\lambda \in \Omega);\ \overline{H}_\lambda = \overline{H}_\mu,\ \overline{\varphi}_{\lambda\mu}\ (\lambda, \mu \in \Omega)),$$

которое является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой в силу доказанного выше.

Таким образом, $g\rho_\Omega$ — отличный от единицы элемент $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы G_Ω. Тогда найдется гомоморфизм ψ группы G на $\mathcal{K}$-группу такой, что $g\psi \neq 1$. Следовательно, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Теорема доказана. $\square$

3.3. Примеры

Ниже приводятся два примера, показывающие, что условия, накладываемые на подгруппу H в теореме 3.1.2, в общем случае не являются необходимыми для аппроксимируемости группы G.

Пример 3.3.1. Пусть p и q — различные простые числа, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп, A — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом a, B — свободная группа с базисом $\{b; c\}$, H и K — бесконечные циклические группы, порожденные элементами a^q и b соответственно, $\varphi\colon H \to K$ — изоморфизм, переводящий элемент a^q в элемент b.

Г. Баумслаг [33] доказал, что построенная таким образом группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Очевидно также, что подгруппа K является ретрактом в группе B.

В силу предложения 1.5.2 подгруппа конечно порожденной абелевой группы $\mathcal{F}_p$-отделима в ней тогда и только тогда, когда она $\{p\}'$-изолирована в этой группе. Заметим, что q является $\{p\}'$-числом и $a^q \in H$, при этом $a \notin H$. Значит, подгруппа H не является $\{p\}'$-изолированной, а потому и $\mathcal{F}_p$-отделимой в группе A.

Покажем, что группа A $\mathcal{F}_p$-квазирегулярна по подгруппе H.

Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{F}_p^*(H)$. Тогда M порождается элементом a^{qp^n} для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Положим $N = A^{p^n}$. Тогда $N \in \mathcal{F}_p^*(A)$ и, так как числа p^n и q взаимно просты, $N \cap H = M$. Значит, группа A $\mathcal{F}_p$-квазирегулярна по подгруппе H.

Пример 3.3.2. Пусть A — свободная группа с базисом $\{a_i; b_i; c \mid i \in \mathbb{N}\}$, N — нормальное замыкание в группе A множества элементов

$$\{a_i^2, b_i^2, c^2, [a_i, b_i]c^{-1}, [a_i, b_j], [a_i, a_j], [b_i, b_j], [a_i, c], [b_i, c] \mid \\ i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}.$$

Тогда фактор-группа A/N имеет представление

$$\langle a_i, b_i, c;\ a_i^2 = b_i^2 = c^2 = 1,\ [a_i, b_i] = c, \\ [a_i, b_j] = [a_i, a_j] = [b_i, b_j] = [a_i, c] = [b_i, c] = 1,\ i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j\rangle.$$

Известно (см. [25, пример 1.4.3]), что фактор-группа A/N не является финитно аппроксимируемой. Поэтому согласно предложению 1.1.2 подгруппа N группы A не обладает свойством финитной отделимости.

Пусть далее H — нормальное замыкание в группе A множества элементов

$$\{a_i^2, b_i^2, c, [a_i, b_j], [a_i, a_j], [b_i, b_j] \mid i, j \in \mathbb{N}\},$$

K — некоторая изоморфная копия группы H, $\varphi\colon H \to K$ — изоморфизм, B — прямое произведение группы K и циклической группы порядка 2 с порождающим b.

Тогда свободные множители A и B обобщенного свободного произведения G финитно аппроксимируемы, K — ретракт в группе B.

Фактор-группа A/H представляет собой, очевидно, прямое произведение циклических групп порядка 2 и, следовательно, финитно аппроксимируема. Поэтому подгруппа H финитно отделима в группе A в силу предложения 1.1.2.

Легко видеть, что $N \leqslant H$ и образ подгруппы H относительно естественного гомоморфизма группы A на фактор-группу A/N совпадает с конечной циклической подгруппой, порожденной элементом c. Следовательно, $N \in \mathcal{F}^*(H)$, где $\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп.

Как было отмечено выше, подгруппа N не отделима в классе $\mathcal{F}$. Поэтому в силу предложения 1.6.2 группа A не является $\mathcal{F}$-квазирегулярной по подгруппе H.

Покажем, что группа G финитно аппроксимируема.

Обозначим через M нормальное замыкание в группе G подгруппы A. Легко видеть, что подгруппа M порождается подгруппами A и $b^{-1}Ab$.

Так как элемент b принадлежит централизатору в группе B подгруппы K, из теоремы Б. Неймана [47, с. 512] следует, что группа M представляет собой свободное произведение подгрупп A и $b^{-1}Ab$ с объединенными подгруппами H и K. Поскольку эти подгруппы объединяются в соответствии с изоморфизмом, являющимся ограничением на H очевидного изоморфизма группы A на группу $b^{-1}Ab$, из теоремы 4 работы [7] следует, что группа M финитно аппроксимируема.

Таким образом, группа G представляет собой расширение финитно аппроксимируемой группы M при помощи фактор-группы G/M, изоморфной конечной группе B/K. Следовательно, группа G финитно аппроксимируема в силу утверждения 3 предложения 1.3.4.

Глава 4

Аппроксимируемость HNN-расширений с совпадающими связанными подгруппами

4.1. Общие условия аппроксимируемости HNN-расширений групп

До конца данной главы будем считать, что B — некоторая группа, H и K — изоморфные подгруппы группы B, $\varphi\colon H \to K$ — некоторый изоморфизм подгрупп, $G = (B,\ t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi)$ — HNN-расширение группы B с проходной буквой t и подгруппами H и K, связанными при помощи изоморфизма φ. На первый взгляд, выбранные обозначения конфликтуют с используемыми в предыдущих двух главах. Однако, после изучения параграфа 4.2 станет ясно, что это сделано неслучайно. Также всюду далее, если X — некоторая группа и x — ее элемент, то $\langle x \rangle$ будет обозначать циклическую подгруппу группы X, порожденную элементом x.

В настоящей главе рассматривается частный случай общей конструкции HNN-расширения, когда связанные подгруппы H и K совпадают. Однако, в данном параграфе будем предполагать, что H и K — произвольные, необязательно совпадающие, изоморфные подгруппы группы B.

Общий подход к исследованию аппроксимационных свойств свободных конструкций групп, предложенный Г. Баумслагом в работе [32] применительно к обобщенным свободным произведениям, был затем распространен на HNN-расширения Б. Баумслагом и М. Треткоффом [30]. Следуя идеям этих работ, подгруппу S группы B назовем (H, K, φ)-*совместимой*, если выполнено равенство $(H \cap S)\varphi = K \cap S$.

Если S — нормальная (H, K, φ)-совместимая подгруппа группы B, то отображение

$$\varphi_S\colon HS/S \to KS/S,$$

действующее по правилу $(hS)\varphi_S = (h\varphi)S$, где $h \in H$, определено корректно и является изоморфизмом подгрупп HS/S и KS/S фактор-группы B/S. Это позволяет построить HNN-расширение

$$G_S = (B/S,\ \tau;\ \tau^{-1}HS/S\tau = KS/S,\ \varphi_S)$$

группы B/S с проходной буквой τ и подгруппами HS/S и KS/S, связанными относительно изоморфизма φ_S.

Нетрудно показать, что естественный гомоморфизм $\rho\colon B \to B/S$ может быть продолжен до гомоморфизма $\rho_S\colon G \to G_S$, переводящего t в τ и являющегося, таким образом, сюръективным.

Предложение 4.1.1. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G и $S = B \cap N$. Тогда подгруппа S является (H, K, φ)-совместимой и существует гомоморфизм группы G_S на группу G/N, действующий на подгруппе B/S инъективно.*

Обратно, если для (H, K, φ)-совместимой нормальной подгруппы S группы B существует гомоморфизм σ группы G_S на некоторую группу, действующий на подгруппе B/S инъективно, и $N = \ker(\rho_S\sigma)$, то $S = B \cap N$.

Доказательство. Пусть N — нормальная подгруппа группы G и $S = B \cap N$. Тогда подгруппа S нормальна в группе B и справедливы соотношения

$$(H \cap S)\varphi = (H \cap B \cap N)\varphi = (H \cap N)\varphi = t^{-1}(H \cap N)t =$$
$$= t^{-1}Ht \cap t^{-1}Nt = K \cap N = K \cap B \cap N = K \cap S.$$

Таким образом, S — нормальная (H, K, φ)-совместимая подгруппа группы B. Следовательно, можем построить HNN-расширение

$$G_S = (B/S,\ \tau;\ \tau^{-1}HS/S\tau = KS/S,\ \varphi_S)$$

и гомоморфизм $\rho_S\colon G \to G_S$, переводящий t в τ.

Хорошо известно (и легко видеть), что ядро M гомоморфизма ρ_S группы G на группу G_S совпадает с нормальным замыканием в группе G подгруппы S. Следовательно, $M \subseteq N$ и потому существует гомоморфизм σ группы G_S на фактор-группу G/N, действующий по правилу: для любого элемента $x \in G_S$ полагаем $x\sigma = gN$ для некоторого элемента $g \in G$ такого, что $x = g\rho_S$.

Действительно, если для элементов f и g группы G выполнено равенство $f\rho_S = g\rho_S$, то элемент $f^{-1}g$ лежит в подгруппе M, а потому и в подгруппе N. Следовательно, $fN = gN$, и корректность определения отображения σ доказана. Гомоморфность и сюръективность этого отображения очевидны.

Произвольный элемент x из подгруппы B/S группы G_S имеет вид $x = bS$ для некоторого элемента $b \in B$. Поскольку по определению гомоморфизма ρ_S выполнено равенство $b\rho_S = bS$, имеем $x\sigma = bN$. Таким образом, если x лежит в ядре гомоморфизма σ, то $b \in N$ и потому $b \in B \cap N = S$. Следовательно, $x = 1$ и инъективность действия гомоморфизма σ на подгруппе B/S доказана.

Предположим теперь, что для некоторой (H, K, φ)-совместимой нормальной подгруппы S группы B существует гомоморфизм σ группы G_S на некоторую группу, действующий на подгруппе B/S инъективно. Полагая $N = \ker(\rho_S\sigma)$, покажем, что $S = B \cap N$.

Так как для гомоморфизма ρ_S справедливо равенство $S\rho_S = 1$, включение $S \subseteq B \cap N$ очевидно. Обратно, если элемент $b \in B$ принадлежит подгруппе N, то $1 = (b\rho_S)\sigma = (bS)\sigma$, и поскольку σ на подгруппе B/S действует инъективно, имеем $bS = 1$, т. е. $b \in S$. Таким образом, включение $B \cap N \subseteq S$ также справедливо, и равенство $S = B \cap N$ доказано. Предложение доказано. $\square$

В работе [30] Б. Баумслаг и М. Треткофф указали необходимые и достаточные условия финитной аппроксимируемости HNN-расширения G, которые с использованием введенного в главе 2 определения отделимости семейством нормальных подгрупп могут быть сформулированы следующим образом.

Предложение 4.1.2. [30, теорема 4.2]. *Пусть $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех нормальных (H, K, φ)-совместимых подгрупп конечного индекса группы B.*

1. *Если группа G финитно аппроксимируема, то ее единичная подгруппа отделима семейством $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.*
2. *Если подгруппы 1, H, K отделимы семейством $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, то группа G финитно аппроксимируема.*

Покажем, что условия 1 и 2 предложения 4.1.2 можно сформулировать в других терминах.

Как уже было отмечено во введении, класс $\mathcal{F}$ всех конечных групп является корневым. Если $S \in \mathcal{F}^*(G, B)$ и подгруппа $N \in \mathcal{F}^*(G)$ такова, что $S = N \cap B$, то по предложению 4.1.1 подгруппа S (H, K, φ)-совместима и является, очевидно, нормальной подгруппой конечного индекса группы B. Поэтому $S = S_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$.

Обратно, пусть подгруппа S группы B совпадает с некоторой подгруппой S_λ. Тогда группа G_S представляет собой HNN-расширение конечной группы B/S. Следовательно, она финитно аппроксимируема [30, предложение 2.1]. Согласно утверждению 2 предложения 1.1.1 существует подгруппа $N_S \in \mathcal{F}^*(G_S)$ такая, что $N_S \cap B/S = 1$. Тогда естественный гомоморфизм $\sigma\colon G_S \to G_S/N_S$ действует инъективно на подгруппе B/S. Поэтому снова по предложению 4.1.1 $S = N \cap B$, где $N = \ker(\rho_S\sigma)$. Поскольку группа G_S/N_S конечна, $N \in \mathcal{F}^*(G)$ и, значит, $S \in \mathcal{F}^*(G, B)$.

Таким образом, множество подгрупп, составляющих семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, совпадает с множеством $\mathcal{F}^*(G, B)$. Отсюда вытекает, что приводимое далее предложение 4.1.3 является обобщением предложения 4.1.2.

Предложение 4.1.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп.*

1. *Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то ее единичная подгруппа отделима семейством $\mathcal{K}^*(G, B)$.*
2. *Если подгруппы 1, H, K отделимы семейством $\mathcal{K}^*(G, B)$, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Проверим сначала первое утверждение. Пусть g — произвольный неединичный элемент, принадлежащий пересечению всех подгрупп семейства $\mathcal{K}^*(G, B)$. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, следовательно, существует подгруппа $N \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $g \notin N$. Значит, элемент g не содержится в подгруппе $N \cap B$ семейства $\mathcal{K}^*(G, B)$. Поэтому g не входит в пересечение всех подгрупп данного семейства, что противоречит выбору элемента g. Таким образом, единичная подгруппа отделима семейством $\mathcal{K}^*(G, B)$.

Докажем теперь второе утверждение. Пусть g — произвольный неединичный элемент группы G. Рассмотрим два случая: $g \in B$ и $g \notin B$.

Пусть сначала $g \in B$. Тогда g не принадлежит хотя бы одной из подгрупп семейства $\mathcal{K}^*(G, B)$ ввиду отделимости единичной подгруппы данным семейством. Обозначим эту подгруппу через S_0. Так как $S_0 = D_0 \cap B$ для подходящей подгруппы $D_0 \in \mathcal{K}^*(G)$ и элемент g группы B не содержится в S_0, то $g \notin D_0$.

Таким образом, для произвольного неединичного элемента g группы G, лежащего в B, существует подгруппа $D_0 \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $g \notin D_0$.

Пусть теперь $g \notin B$ и

$$g = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \dots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n \text{ —}$$

некоторая приведенная запись элемента g. Тогда $n \geqslant 1$ и для любого $i \in \{1, \dots, n-1\}$, если $\varepsilon_i = -1$ и $\varepsilon_{i+1} = 1$, то $g_i \notin H$, если $\varepsilon_i = 1$ и $\varepsilon_{i+1} = -1$, то $g_i \notin K$. Для каждого $i \in \{0, \dots, n\}$ определим подгруппу $S_i \in \mathcal{K}^*(G, B)$ следующим образом.

Положим $S_0 = B$. Заметим, что $G \in \mathcal{K}^*(G)$ и потому $B = G \cap B \in \mathcal{K}^*(G, B)$.

Если $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $\varepsilon_i = -1$, $\varepsilon_{i+1} = 1$, то $g_i \notin H$ и, учитывая тот факт, что подгруппа H отделима семейством $\mathcal{K}^*(G, B)$, среди подгрупп данного семейства выберем подгруппу S_i такую, что $g_i \notin HS_i$.

Если $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_{i+1} = -1$, то $g_i \notin K$ и аналогично, пользуясь отделимостью подгруппы K семейством $\mathcal{K}^*(G, B)$, находим подгруппу $S_i \in \mathcal{K}^*(G, B)$ такую, что $g_i \notin KS_i$.

Если $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} \neq 0$, положим $S_i = B$.

Если $i = n$, то $S_i = B$.

По определению семейства $\mathcal{K}^*(G, B)$ для любой подгруппы S_i данного семейства существует подгруппа $D_i \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $S_i = D_i \cap B$. Обозначим через D пересечение всех подгрупп D_i, где $i \in \{0, \dots, n\}$. В силу утверждения 1 предложения 1.1.1 подгруппа D принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(G)$. Обозначим $S = B \cap D$. Тогда в силу первого утверждения предложения 4.1.1 подгруппа S (H, K, φ)-совместима и существует гомоморфизм группы G_S на $\mathcal{K}$-группу G/D, действующий на подгруппе B/S инъективно. Из утверждения 2 предложения 1.3.5 теперь следует, что группа G_S $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Подействуем гомоморфизмом ρ_S на элемент g:

$$g\rho_S = (g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \dots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n)\rho_S =$$
$$= (g_0 S)\tau^{\varepsilon_1}(g_1 S)\tau^{\varepsilon_2}(g_2 S) \dots (g_{n-1} S)\tau^{\varepsilon_n}(g_n S) \neq 1.$$

Действительно, если $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $\varepsilon_i = -1$, $\varepsilon_{i+1} = 1$, то в силу выбора подгруппы S_i $g_i \notin HS_i$, а потому $g_i \notin HS$ и $g_iS \notin HS/S$; если $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_{i+1} = -1$, то $g_i \notin KS$, значит, $g_iS \notin KS/S$. Таким образом, данная запись элемента $g\rho_S$ является приведенной и ее длина совпадает с длиной приведенной записи элемента g. Следовательно, $g\rho_S \neq 1$.

Так как группа G_S $\mathcal{K}$-аппроксимируема, существует гомоморфизм ψ этой группы на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $g\rho_S\psi \neq 1$. В силу произвольности выбора элемента g отсюда вытекает, что группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Предложение доказано. $\square$

Заметим, что первое утверждение предложения 4.1.3 справедливо для произвольного класса групп.

4.2. Строение и некоторые свойства рассматриваемых HNN-расширений

С этого момента и до конца главы будем считать, что связанные подгруппы H и K совпадают. Понятно, что изоморфизм φ при этом превращается в автоморфизм подгруппы H. Кроме того, при данном предположении группа G представима в виде обобщенного свободного произведения. А именно, имеет место

Предложение 4.2.1. *Пусть A — подгруппа группы G, порожденная подгруппой H и элементом t. Тогда*

1) *подгруппа A является расщепляемым расширением группы H при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом t, с сопровождающим гомоморфизмом ρ, переводящим t в автоморфизм φ группы H;*
2) *группа G представляет собой свободное произведение своих подгрупп A и B с объединенной подгруппой H.*

Доказательство. Пусть H' — изоморфная подгруппе H группа и $\psi\colon H' \to H$ — изоморфизм. Обозначим через A' расщепляемое расширение группы H' при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом t', с сопровождающим гомоморфизмом $\rho\colon t' \to \varphi' = \psi\varphi\psi^{-1}$.

Пусть P — свободное произведение групп A' и B с подгруппами H' и H, объединенными относительно изоморфизма ψ. Нетрудно показать, что с помощью преобразований Тице представление группы P может быть преобразовано в представление группы G. При этом элементы подгруппы H' переходят в элементы подгруппы H, а элемент t' — в элемент t. Таким образом, оба утверждения предложения имеют место. Предложение доказано. □

Из предложения 4.2.1 вытекает, что к группе G, исследуемой в данной главе, применимы все понятия, определенные для обобщенного свободного произведения двух групп, а также ряд утверждений, полученных для этой свободной конструкции. В частности, если подгруппа H нормальна в группе B и корневой класс групп замкнут относительно факторизации, то ввиду предложения 2.2.1 оказывается справедливой следующая более удобная в применении версия предложения 4.1.3.

Предложение 4.2.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, H — нормальная подгруппа группы B.*

1. *Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то семейство $\mathcal{K}^*(G, B)$ является фильтрацией.*
2. *Если семейство $\mathcal{K}^*(G, B)$ является фильтрацией и подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.* □

Остается верным для рассматриваемой группы G и предложение 2.2.3, указывающее, в каких случаях сформулированное в предложении 4.2.2 достаточное условие аппроксимируемости группы G становится необходимым (в качестве дополнительного комментария к формулировке указанного предложения заметим, что в данной главе свободный множитель, порожденный H и t, всегда отличен от H).

Следует, однако, подчеркнуть, что при помощи предложения 4.2.1 удается не только переинтерпретировать результаты первых двух глав в других терминах, но также, используя специфические свойства HNN-расширений, упростить формулировки и усилить некоторые из них так, что полученные в итоге утверждения представляют самостоятельный интерес.

Введенные в предложении 4.2.1 обозначения A и ρ зафиксируем до конца изложения. Кроме того, всюду далее C будет обозначать ядро сопровождающего гомоморфизма ρ. Приведем теперь два предложения, касающиеся свойств группы A.

Предложение 4.2.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп и, если $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Пусть также подгруппа H $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Тогда группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп следует, что бесконечная циклическая группа принадлежит классу $\mathcal{K}$. Поэтому в силу утверждения 3 предложения 1.3.4 группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема как расширение $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы H при помощи $\mathcal{K}$-группы $\langle t\rangle$.

Пусть теперь класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Ввиду первого утверждения предложения 1.3.4 группа $\langle t\rangle$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Поскольку группы $\langle t\rangle\rho$ и $\langle\varphi\rangle$ совпадают, из условия $\langle\varphi\rangle \in \mathcal{K}$ вытекает, что группа $\langle t\rangle\rho$ также принадлежит классу $\mathcal{K}$. Таким образом, расщепляемое расширение A $\mathcal{K}$-аппроксимируемо в силу утверждения 2 предложения 1.4.1. Предложение доказано. $\square$

Предложение 4.2.4. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп и, если $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Тогда группа A $\mathcal{K}$-регулярна и $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе H.*

Доказательство. Предположим сначала, что класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу. Тогда в силу замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп группа $\langle t\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, а потому $\mathcal{K}$-регулярность и $\mathcal{K}$-квазирегулярность группы A по подгруппе H следуют из предложения 1.6.1.

Пусть теперь $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — $\mathcal{K}$-группа. Пусть также M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(H)$. В силу утверждения 1 предложения 1.4.1 подгруппа CH, где, напомним, $C = \ker\rho$, нормальна в A и $A/CH \cong \langle t\rangle\rho$. Так как группы $\langle t\rangle\rho$ и $\langle\varphi\rangle$ совпадают, то из условия $\langle\varphi\rangle \in \mathcal{K}$ вытекает, что A/CH — $\mathcal{K}$-группа. Значит, подгруппа CH принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(A)$.

Подгруппы C и H поэлементно перестановочны согласно тому же утверждению и M нормальна в H, поэтому CM — нормальная подгруппа группы CH. Заметим, что

$$CH/CM \cong HCM/CM \cong H/(H \cap CM).$$

Отсюда и из того, что $H \cap C = 1$ следует, что фактор-группа CH/CM изоморфна $\mathcal{K}$-группе H/M. Тогда субнормальный ряд $1 \leqslant CM \leqslant CH \leqslant A$ удовлетворяет условию Грюнберга. Следовательно, в группе A существует нормальная подгруппа N такая, что $N \subseteq CM$ и $A/N \in \mathcal{K}$. При этом

$$N \cap H \subseteq CM \cap H = M.$$

Значит, группа A $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе H.

Отметим теперь, что если подгруппа M нормальна в группе A, то и подгруппа CM нормальна в A. Фактор-группа A/CM представляет собой расширение $\mathcal{K}$-группы CH/CM при помощи $\mathcal{K}$-группы A/CH и, поскольку класс $\mathcal{K}$ является корневым, сама оказывается $\mathcal{K}$-группой. Таким образом, $CM \in \mathcal{K}^*(A)$ и $H \cap CM = M$, то есть группа A $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе H. Предложение доказано. □

В заключение данного параграфа сформулируем упоминавшийся во введении критерий $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G в случае, когда автоморфизм φ является тождественным отображением.

Предложение 4.2.5. [52, теорема 4.2]. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, $\varphi = \mathrm{id}_H$. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в B.* □

4.3. Основная теорема

Всюду далее, за исключением параграфа 4.8, подгруппа H является нормальной в B. При таком условии она оказывается нормальной и в G. Как и в главе 2, это позволяет рассмотреть группу $\mathrm{Aut}_G(H)$, которая, как легко видеть, порождается своей подгруппой $\mathrm{Aut}_B(H)$ и автоморфизмом φ. Основным результатом данной главы является

Теорема 4.3.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, B — $\mathcal{K}$-группа, H — нормальная подгруппа группы B. Если $B/H \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$,* *то существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе B, и, в частности, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Напомним, что в соответствии с предложением 4.2.1 подгруппа A группы G, порожденная подгруппой H и элементом t, является расщепляемым расширением группы H при помощи группы $\langle t\rangle$ и что C обозначает ядро сопровождающего гомоморфизма этого расширения. Так как $H \cap C = 1$, то подгруппа HC/C фактор-группы A/C изоморфна группе H и потому принадлежит классу $\mathcal{K}$.

В силу утверждения 1 предложения 1.4.1

$$(A/C)/(HC/C) \cong A/HC \cong \langle t\rangle\rho = \langle\varphi\rangle.$$

Кроме того, $\langle\varphi\rangle$ — подгруппа $\mathcal{K}$-группы $\mathrm{Aut}_G(H)$ и класс $\mathcal{K}$ является наследственным. Значит, $(A/C)/(HC/C) \in \mathcal{K}$.

Таким образом, A/C — расширение $\mathcal{K}$-группы HC/C при помощи $\mathcal{K}$-группы $(A/C)/(HC/C)$. Поскольку класс $\mathcal{K}$ — корневой, данное расширение является $\mathcal{K}$-группой. Следовательно, подгруппа C содержится в семействе $\mathcal{K}^*(A)$.

Как уже было отмечено выше, $H \cap C = 1$. Поэтому подгруппы $C \in \mathcal{K}^*(A)$ и $1 \in \mathcal{K}^*(B)$ (H, H, φ)-совместимы (в смысле определения из параграфа 2.1) и, значит, можем построить обобщенное свободное произведение

$$G_{C,1} = (A/C * B;\ HC/C = H,\ \varphi_{C,1})$$

и гомоморфизм $\rho_{C,1}\colon G \to G_{C,1}$.

Определим отображение

$$\gamma\colon\ \mathrm{Aut}_G(H) \to \mathrm{Aut}_{G_{C,1}}(HC/C),$$

сопоставляющее каждому элементу

$$\tilde{g} = \hat{g}|_H \in \mathrm{Aut}_G(H)$$

элемент

$$\widetilde{g\rho_{C,1}} = \widehat{g\rho_{C,1}}|_{HC/C} \in \mathrm{Aut}_{G_{C,1}}(HC/C).$$

Непосредственно проверяется, что данное определение корректно. Покажем, что отображение γ является изоморфизмом.

Пусть $\tilde{g} \neq 1$, то есть существует элемент h группы H такой, что $h\tilde{g} \neq h$. Так как $H \cap C = 1$, то естественный гомоморфизм $A \to A/C$, а, значит, и $\rho_{C,1}$ инъективен на подгруппе H. Подействуем на элемент $h\rho_{C,1}$ группы HC/C автоморфизмом $\widetilde{g\rho_{C,1}}$:

$$h\rho_{C,1}\widetilde{g\rho_{C,1}} = (g\rho_{C,1})^{-1}h\rho_{C,1}g\rho_{C,1} = (g^{-1}hg)\rho_{C,1} = (h\tilde{g})\rho_{C,1} \neq h\rho_{C,1},$$

так как $h\tilde{g} \neq h$ и гомоморфизм $\rho_{C,1}$ инъективен на H. Следовательно, автоморфизм $\widetilde{g\rho_{C,1}}$ не является тождественным. Значит, отображение γ инъективно. Гомоморфность данного отображения очевидна, а его сюръективность следует из сюръективности гомоморфизма $\rho_{C,1}$. Поэтому $\mathrm{Aut}_G(H) \cong \mathrm{Aut}_{G_{C,1}}(HC/C)$.

Отсюда и из того, что $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, вытекает, что $\mathrm{Aut}_{G_{C,1}}(HC/C) \in \mathcal{K}$. Теперь в силу теоремы 2.3.1 существует гомоморфизм σ группы $G_{C,1}$ на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе B. Следовательно, композиция гомоморфизмов $\rho_{C,1}$ и σ переводит группу G на группу из класса $\mathcal{K}$, действуя инъективно на подгруппе B, а потому является искомым гомоморфизмом. $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G вытекает из утверждения 2 предложения 1.3.5. Теорема доказана. $\square$

Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то теорема 4.3.1 превращается в критерий, формулируемый следующим образом.

Следствие 4.3.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, B — $\mathcal{K}$-группа, H — нормальная подгруппа группы B. Тогда следующие два утверждения равносильны и при выполнении любого из них группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

1. *Существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе B.*
2. *Группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Так как класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, то из условия $B \in \mathcal{K}$ следует, что $B/H \in \mathcal{K}$. Поэтому импликация $2 \Rightarrow 1$ вытекает из справедливости доказанной выше теоремы. Импликация $1 \Rightarrow 2$ имеет место в силу предложения 1.1.5. Следствие доказано. $\square$

Заметим, что обобщенные свободные произведения из примеров 2.7.1 и 2.7.2 можно рассматривать как HNN-расширения, если взять образующий a в качестве проходной буквы.Это означает, что ни одно из условий $B/H \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, наложенных на группу G в теореме 4.3.1, не является необходимым для существования гомоморфизма данной группы на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективного на подгруппе B. В частности, утверждение следствия 4.3.2 неверно для корневых классов групп, не замкнутых относительно факторизации.

4.4. Случай, когда группа $\mathbf{Aut}_G(H)$ является абелевой

Следующее предложение могло бы быть выведено из предложения 2.4.1, однако проще дать его прямое доказательство.

Предложение 4.4.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, H — нормальная подгруппа группы B, группы $\langle\varphi\rangle$ и $\mathrm{Aut}_B(H)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа. Тогда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Как уже было отмечено выше, группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ порождается своими подгруппами $U = \langle\varphi\rangle$ и $V = \mathrm{Aut}_B(H)$.

Так как $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа, то она совпадает с произведением порождающих ее подгрупп U и V. Поэтому

$$\mathrm{Aut}_G(H)/V \cong U/U \cap V.$$

Так как группы $\langle\varphi\rangle$ и $\mathrm{Aut}_B(H)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$ и этот класс замкнут относительно факторизации, получаем, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — расширение $\mathcal{K}$-группы при помощи $\mathcal{K}$-группы. Класс $\mathcal{K}$ — корневой, значит, такое расширение снова является $\mathcal{K}$-группой, и потому группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Предложение доказано. □

Поскольку далее в данной главе $H = K$, подгруппу, являющуюся (H, K, φ)-совместимой согласно определению из параграфа 4.1, будем для краткости называть просто (H, φ)-*совместимой*. Следующие два предложения описывают свойства семейства всех (H, φ)-совместимых подгрупп группы G.

Предложение 4.4.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, H — нормальная подгруппа группы B, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех (H, φ)-совместимых подгрупп, принадлежа-*

щих семейству $\mathcal{K}^*(B)$. Пусть также выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$*;*
2) $\mathrm{Aut}_G(H)$ *— абелева группа и, если $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа $\langle \varphi \rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Тогда семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ совпадает с множеством $\mathcal{K}^*(G, B)$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $\lambda \in \Lambda$ и обозначим через S подгруппу S_λ. Так как S (H, φ)-совместима, то определено HNN-расширение G_S. Гомоморфизм ρ_S сюръективен и переводит H на HS/S. Поэтому $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ — гомоморфный образ группы $\mathrm{Aut}_G(H)$. Покажем, что он содержится в классе $\mathcal{K}$.

Если группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, то ввиду замкнутости $\mathcal{K}$ относительно факторизации $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ также является $\mathcal{K}$-группой.

Пусть теперь группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ абелева и, если $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то $\langle \varphi \rangle \in \mathcal{K}$. Поскольку $S \in \mathcal{K}^*(B)$, фактор-группа B/S принадлежит классу $\mathcal{K}$. Отсюда согласно предложению 1.1.5 получаем, что группа $\mathrm{Aut}_{B/S}(HS/S)$ также содержится в $\mathcal{K}$. Так как группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ абелева, то и ее гомоморфный образ $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ также является абелевой группой. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то в силу предложения 1.3.2 $\langle \varphi \rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа $\langle \varphi \rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$ по условию. Так как $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, то $\langle \varphi \rangle \rho_S$ также является $\mathcal{K}$-группой. Следовательно, согласно предложению 4.4.1 группа $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ содержится в $\mathcal{K}$.

Таким образом, $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ — $\mathcal{K}$-группа. Поэтому в силу следствия 4.3.2 существует гомоморфизм σ группы G_S на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе B/S. Полагая $N = \ker(\rho_S \sigma)$, получаем, что $N \in \mathcal{K}^*(G)$ и согласно второй части предложения 4.1.1 $S = B \cap N$. Значит, подгруппа S принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(G, B)$. Ввиду произвольности выбора λ отсюда следует, что все подгруппы семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ содержатся в $\mathcal{K}^*(G, B)$. Справедливость противоположного включения вытекает из первой части предложения 4.1.1 и замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп. Таким образом, множества $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ совпадают. Предложение доказано. $\square$

Предложение 4.4.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп; H — нормальная $\mathcal{K}$-аппроксимируемая подгруппа группы B, являющаяся $\mathcal{K}$-отделимой в этой группе; группа B $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе H; $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех (H,φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семейству $\mathcal{K}^*(B)$. Пусть также выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $\mathrm{Aut}_G(H)$ *— конечная группа;*
2) $\mathrm{Aut}_G(H) = \langle\varphi\rangle$ *и, если $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Тогда семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией.

Доказательство. Пусть b — произвольный неединичный элемент, принадлежащий пересечению всех подгрупп семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Рассмотрим два случая: $b \notin H$ и $b \in H$.

Пусть сначала $b \notin H$. Тогда bH — отличный от единицы элемент фактор-группы B/H. Из $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы H в группе B и замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации в силу предложения 1.1.2 следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы B/H. Следовательно, найдется подгруппа $S/H \in \mathcal{K}^*(B/H)$ такая, что $bH \notin S/H$. Тогда подгруппа S принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(B)$ и не содержит элемент b. Кроме того, $H \subseteq S$, откуда вытекает, что

$$(H \cap S)\varphi = H\varphi = H = H \cap S.$$

Значит, подгруппа S (H,φ)-совместима, что противоречит выбору элемента b.

Пусть теперь $b \in H$.

Предположим сначала, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа. Так как группа H $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то существует подгруппа M семейства $\mathcal{K}^*(H)$, не содержащая элемент b.

Обозначим через N пересечение образов подгруппы M относительно всех автоморфизмов из группы $\mathrm{Aut}_G(H)$. Тогда подгруппа N нормальна в группе G и, в частности, N нормальна в B. По условию группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна, поэтому число подгрупп в пересечении N также конечно. Легко видеть, что каждый автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}_G(H)$ индуцирует изоморфизм фактор-групп H/M и $H/M\alpha \cong H\alpha/M\alpha$. Поэтому подгруппа $M\alpha$ содержится в $\mathcal{K}^*(H)$. Таким образом, N является пересечением конечного числа подгрупп семейства $\mathcal{K}^*(H)$. Следовательно, в силу утверждения 1 предложения 1.1.1 N также содержится в $\mathcal{K}^*(H)$.

Пользуясь $\mathcal{K}$-регулярностью группы B по подгруппе H, находим подгруппу $S \in \mathcal{K}^*(B)$ такую, что $S \cap H = N$. Отсюда и из того, что подгруппа N нормальна в группе G, вытекает, что

$$(H \cap S)\varphi = N\varphi = t^{-1}Nt = N = H \cap S.$$

Следовательно, подгруппа S (H, φ)-совместима.

Так как $b \notin M$, то $b \notin N$. Значит, элемент b группы H не содержится в ее подгруппе $S \cap H$, а потому $b \notin S$, что вновь противоречит выбору b.

Теперь будем считать выполненным второе условие. В силу предложения 4.2.3 группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема и, значит, найдется подгруппа $M \in \mathcal{K}^*(A)$ такая, что $b \notin M$. Обозначим через N пересечение подгрупп M и H. Тогда $b \notin N$ и ввиду наследственности класса $\mathcal{K}$ подгруппа N принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(H)$.

Подгруппа N нормальна в группе A, поэтому $N\varphi = t^{-1}Nt = N$. Так как $\mathrm{Aut}_G(H) = \langle\varphi\rangle$, отсюда следует, что N нормальна в G, а, значит, и в B. Теперь ввиду $\mathcal{K}$-регулярности группы B по подгруппе H находим подгруппу S семейства $\mathcal{K}^*(B)$, удовлетворяющую условию $S \cap H = N$. Тогда

$$(H \cap S)\varphi = N\varphi = N = H \cap S.$$

Значит, подгруппа S (H, φ)-совместима.

Элемент b не содержится в N, поэтому, как и выше, $b \notin S$, что противоречит выбору данного элемента. Предложение доказано. $\square$

Теорема 4.4.4. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, H — нормальная подгруппа группы B, $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех (H, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семейству $\mathcal{K}^*(B)$.*

1. *Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией.*
2. *Пусть класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — конечная группа. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и толь-*

ко тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B, семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией и группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Доказательство. Сначала покажем достаточность условий утверждений 1 и 2. Согласно условию теоремы либо класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, либо $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — $\mathcal{K}$-группа. Поэтому ввиду предложения 4.4.2 множества подгрупп, составляющих семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\mathcal{K}^*(G,B)$, совпадают. Значит, из того, что подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией, в силу предложения 4.2.2 вытекает $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G.

Теперь докажем необходимость условий обоих утверждений.

$\mathcal{K}$-отделимость подгруппы H в группе B следует из предложения 2.2.3.

Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то как и выше, из предложения 4.4.2 вытекает, что семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ совпадает с множеством $\mathcal{K}^*(G,B)$. Значит, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией в силу предложения 4.2.2.

Если же класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — конечная группа, то из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G ввиду утверждения 1 предложения 4.2.1 и утверждения 3 предложения 1.4.1 следует, что группа $\langle\varphi\rangle$, совпадающая с $\langle t\rangle\rho$, содержится в $\mathcal{K}$. Поэтому снова можно воспользоваться предложениями 4.4.2 и 4.2.2. Теорема доказана. □

Следствие 4.4.5. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, подгруппа H $\mathcal{K}$-аппроксимируема и принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(B)$, $\mathrm{Aut}_G(H)=\langle\varphi\rangle$.*

1. *Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*
2. *Пусть класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — конечная группа. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Необходимость условия утверждения 2 сразу же вытекает из теоремы 4.4.4. Проверим достаточность условий обоих утверждений.

Согласно условию $B/H \in \mathcal{K}$, откуда следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость фактор-группы B/H и, ввиду предложения 1.1.2, $\mathcal{K}$-отделимость подгруппы H в группе B. Также из того, что $H \in \mathcal{K}^*(B)$, в силу предложения 1.6.1 вытекает $\mathcal{K}$-регулярность группы B по подгруппе H. Поэтому можно воспользоваться предложением 4.4.3, согласно которому семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ всех (H, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семейству $\mathcal{K}^*(B)$, является фильтрацией. Остается заметить, что по условию группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ совпадает со своей подгруппой, порожденной автоморфизмом φ, и, следовательно, является абелевой. Теперь достаточность условия обоих утверждений вытекает из теоремы 4.4.4. Следствие доказано. □

Следствие 4.4.6. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, H — нормальная подгруппа группы B, $\mathrm{Aut}_G(H) = \langle \varphi \rangle$.*

1. *Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*
2. *Пусть класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle \varphi \rangle$ — конечная группа. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $\langle \varphi \rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$ и подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*

Доказательство. Как и в предыдущем следствии, необходимость условия утверждения 2 вытекает из теоремы 4.4.4. Проверим достаточность условий обоих утверждений.

Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то согласно предложению 1.3.2 он включает и все полициклические группы, а, значит, и все конечно порожденные нильпотентные группы. Поэтому группа B принадлежит классу $\mathcal{K}$. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации следует, что подгруппа H содержится в семействе $\mathcal{K}^*(B)$, а потому выполнены условия следствия 4.4.5, согласно которому группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Если же $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то ввиду утверждения 2 предложения 1.6.3 группа B $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе H. Поэтому согласно предложению 4.4.3 семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ всех(H, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семейству $\mathcal{K}^*(B)$, является фильтрацией. Доказательство теперь завершается так же, как и в следствии 4.4.5. Следствие доказано. □

В случае, когда связанная подгруппа H является бесконечной циклической, критерий аппроксимируемости группы G имеет более простой вид.

Теорема 4.4.7. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, H — нормальная бесконечная циклическая подгруппа группы B.*

1. *Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*
2. *Если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B и группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Так как H — бесконечная циклическая группа, то автоморфизм φ либо является тождественным отображением группы H, либо переводит каждый элемент группы H в обратный. В первом случае справедливость утверждения теоремы вытекает из предложения 4.2.5. Рассмотрим второй случай и сведем его к теореме 4.4.4.

Предположим сначала, что группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Отсюда следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость ее подгруппы A. Так как $\langle t\rangle\rho = \langle\varphi\rangle$ и порядок φ конечен, то в силу утверждения 1 предложения 4.2.1 и утверждения 3 предложения 1.4.1 группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Из предложения 2.2.3 вытекает $\mathcal{K}$-отделимость подгруппы H в группе B.

Пусть теперь подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B и, если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Согласно предложению 4.2.4 группа A $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе H. Фактор-группа A/H изоморфна $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группе $\langle t\rangle$. Поэтому согласно предложениям 2.4.2 и 2.4.4 семейства $\mathcal{K}^*(G,A)$ и $\mathcal{K}^*(G,B)$ являются фильтрациями. Остается заметить, что в силу предложения 4.4.2 семейство $\mathcal{K}^*(G,B)$ совпадает с множеством $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ всех (H,φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семейству $\mathcal{K}^*(B)$, и, следовательно, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема по теореме 4.4.4. Теорема доказана. □

Заметим, что если изменить условия теоремы 4.4.7, потребовав конечности подгруппы H, то полученное в результате утверждение будет справедливо в силу приводимого ниже следствия 4.5.5. Однако, последнее имеет более простую формулировку, поэтому распространять теорему 4.4.7 на случай конечной подгруппы H не имеет смысла.

Напомним, что группы с одним определяющим соотношением вида

$$BS(m,\ n) = \langle a,\ b;\ a^{-1}b^m a = b^n \rangle,$$

где без потери общности можно считать $m \geq |n| > 0$, называются группами Баумслага-Солитера [31]. Из представления группы $BS(m,\ n)$ видно, что она является HNN-расширением бесконечной циклической группы с порождающим b и подгруппами $\langle b^m \rangle$ и $\langle b^n \rangle$, связанными при помощи изоморфизма, переводящего b^m в b^n. Если $m = |n|$, то связанные подгруппы совпадают и к группе $BS(m,\ n)$ может быть применена теорема 4.4.7. В результате получаем

Следствие 4.4.8. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп.*

1. *Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа $BS(m,\ \pm m)$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*
2. *Если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то*
   а) *группа $BS(m,\ m)$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $\mathbb{Z}_m$ принадлежит классу $\mathcal{K}$,*
   б) *группа $BS(m,\ -m)$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы $\mathbb{Z}_m$ и $\mathbb{Z}_2$ принадлежат классу $\mathcal{K}$.*

Для доказательства следствия 4.4.8 достаточно заметить, что в силу утверждения 1 предложения 1.3.4 бесконечная циклическая группа, являющаяся базой HNN-расширения $BS(m, \pm m)$, аппроксимируется любым корневым классом, а $\mathcal{K}$-отделимость связанной подгруппы ввиду предложения 1.1.2 равносильна $\mathcal{K}$-аппроксимируемости фактор-группы $\langle b \rangle / \langle b^{\pm m} \rangle \cong \mathbb{Z}_m$. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то в силу предложения 1.3.2 группа $\mathbb{Z}_m$ содержится в $\mathcal{K}$ и, в частности, $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Если же класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то ввиду утверждения 3 предложения 1.1.1 группа $\mathbb{Z}_m$ аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда она является $\mathcal{K}$-группой. Следствие доказано. $\square$

Отметим, что следствие 4.4.8 обобщает теорему 2 из работы [8] в части, касающейся аппроксимируемости конечными π-группами.

4.5. Случай, когда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является конечной

Теорема 4.5.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, H — нормальная подгруппа группы B, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех (H,φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семейству $\mathcal{K}^*(B)$. Если $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) *группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$,*
2) *семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией,*
3) *подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*

Доказательство. Покажем достаточность условий 1 — 3. В силу предложения 4.4.2 множества $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\mathcal{K}^*(G,B)$ совпадают. Поэтому $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G следует из предложения 4.2.2.

Проверим необходимость условий 1 — 3. Из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G согласно предложению 1.1.3 вытекает $\mathcal{K}$-отделимость в ней централизатора $C_G(H)$ подгруппы H. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации ввиду предложения 1.1.2 получаем $\mathcal{K}$-аппроксимируемость фактор-группы $G/C_G(H)$. Тогда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$, изоморфная $G/C_G(H)$, также $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Кроме того, $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна по условию, значит, она принадлежит классу $\mathcal{K}$ согласно утверждению 3 предложения 1.1.1. Теперь в силу предложения 4.4.2 множество подгрупп семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ совпадает с множеством $\mathcal{K}^*(G,B)$. Поэтому ввиду утверждения 1 предложения 4.2.2 семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией. $\mathcal{K}$-отделимость подгруппы H в группе B вытекает из предложения 2.2.3. Теорема доказана. $\square$

Следствие 4.5.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, подгруппа H $\mathcal{K}$-аппроксимируема и принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(B)$. Если $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Следствие 4.5.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, H — нормальная подгруппа группы B, $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа.*

1. *Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*
2. *Если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$ и подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*

Доказательства следствий 4.5.2 и 4.5.3. Необходимость условий следствия 4.5.2 и обоих утверждений следствия 4.5.3 сразу же вытекает из теоремы 4.5.1. Проверка достаточности полностью аналогична доказательствам достаточности в следствиях 4.4.5 и 4.4.6 соответственно. Необходимо только заменить в указанных доказательствах ссылки на теорему 4.4.4 и следствие 4.4.5 ссылками на теорему 4.5.1 и ее следствие 4.5.2. $\square$

Как и в случае обобщенных свободных произведений, критерий аппроксимируемости группы G становится проще, если конечной является не только группа $\mathrm{Aut}_G(H)$, но и подгруппа H.

Теорема 4.5.4. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, H — конечная нормальная подгруппа группы B. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*
2. *Существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе H.*
3. *Группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Справедливость импликаций $1 \Rightarrow 3$ и $2 \Rightarrow 3$ вытекает из предложения 1.1.5. Покажем, что импликации $3 \Rightarrow 1$ и $3 \Rightarrow 2$ также имеют место.

Так как класс $\mathcal{K}$ является наследственным, то из условия $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$ следует, что $\langle \varphi \rangle \in \mathcal{K}$. Поэтому согласно предложению 4.2.3 группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Значит, выполнены условия теоремы 2.5.2. Отсюда заключаем, что проверяемые импликации верны. Теорема доказана. □

Следствие 4.5.5. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, H — конечная нормальная подгруппа группы B. Пусть также группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой.*

1. *Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*
2. *Если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то согласно предложению 1.3.2 группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Ввиду предложения 1.1.5 группа $\mathrm{Aut}_B(H)$ также содержится в $\mathcal{K}$. Тогда согласно предложению 4.4.1 $\mathrm{Aut}_G(H)$ — $\mathcal{K}$-группа и группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 4.5.4.

Пусть теперь класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп. Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то в силу теоремы 4.5.4 группа $\mathrm{Aut}_G(H)$, а потому и ее подгруппа $\langle\varphi\rangle$, принадлежит классу $\mathcal{K}$. Если же $\langle\varphi\rangle$ — $\mathcal{K}$-группа, то, как и выше, ввиду предложения 4.4.1 группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ также содержится в классе $\mathcal{K}$, а потому группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 4.5.4. Следствие доказано. □

4.6. Случай, когда $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_B(H)$

Теорема 4.6.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, H — нормальная подгруппа группы B, автоморфизм φ совпадает с ограничением на подгруппу H некоторого внутреннего автоморфизма группы B. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы вытекает из предложения 2.2.3. Проверим достаточность.

Пусть φ — ограничение на подгруппу H внутреннего автоморфизма группы B, производимого элементом b_0 группы B.

Ввиду $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы B семейство $\mathcal{K}^*(B)$ является фильтрацией. Убедимся, что при таком выборе автоморфизма φ множества подгрупп семейств $\mathcal{K}^*(G, B)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ совпадают. Тогда достаточность условия теоремы будет вытекать из утверждения 2 предложения 4.2.2.

Пусть S — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(B)$. Так как φ является ограничением на подгруппу H внутреннего автоморфизма $\widehat{b_0}$ группы B, а подгруппы H и S нормальны в B, то подгруппа S (H, φ)-совместима. Значит, можем построить HNN-расширение G_S и гомоморфизм $\rho_S\colon G \to G_S$.

Группа $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ порождается подгруппой $\mathrm{Aut}_{B/S}(HS/S)$ и автоморфизмом φ_S. Так как B/S — $\mathcal{K}$-группа, то в силу предложения 1.1.5 группа $\mathrm{Aut}_{B/S}(HS/S)$ также принадлежит классу $\mathcal{K}$. Заметим, что автоморфизм φ_S является ограничением внутреннего автоморфизма группы B/S, производимого элементом b_0S, на подгруппу HS/S. Значит, группы $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ и $\mathrm{Aut}_{B/S}(HS/S)$ совпадают.

Следовательно, $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ — $\mathcal{K}$-группа. Тогда в силу следствия 4.3.2 существует гомоморфизм σ группы G_S на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе B/S. Полагая $N = \ker(\rho_S\sigma)$, получаем, что $N \in \mathcal{K}^*(G)$ и согласно второй части предложения 4.1.1 $S = B \cap N$. Значит, подгруппа S принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(G, B)$. Ввиду произвольности выбора подгруппы S отсюда следует, что все подгруппы семейства $\mathcal{K}^*(B)$ содержатся в $\mathcal{K}^*(G, B)$.

Справедливость противоположного включения вытекает из наследственности класса $\mathcal{K}$. Следовательно, семейства $\mathcal{K}^*(B)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ совпадают. Теорема доказана. □

4.7. Случай, когда связанная подгруппа имеет конечный ранг Гирша-Зайцева

Теорема 4.7.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, содержащий хотя бы одну непериодическую группу, группа B аппроксимируется $\mathcal{K}$-группами без кручения, подгруппа H нормальна в группе B и имеет конечный ранг Гирша-Зайцева. Тогда* *следующие два условия равносильны и при выполнении любого из них группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

1. *Группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*
2. *Существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе H.*

Доказательство. Так как класс $\mathcal{K}$ является корневым и содержит хотя бы одну непериодическую группу, то существует неединичная группа без кручения, лежащая в $\mathcal{K}$. Из предложения 1.3.1 и данного замечания вытекает, что класс всех $\mathcal{K}$-групп без кручения также является корневым. Поэтому в силу предложения 4.2.3 группа A аппроксимируется $\mathcal{K}$-группами без кручения. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 2.6.1. Теорема доказана. $\square$

Следствие 4.7.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, содержащий хотя бы одну непериодическую группу, группа B аппроксимируется $\mathcal{K}$-группами без кручения, подгруппа H нормальна в группе B и имеет конечный ранг Гирша-Зайцева. Если группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Как уже отмечалось в доказательствах теоремы 2.6.1 и следствия 3.1.5, класс всех $\mathcal{K}$-групп без кручения замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому в силу предложения 1.1.6 существует гомоморфизм группы B на некоторую $\mathcal{K}$-группу без кручения, инъективный на H. Тогда согласно предложению 1.1.5 группа $\mathrm{Aut}_B(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Так как $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то ввиду предложения 1.3.2 группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Следовательно, в силу предложения 4.4.1 $\mathrm{Aut}_G(H)$ также принадлежит классу $\mathcal{K}$, и группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема согласно теореме 4.7.1. Следствие доказано. $\square$

4.8. Случай, когда связанная подгруппа является ретрактом в базовой группе

Теорема 4.8.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, H — ретракт в группе B.*

1. *Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*
2. *Пусть класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — конечная группа. Если $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Если, кроме того, класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, то верно и обратное: из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G следует, что группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Пусть либо класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, либо $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — $\mathcal{K}$-группа. При выполнении любого из этих условий в силу предложения 4.2.3 группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Так как фактор-группа A/H изоморфна $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группе $\langle t\rangle$, то ввиду предложения 1.1.2 подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A. Согласно предложению 4.2.4 группа A $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе H. Теперь группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 3.1.2.

Справедливость последней части второго утверждения теоремы вытекает из утверждения 1 предложения 4.2.1 и утверждения 3 предложения 1.4.1. Теорема доказана. □

Для доказательства следствия из приведенной теоремы потребуется следующий результат.

Предложение 4.8.2. [13, теорема 1]. *Группа Баумслага-Солитера $BS(1,n)$ аппроксимируется классом $\mathcal{F}_\pi$ конечных π-групп тогда и только тогда, когда существует такое π-число $s>1$, что $(s,n)=1$ и порядок элемента $\bar{n}$ группы $\mathbb{Z}_s$ также является π-числом. В частности, группа $BS(1,n)$ аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда p делит число $n-1$.* □

Следствие 4.8.3. *Пусть*

$$E(n)=\langle a,b,t;\ a^{-1}ba=b^n,\ t^{-1}at=a^{-1}\rangle \quad (n\neq 0).$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. *Группа $E(n)$ аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.*

2. *Группа $E(n)$ аппроксимируется классом $\mathcal{FS}_\pi$ конечных разрешимых π-групп тогда и только тогда, когда $2 \in \pi$ и существует такое π-число $s > 1$, что $(s, n) = 1$ и порядок элемента $\bar{n}$ группы $\mathbb{Z}_s$ также является π-числом.*
3. *Группа $E(n)$ аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда $p = 2$ и число n нечетно.*

Доказательство. Очевидно, что группа $E(n)$ является HNN-расширением своей подгруппы B, порожденной элементами a, b и изоморфной группе $BS(1, n)$, с совпадающими связанными бесконечными циклическими подгруппами, порожденными элементами a и a^{-1}. Хорошо известно и нетрудно показать (см., например, [25, § Д.1]), что нормальное замыкание элемента b в группе B является локально циклической группой без кручения. Отсюда следует, что группа B двуступенно разрешима и не имеет кручения, а подгруппа $\langle a \rangle$ представляет собой ее ретракт. Поэтому утверждение 1 вытекает непосредственно из теоремы 4.8.1.

Заметим далее, что в силу сказанного выше каждый гомоморфный образ группы B оказывается разрешимой группой и потому класс $\mathcal{F}_\pi$ в формулировке предложения 4.8.2 можно заменить на $\mathcal{FS}_\pi$. Отсюда и из равенства $|\varphi| = 2$ заключаем, что утверждения 2 и 3 следуют из указанного предложения и теоремы 4.8.1. Следствие доказано. $\square$

4.9. Примеры

В теоремах 4.4.4, 4.8.1 и следствиях 4.4.5, 4.4.6 не рассматривается случай, когда класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, а группа $\langle \varphi \rangle$ бесконечна. Приведем примеры, показывающие, что в данном случае HNN-расширение G может быть как $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, так и не $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.

Пусть p — простое число, большее 2, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп, H — свободная абелева группа ранга 3 с базисом $\{h_1; h_2; h_3\}$, F — конечная циклическая группа порядка p с порождающим f, B — прямое произведение групп H и F, автоморфизм φ группы H переводит h_1 в $h_1 h_2$, h_2 в h_2, h_3 в h_3^α, где $\alpha \in \{-1; 1\}$. Тогда B — конечно порожденная абелева группа, подгруппа H центральна в группе B, является ретрактом в ней и принадлежит семейству $\mathcal{F}_p^*(B)$.

Таким образом, выполняются все условия теорем 4.8.1, 4.4.4 и следствий 4.4.5, 4.4.6, за исключением одного: определенный выше автоморфизм φ имеет бесконечный порядок, а потому группа $\langle\varphi\rangle$ не является конечной. Действительно, для любого натурального числа n справедливы соотношения $h_1\varphi^n = h_1h_2^n \neq h_1$.

Если $\alpha = 1$, то субнормальный ряд $1 \leqslant \mathrm{sgp}\{h_2, h_3\} \leqslant H \leqslant A$ группы A является центральным, а потому A — нильпотентная группа. Группа A представляет собой расширение конечно порожденной группы без кручения при помощи конечно порожденной группы без кручения. Значит, она также конечно порождена и не имеет кручения. Известно [40, теорема 2.1], что любая конечно порожденная нильпотентная группа, периодическая часть которой является p-группой, аппроксимируется конечными p-группами. Следовательно, группы A и B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы.

Фактор-группы A/H и B/H изоморфны $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемым группам $\langle t\rangle$ и $\langle f\rangle$ соответственно, поэтому подгруппа H $\mathcal{F}_p$-отделима в группах A и B ввиду предложения 1.1.2.

Таким образом, группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема в силу следствия 2.4.6.

Пусть теперь $\alpha = -1$. Обозначим через γ произвольный гомоморфизм группы A на некоторую конечную p-группу, через s — порядок элемента $t\gamma$, через r — порядок элемента $h_3\gamma$. Тогда числа s и r являются нечетными. Подействуем гомоморфизмом γ на элемент h_3:

$$h_3\gamma = (t\gamma)^{-s}h_3\gamma(t\gamma)^s = (t^{-s}h_3t^s)\gamma =$$
$$= \left(h_3^{(-1)^s}\right)\gamma = (h_3^{-1})\gamma = (h_3\gamma)^{-1}.$$

Тогда $(h_3\gamma)^2 = 1$. Таким образом, $(h_3\gamma)^2 = 1$, $(h_3\gamma)^r = 1$, числа 2 и r взаимно просты, значит, $h_3\gamma = 1$. Следовательно, элемент h_3 под действием каждого гомоморфизма группы A на конечную p-группу переходит в единицу. Поэтому группа A, а, значит, и группа G, не аппроксимируется конечными p-группами.

Заключение

Изучение аппроксимационных свойств свободных конструкций групп является одним из актуальных направлений современных исследований в области комбинаторной теории групп. На данный момент наибольшее количество результатов получено для финитной аппроксимируемости. Менее изученными, но не менее интересными являются свойства аппроксимируемости классами $\mathcal{S}$, $\mathcal{F}_p$, $\mathcal{F}_\pi$ и $\mathcal{FS}_\pi$. Все эти и многие другие востребованные классы групп относятся к числу корневых. Поэтому аппроксимируемость корневым классом групп обобщает такие интенсивно исследуемые свойства как финитная аппроксимируемость, аппроксимируемость конечными π-группами, аппроксимируемость разрешимыми группами, а также позволяет установить взаимосвязь между отдельными известными результатами в данной области. Поиск условий аппроксимируемости корневыми классами представляет собой важную задачу комбинаторной теории групп, что и побудило автора выбрать именно эту проблематику.

В данной диссертации сделано некоторое продвижение в исследованиях по указанной тематике. При этом, конечно, остается много открытых вопросов и интересных задач, которые еще только предстоит решить. Основным среди них безусловно является поиск критериев аппроксимируемости произвольным корневым классом $\mathcal{K}$ обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{K}$-групп и HNN-расширения $\mathcal{K}$-группы. Представляется, однако, маловероятным, что данную задачу удастся решить сразу в самом общем виде. Поэтому было бы хорошо сначала найти ответы на поставленные вопросы в различных частных случаях, например, для конструкций, рассматриваемых в данной работе: свободного произведения двух групп с нормальным объединением и HNN-расширения с совпадающими связанными подгруппами. Небезынтересно также, будет ли аппроксимироваться корневым классом $\mathcal{K}$ обобщенное свободное произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп, объединенная подгруппа которого является ретрактом только в одном из свободных множителей. Среди других возможных направлений исследований можно выделить изучение аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений с тривиально пересекающимися связанными подгруппами и отыскание критериев аппроксимируемости корневыми классами, состоящими из периодических групп, HNN-расширений с совпадающими связанными подгруппами при условии, что связывающий подгруппы изоморфизм имеет бесконечный порядок.

Таким образом, несмотря на интенсивное развитие все более универсальных понятий и конструкций, а также активные попытки усилить и обобщить полученные ранее результаты, различные частные случаи сложных для решения в общем виде задач в свою очередь не должны оставаться без внимания. Весьма вероятно, что интерес к этому научному направлению не исчезнет и будут не только найдены ответы на сформулированные выше вопросы, но и проведены другие многочисленные исследования.

Список литературы

[1] Азаров, Д. Н. Аппроксимируемость свободного произведения групп с одной объединенной подгруппой некоторыми классами конечных групп : дис.... канд. физ.-мат. наук : 01.01.06 / Азаров Дмитрий Николаевич. — Иваново, 2000.

[2] Азаров, Д. Н. О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга / Д. Н. Азаров // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54, № 3. — С. 485–497.

[3] Азаров, Д. Н. О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга / Д. Н. Азаров // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54, № 6. — С. 1203–1215.

[4] Азаров, Д. Н. О почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп некоторыми классами конечных групп / Д. Н. Азаров, Д. В. Гольцов // Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки. — 2012. — Вып. 2. — С. 86–91.

[5] Азаров, Д. Н. О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами / Д. Н. Азаров, А. В. Розов // Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки. — 2011. — Вып. 2. — С. 98–103.

[6] Азаров, Д. Н. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами / Д. Н. Азаров, Е. А. Туманова // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. — 2008. — Вып. 6. — С. 29–42.

[7] Азаров, Д. Н. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп / Д. Н. Азаров, Д. Тьеджо // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. — 2002. — Вып. 5. — С. 6–10.

[8] Варламова, И. А. Об аппроксимируемости конечными группами групп Баумслага-Солитера / И. А. Варламова, Д. И. Молдаванский // Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки. — 2012. — Вып. 2. — С. 107–114.

[9] Гольцов, Д. В. О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп / Д. В. Гольцов // Чебышевский сб. — 2013. — Т. 14, вып. 3. С. 34–41.

[10] Гольцов, Д. В. Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп / Д. В. Гольцов // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 21–25 апреля 2014 г.: в 7 ч. — Иваново: Изд-во «Иван. гос. ун-т», 2014. — Ч. 1. — С. 37.

[11] Гольцов, Д. В. Классы групп и подгрупповые топологии / Д. В. Гольцов, Н. И. Яцкин // Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки. — 2011. — Вып. 2. — С. 115–128.

[12] Гудовщикова, А. С. Два замечания о классе конечных разрешимых π-групп / А. С. Гудовщикова, Е. В. Соколов // Вестн. молодых ученых ИвГУ. — 2012. — Вып. 12. — С. 3–4.

[13] Иванова, О. А. Аппроксимируемость конечными π-группами некоторых групп с одним определяющим соотношением / О. А. Иванова, Д. И. Молдаванский // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. — 2008. — Вып. 6. — С. 51–58.

[14] Копрова, А. Е. Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп / А. Е. Копрова, Д. И. Молдаванский // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. — 2008. — Вып. 6. — С. 59–70.

[15] Линдон, Р. Комбинаторная теория групп / Р. Линдон, П. Шупп. — М.: Мир, 1980. — 448 с.

[16] Логинова, Е. Д. Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами / Е. Д. Логинова // Сиб. матем. журн. — 1999. — Т. 40, № 2. — С. 395–407.

[17] Мальцев, А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами / А. И. Мальцев // Матем. сб. — 1940. — Т. 8, № 3. — С. 405–422.

[18] Мальцев, А. И. О гомоморфизмах на конечные группы / А. И. Мальцев // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. — 1958. — Т. 18. — С. 49–60.

[19] Молдаванский, Д. И. Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений / Д. И. Молдаванский // Вестн. Иван. гос. ун-та. Биология, Химия, Физика, Математика. — 2000. — Вып. 3. — С. 129–140.

[20] Молдаванский, Д. И. Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп / Д. И. Молдаванский // Вестн. Иван. гос. ун-та. Биология, Химия, Физика, Математика. — 2002. — Вып. 3. — С. 123–133.

[21] Молдаванский, Д. И. Аппроксимируемость конечными p-группами некоторых HNN-расширений групп / Д. И. Молдаванский // Вестн. Иван. гос. ун-та. Биология, Химия, Физика, Математика. — 2003. — Вып. 3. — С. 102–116.

[22] Молдаванский, Д. И. Об аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширений нильпотентных групп / Д. И. Молдаванский // Вестн. Иван. гос. ун-та. Биология, Химия, Физика, Математика. — 2006. — Вып. 3. — С. 128–132.

[23] Розов, А. В. Об аппроксимируемости конечными π-группами свободных произведений нильпотентных групп конечного ранга с центральными объединенными подгруппами / А. В. Розов // Ярославский пед. вестн. Естеств. науки. — 2013. — Т. 3, № 2. — С. 7–13.

[24] Соколов, Е. В. Об отделимости циклических подгрупп свободной группы корневым классом групп / Е. В. Соколов // Математика и ее приложения: журнал Иван. матем. общества. — 2011. — Вып. 1. — С. 101–104.

[25] Соколов, Е. В. Отделимость подгрупп некоторыми классами конечных групп / Е. В. Соколов. — LAP Lambert Academic Publishing, 2012. — 124 с. — ISBN 978-3-8465-8581-8.

[26] Соколов, Е. В. Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторыми классами конечных групп обобщенных свободных произведений и HNN-расширений / Е. В. Соколов // Мальцевские чтения 2013: тез. докл. междунар. науч. конф., Новосибирск, 11–15 ноября 2013 г. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2013. — С. 100.

[27] Соколов, Е. В. Аппроксимируемость конечными π-группами некоторых свободных конструкций групп / Е. В. Соколов // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Матер. XII Между-

нар. конф., Тула, 21–25 апреля 2014 г. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. — С. 95–96.

[28] Холл, Ф. Нильпотентные группы / Ф. Холл // Математика. Период. сб. перев. иностр. ст. / М.: Мир, 1968. — № 1. — С. 3–36.

[29] Aschenbrenner, M. A criterion for HNN extensions of finite p-groups to be residually p / M. Aschenbrenner, S. Friedl // J. Pure Appl. Algebra. — 2011. — V. 215, № 9. — P. 2280–2289.

[30] Baumslag, B. Residually finite HNN-extensions / B. Baumslag, M. Tretkoff // Comm. Algebra. — 1978. — V. 6. — P. 179–194.

[31] Baumslag, G. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups / G. Baumslag, D. Solitar // Bull. Amer. Math. Soc. — 1962. — V. 68. — P. 199–201.

[32] Baumslag, G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups / G. Baumslag // Trans. Amer. Math. Soc. — 1963. — V. 106. — P. 193–209.

[33] Baumslag, G. On the residual nilpotence of certain one-relator groups / G. Baumslag // Comm. Pure Appl. Math. — 1968. — V. 21. — P. 491–506.

[34] Bobrovskii, P. A. The cyclic subgroup separability of certain generalized free products of two groups / P. A. Bobrovskii, E. V. Sokolov // Algebra Colloq. — 2010. — V. 17, № 4. — P. 577–582.

[35] Boler, J. The free product of residually finite groups amalgamated along retracts is residually finite / J. Boler, B. Evans // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — V. 37, № 1 — P. 50–52.

[36] Borisov, A. M. Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms / A. M. Borisov, M. Sapir // Invent. Math. — 2005. — V. 160, № 2. — P. 341–356.

[37] Cohen, D. E. Residual finiteness and Britton's lemma / D. E. Cohen // J. Lond. Math. Soc. — 1977. — V. 16. — P. 232–234.

[38] Dixon, M. R. On various rank conditions in infinite groups / M. R. Dixon, L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin // Algebra and Discrete Mathematics. — 2007. — № 4. — P. 23–43.

[39] Drutu, C. Non-linear residually finite groups / C. Drutu, M. Sapir // J. Algebra. — 2005. — V. 284, Iss. 1. — P. 174–178.

[40] Gruenberg, K. W. Residual properties of infinite soluble groups / K. W. Gruenberg // Proc. Lond. Math. Soc. — 1957. — V. 7. — P. 29–62.

[41] Higman, G. Amalgams of p-groups / G. Higman // J. Algebra. — 1964. — V. 1. — P. 301–305.

[42] Hsu, T. Ascending HNN extensions of polycyclic groups are residually finite / T. Hsu, D. Wise // J. Pure Appl. Algebra. — 2003. — V. 182, № 1. — P. 65–78.

[43] Kahrobaei, D. Doubles of residually solvable groups / D. Kahrobaei // Aspects of Infinite Group Theory. Algebra and Discrete Mathematics. — V. 1. — World Scientific, 2008.

[44] Kahrobaei, D. On residual solvability of generalized free products of finitely generated nilpotent groups / D. Kahrobaei // Comm. Algebra. — 2011. — V. 39, Iss. 2. — P. 647–656.

[45] Kahrobaei, D. On the residual solvability of generalized free products of solvable groups / D. Kahrobaei, S. Majewicz // DMTCS. — 2012. — V. 13, № 4. — P. 45–50.

[46] Karrass, A. The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup / A. Karrass, D. Solitar // Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — V. 150. — P. 227–255.

[47] Neumann, B. H. An essay on free products of groups with amalgamations / B. H. Neumann // Phil. Trans. Royal Soc. of London. Ser. A. — 1954. — V. 246. — P. 503–554.

[48] Neumann, H. Generalized free products with amalgamated subgroups II / H. Neumann // Am. J. Math. — 1949. — V. 31. — P. 491–540.

[49] Raptis, E. The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. abelian group / E. Raptis, D. Varsos // J. Pure Appl. Algebra. — 1991. — V. 76, № 2. — P. 167–178.

[50] Rhemtulla, A. H. The residual finiteness of ascending HNN-extensions of certain soluble groups / A. H. Rhemtulla, M. Shirvani // Ill. J. Math. — 2003. — V. 47, № 1–2. — P. 477–484.

[51] Sokolov, E. V. A characterization of root classes of groups / E. V. Sokolov // ArXiv. — math.GR:1308.1039.

[52] Tieudjo, D. On root-class residuality of some free constructions / D. Tieudjo // JP Journal of Algebra, Number Theory and applications. — 2010. — V. 18, № 2. — P. 125–143.

Список публикаций автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки России

[53] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп / Е. А. Туманова // Модел. и анализ информ. систем. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 133–137.

[54] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп / Е. А. Туманова // Матем. заметки. — 2014. — Т. 95, вып. 4. — С. 605–614.

Другие публикации

[55] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными π-группами свободного произведения двух конечных π-групп с нормальной объединенной подгруппой / Е. А. Туманова // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 20–24 апреля 2009 г.: в 8 ч. — Иваново: Изд-во «Иван. гос. ун-т», 2009. — Ч. 8. — С. 32.

[56] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными π-группами свободного произведения групп с нормальными объединенными подгруппами / Е. А. Туманова // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 20–30 апреля 2010 г.: в 8 ч. — Иваново: Изд-во «Иван. гос. ун-т», 2010. — Ч. 8. — С. 24.

[57] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными группами обобщенного свободного произведения групп / Е. А. Туманова // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 25–29 апреля

2011 г.: в 7 ч. — Иваново: Изд-во «Иван. гос. ун-т», 2011. — Ч. 1. — С. 105–106.

[58] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп / Е. А. Туманова // Чебышевский сб. — 2012. — Т. 13, вып. 1. — С. 150–152.

[59] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений с нормальным объединением / Е. А. Туманова // Математика и ее приложения: журнал Иван. матем. общества. — 2012. — Вып. 1. — С. 103–106.

[60] Туманова, Е. А. Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений групп / Е. А. Туманова // Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки. — 2012. — Вып. 2. — С. 139–141.

[61] Туманова, Е. А. Некоторые достаточные условия аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп / Е. А. Туманова // Научно-исследовательская деятельность в классическом университете: ИвГУ — 2013. Сб. статей по итогам науч. конф., Иваново, 28 января–8 февраля 2013 г. — Иваново: Изд-во «Иван. гос. ун-т», 2013. — С. 9–12.

[62] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой / Е. А. Туманова // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 22–26 апреля 2013 г.: в 7 ч. — Иваново: Изд-во «Иван. гос. ун-т», 2013. — Ч. 1. — С. 109–110.

[63] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением / Е. А. Туманова // Мальцевские чтения 2013: тез. докл. междунар. науч. конф., Новосибирск, 11–15 ноября 2013 г. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2013. — С. 102.

[64] Туманова, Е. А. Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой / Е. А. Туманова // Чебышевский сб. — 2013. — Т. 14, вып. 3. — С. 140–147.

[65] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными π-группами HNN-расширений групп / Е. А. Туманова // Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки. — 2013. — Вып. 2. — С. 94–102.

[66] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением / Е. А. Туманова // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Матер. XII междунар. конф., Тула, 21–25 апреля 2014 г. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. — С. 97–100.

[67] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости корневым классом $\mathcal{K}$ HNN-расширения $\mathcal{K}$-группы / Е. А. Туманова // Алгебра и математическая логика: теория и приложения. Матер. междунар. конф., Казань, 2–6 июня 2014 г. — Казань: Изд-во КФУ, 2014. — С. 151.