Известия вузов. Математика
2015, №10, с. 27–44

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Е.А. ТУМАНОВА

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ГРУПП ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ С НОРМАЛЬНЫМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ

Аннотация. В работе получены как необходимые, так и достаточные условия аппроксимируемости замкнутыми относительно факторизации, а также произвольными корневыми классами групп обобщенного свободного произведения двух групп с нормальными объединенными подгруппами.

Ключевые слова: обобщенное свободное произведение, аппроксимируемость, корневой класс групп.

УДК: 512.543

Введение

Напомним, что группа X называется аппроксимируемой некоторым классом групп $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $x \in X$ существует гомоморфизм σ группы X на некоторую группу из класса $\mathcal{L}$ такой, что образ элемента x относительно гомоморфизма σ отличен от единицы.

Следуя К. Грюнбергу [1], содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп $\mathcal{K}$ будем называть корневым, если выполняются следующие три условия:

1) если группа X принадлежит классу $\mathcal{K}$ и Y — подгруппа группы X, то группа Y также принадлежит классу $\mathcal{K}$;

2) прямое произведение любых двух групп из класса $\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$;

3) условие Грюнберга: если $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X такой, что фактор-группы X/Y и Y/Z принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и фактор-группа X/T принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Легко видеть, что корневыми являются многие активно изучаемые классы групп: класс всех конечных групп; конечных p-групп, где p — простое число; конечных π-групп, где π — непустое множество простых чисел; разрешимых групп; разрешимых групп без кручения. Поэтому свойство аппроксимируемости корневым классом обобщает такие интенсивно исследуемые свойства как финитная аппроксимируемость, аппроксимируемость конечными p-группами, аппроксимируемость разрешимыми группами, а также позволяет систематизировать и интегрировать в единое целое отдельные известные результаты теории аппроксимируемости групп.

В упомянутой выше работе [1] К. Грюнберг показал, что если $\mathcal{K}$ — такой корневой класс групп, что каждая свободная группа $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то свободное произведение произвольного семейства $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп $\mathcal{K}$-аппроксимируемо. Позднее Д.Н. Азаров

Поступила 23.02.2014

и Д. Тьеджо [2] установили аппроксимируемость каждой свободной группы любым корневым классом, тем самым распространив сформулированное К. Грюнбергом утверждение на произвольный корневой класс групп.

Аппроксимируемость корневыми классами других свободных конструкций (обобщенных свободных произведений, HNN-расширений) изучалась в статьях [2]–[12]. Другие свойства корневых классов групп рассматривались в работах [12]–[15]. В том числе Е.В. Соколовым [12] была получена характеризация, позволяющая легко разграничить корневые и некорневые классы групп. А именно, было показано, что корневыми являются те и только те наследственные классы групп, которые замкнуты относительно декартовых сплетений.

В данной статье рассматриваются условия аппроксимируемости замкнутыми относительно факторизации, а также произвольными корневыми классами групп обобщенного свободного произведения двух групп, объединенные подгруппы которого являются нормальными в соответствующих свободных множителях.

Заметим, что если X — некоторая группа, Y — ее нормальная подгруппа, то ограничение на эту подгруппу любого внутреннего автоморфизма группы X оказывается автоморфизмом группы Y. Множество $\mathrm{Aut}_X(Y)$ всех таких автоморфизмов является подгруппой группы $\mathrm{Aut}\,Y$ всех автоморфизмов группы Y.

Далее будем считать, что A и B — некоторые группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K, $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Кроме того, если не оговорено противное, всюду ниже предполагается, что H и K являются нормальными подгруппами групп A и B соответственно.

Условие нормальности объединяемых подгрупп в соответствующих свободных множителях влечет за собой тот факт, что подгруппа H является нормальной в группе G, и потому определена подгруппа $\mathrm{Aut}_G(H)$ группы $\mathrm{Aut}\,H$.

Сформулируем основные результаты данной работы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$. Если $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, то существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах A, B, и, в частности, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то теорема 1 превращается в следующий критерий.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$. Тогда следующие два утверждения равносильны и при выполнении любого из них группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема:*

1) *существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах A и B;*
2) *группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

В работе [6] приведены примеры, показывающие, что в случае, когда корневой класс $\mathcal{K}$ не замкнут относительно факторизации, ни одно из условий $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$ не является необходимым для $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G. Нетрудно показать, что в каждом из этих примеров существует гомоморфизм построенного обобщенного свободного произведения на $\mathcal{K}$-группу, инъективный на свободных множителях. Таким образом, можно утверждать, что ни одно из перечисленных выше условий не является необходимым и для существования указанного гомоморфизма. В частности, утверждение следствия 1 для корневого класса $\mathcal{K}$, незамкнутого относительно факторизации, перестает быть верным.

Пусть $\mathcal{L}$ — некоторый класс групп, X — произвольная группа. Обозначим через $\mathcal{L}^*(X)$ множество всех таких нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{L}$.

Напомним [16], что подмножество M группы X называется $\mathcal{L}$-отделимым в X, если для любого элемента $x \in X$, не принадлежащего подмножеству M, существует гомоморфизм ψ группы X на некоторую группу из класса $\mathcal{L}$ такой, что $x\psi \notin M\psi$.

Следуя [17], семейство $\{U_i\}_{i \in I}$ нормальных подгрупп некоторой группы V будем называть фильтрацией, если $\bigcap\limits_{i \in I} U_i = 1$. Согласно той же работе подгруппы R и S групп A и B соответственно называются (H, K, φ)-совместимыми, если выполнено равенство $(H \cap R)\varphi = K \cap S$.

В каждом из утверждений, приводимых далее до конца введения, символом $\mathcal{K}$ обозначается замкнутый относительно факторизации корневой класс групп. Отметим также, что во всех них, за исключением следствия 4, свободные множители A и B уже необязательно принадлежат классу $\mathcal{K}$.

Теорема 2. *Пусть H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно, $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно. Если $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) *группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$,*
2) *семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ являются фильтрациями,*
3) *подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*

Понятно, что если $K = B$, то $G = A$ и из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости этой группы вовсе не следует $\mathcal{K}$-отделимость в ней подгруппы H. Аналогичные рассуждения справедливы и в случае, когда $H = A$. Поэтому условия $H \neq A$ и $K \neq B$ в формулировке приведенной теоремы являются существенными.

Очевидно, если подгруппа H центральна в группе G, то множество $\mathrm{Aut}_G(H)$ состоит только из тождественного отображения группы H. Поэтому $\mathrm{Aut}_G(H)$ содержится в каждом непустом замкнутом относительно взятия подгрупп классе групп. Таким образом, из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Пусть H и K — собственные центральные подгруппы групп A и B соответственно, $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ являются фильтрациями, подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*

Теорема 3. *Пусть A и B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемые группы, H и K — конечные подгруппы. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема*;
2) *существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе H*;
3) *группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Отметим, что теорема 3 обобщает и расширяет следствие 2 из работы [18], представляющее собой критерий аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения двух конечных p-групп с нормальными объединенными подгруппами.

Следствие 3. *Пусть A и B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемые группы, H и K — конечные подгруппы. Если хотя бы одна из подгрупп H и K лежит в центре соответствующего свободного множителя или группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа, Y — ее нормальная подгруппа. Будем говорить, что группа X $\mathcal{L}$-регулярна по подгруппе Y, если для любой подгруппы $M \in \mathcal{L}^*(Y)$, нормальной в X, найдется подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $N \cap Y = M$.

Теорема 4. *Пусть A и B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемые группы, подгруппы H и K являются циклическими или подгруппа K центральна в группе B.*

1. *Если $H \neq A$, $K \neq B$ и группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*
2. *Если подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B и группа B $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе K, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Следствие 4. *Пусть A — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, B — $\mathcal{K}$-группа, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно, подгруппы H и K являются циклическими или подгруппа K центральна в группе B. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A.*

Следствие 5. *Пусть A — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно, подгруппы H и K являются циклическими или подгруппа K центральна в группе B. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*

Говорят (например, [19]), что группа имеет конечный ранг Гирша–Зайцева, равный r, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой, и число бесконечных циклических факторов данного ряда равно r.

Теорема 5. *Пусть группы A и B аппроксимируются $\mathcal{K}$-группами без кручения, подгруппы H и K имеют конечный ранг Гирша–Зайцева. Тогда следующие два условия равносильны и при выполнении любого из них группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема:*

1) *группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$;*
2) *существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе H.*

Следствие 6. *Пусть группы A и B аппроксимируются $\mathcal{K}$-группами без кручения, подгруппы H и K имеют конечный ранг Гирша–Зайцева. Если хотя бы одна из подгрупп H и K лежит в центре соответствующего свободного множителя или группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Отметим, что теоремы 1, 3 и следствие 5 обобщают результаты, полученные автором в [20], [21].

1. Вспомогательные утверждения

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *произвольная свободная группа аппроксимируется классом $\mathcal{K}$* ([2], теорема 1);

2) *свободное произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп в свою очередь аппроксимируется классом $\mathcal{K}$* ([1], лемма 1.5; [2]);
3) *произвольное расширение $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathcal{K}$-группы аппроксимируется классом $\mathcal{K}$* ([2], лемма).

Утверждения следующих двух предложений хорошо известны и могут быть легко проверены.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{L}$ — замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений класс групп, X — произвольная группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *пересечение конечного числа подгрупп семейства $\mathcal{L}^*(X)$ снова является подгруппой данного семейства*;
2) *если группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема и Y — ее конечная подгруппа, то подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X и существует подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $Y \cap N = 1$*;
3) *если X — конечная $\mathcal{L}$-аппроксимируемая группа, то она принадлежит классу $\mathcal{L}$.*

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа, Y — ее нормальная подгруппа.*

1. *Если фактор-группа X/Y $\mathcal{L}$-аппроксимируема, то подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X.*
2. *Если класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно факторизации, то из $\mathcal{L}$-отделимости подгруппы Y в группе X следует $\mathcal{L}$-аппроксимируемость фактор-группы X/Y.*

Предложение 4. *Пусть класс групп $\mathcal{L}$ замкнут относительно факторизации, X — произвольная группа, Y — нормальная подгруппа группы X. Если существует сюръективный гомоморфизм γ группы X в некоторую группу из класса $\mathcal{L}$, инъективный на Y, то группа $\operatorname{Aut}_X(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{L}$. В частности, если класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений, группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема и ее подгруппа Y конечна, то группа $\operatorname{Aut}_X(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Пусть гомоморфизм с требуемыми свойствами существует и N — ядро этого гомоморфизма. Тогда $N \in \mathcal{L}^*(X)$ и $Y \cap N = 1$. Значит, подгруппы Y и N поэлементно перестановочны. Следовательно, N содержится в централизаторе $C_X(Y)$ подгруппы Y в группе X. Отсюда и из того, что группа $\operatorname{Aut}_X(Y)$, как легко видеть, изоморфна фактор-группе $X/C_X(Y)$, получаем $\operatorname{Aut}_X(Y) \cong X/C_X(Y) \cong (X/N)/(C_X(Y)/N)$ и $\operatorname{Aut}_X(Y) \in \mathcal{L}$, так как класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно факторизации.

Если класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений, группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема и ее подгруппа Y конечна, то согласно утверждению 2 предложения 2 существует подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $Y \cap N = 1$. В силу доказанного выше отсюда следует, что группа $\operatorname{Aut}_X(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{L}$. $\square$

Предложение 5 ([22], предложение 1.2.4)**.** *Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп. Если группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема, то централизатор $C_X(Y)$ произвольного подмножества Y группы X является $\mathcal{L}$-отделимой подгруппой.*

Напомним далее, что группа X представляет собой расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y, если Y — подгруппа группы X, Z — нормальная подгруппа группы X, $X = YZ$ и $Y \cap Z = 1$. Отображение ρ группы Y в группу автоморфизмов группы Z, сопоставляющее элементу $y \in Y$ ограничение на подгруппу Z внутреннего автоморфизма группы X, производимого элементом y, является гомоморфным и называется сопровождающим гомоморфизмом этого расщепляемого расширения.

Предложение 6. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y, $\rho : Y \to \operatorname{Aut} Z$ — сопровождающий гомоморфизм, $C = \ker \rho$. Тогда имеют место утверждения*

1) *подгруппа CZ нормальна в группе X и представляет собой прямое произведение подгрупп C и Z, $X/CZ \cong Y\rho$;*
2) *если группы Z и Y $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, а группа $Y\rho$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, то расщепляемое расширение X $\mathcal{K}$-аппроксимируемо;*
3) *если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации и группа $Y\rho$ конечна, то из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы X следует, что группы Z и Y $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, а группа $Y\rho$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. 1. Так как подгруппа C нормальна в группе Y и подгруппа Z нормальна в группе X, то подгруппа CZ нормальна в X и

$$X/CZ = YZ/CZ = YCZ/CZ \cong Y/(Y \cap CZ) = Y/C \cong Y\rho.$$

Очевидно, подгруппа C поэлементно перестановочна с Z. Поэтому подгруппа CZ является прямым произведением групп C и Z.

2. Так как группы Z и Y $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, то подгруппа CZ представляет собой прямое произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп и, следовательно, $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Таким образом, группа X является расширением $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы CZ при помощи $\mathcal{K}$-группы $Y\rho$ и потому $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу утверждения 3 предложения 1.

3. Из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости расщепляемого расширения X следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость его подгрупп Z и Y, а также (в силу предложения 5) $\mathcal{K}$-отделимость централизатора $C_X(Z)$. Как уже было отмечено в доказательстве предложения 4, $\operatorname{Aut}_X(Z) \cong X/C_X(Z)$. Отсюда, из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации и предложения 3 следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы $\operatorname{Aut}_X(Z)$. Значит, ее подгруппа $Y\rho$ также $\mathcal{K}$-аппроксимируема. При этом $Y\rho$ конечна, следовательно, она содержится в классе $\mathcal{K}$ в силу утверждения 3 предложения 2. □

2. Некоторые необходимые и достаточные условия аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп

Напомним ряд понятий и утверждений, восходящих к работе Г. Баумслага [17]. Приводимые далее рассуждения справедливы без предположения о нормальности объединяемых подгрупп в группах A и B. Поэтому в первой половине данного раздела (до предложения 11) будем считать, что H и K — произвольные подгруппы соответствующих свободных множителей.

Легко видеть, что если нормальные подгруппы R и S групп A и B соответственно (H, K, φ)-совместимы, то отображение $\overline{\varphi} : HR/R \to KS/S$, действующее по правилу $(hR)\overline{\varphi} = (h\varphi)S$, где $h \in H$, определено корректно и является изоморфизмом подгруппы HR/R фактор-группы A/R на подгруппу KS/S фактор-группы B/S. Это позволяет наряду с обобщенным свободным произведением $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ построить свободное произведение

$$G_{R,S} = (A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \overline{\varphi})$$

групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и KS/S, объединенными относительно изоморфизма $\overline{\varphi}$. Нетрудно показать также, что существует сюръективный гомоморфизм $\rho_{R,S} : G \to G_{R,S}$, действие которого на подгруппах A и B совпадает с действием естественных гомоморфизмов $A \to A/R$ и $B \to B/S$.

Предложение 7. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G, $R = A \cap N$ и $S = B \cap N$. Тогда подгруппы R и S являются (H, K, φ)-совместимыми и существует гомоморфизм группы $G_{R,S}$ на группу G/N, действующий на подгруппах A/R и B/S инъективно.*

Обратно, если для (H, K, φ)-совместимых нормальных подгрупп R и S групп A и B соответственно существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на некоторую группу, действующий на подгруппах A/R и B/S инъективно, и $N = \ker(\rho_{R,S}\sigma)$, то $R = A \cap N$ и $S = B \cap N$.

Доказательство. Если группы A и B считать подгруппами группы G, то в этой группе для любого элемента $h \in H$ выполнено равенство $h\varphi = h$, откуда легко вытекает $(H \cap N)\varphi = K \cap N$.

Так как $H \cap R = H \cap (A \cap N) = H \cap N$ и, аналогично, $K \cap S = K \cap N$, в силу предыдущего получаем $(H \cap R)\varphi = K \cap S$, и (H, K, φ)-совместимость подгрупп R и S доказана.

Хорошо известно (и легко видеть), что ядро M гомоморфизма $\rho_{R,S}$ группы G на группу $G_{R,S}$ совпадает с нормальным замыканием в группе G объединения подгрупп R и S. Следовательно, $M \subseteq N$ и потому существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на фактор-группу G/N, действующий по правилу: для любого элемента $x \in G_{R,S}$ полагаем $x\sigma = gN$ для некоторого элемента $g \in G$ такого, что $x = g\rho_{R,S}$.

Произвольный элемент x из подгруппы A/R группы $G_{R,S}$ имеет вид $x = aR$ для некоторого элемента $a \in A$. Поскольку по определению гомоморфизма $\rho_{R,S}$ выполнено равенство $a\rho_{R,S} = aR$, имеем $x\sigma = aN$. Таким образом, если x лежит в ядре гомоморфизма σ, то $a \in N$ и потому $a \in A \cap N = R$. Значит, $x = 1$, и инъективность действия гомоморфизма σ на подгруппе A/R доказана. Инъективность действия гомоморфизма σ на подгруппе B/S проверяется аналогично.

Предположим теперь, что для некоторых (H, K, φ)-совместимых нормальных подгрупп R и S групп A и B соответственно существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на некоторую группу, действующий на подгруппах A/R и B/S инъективно. Полагая $N = \ker(\rho_{R,S}\sigma)$, покажем, что $R = A \cap N$ и $S = B \cap N$.

Так как для гомоморфизма $\rho_{R,S}$ справедливо равенство $R\rho_{R,S} = 1$, включение $R \subseteq A \cap N$ очевидно. Обратно, если элемент $a \in A$ принадлежит подгруппе N, то $1 = (a\rho_{R,S})\sigma = (aR)\sigma$, и так как σ на подгруппе A/R действует инъективно, имеем $aR = 1$, т. е. $a \in R$. Таким образом, включение $A \cap N \subseteq R$ также справедливо, и равенство $R = A \cap N$ доказано. Равенство $S = B \cap N$ проверяется аналогично. □

Предложение 8 ([2], теорема 3)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп. Если группы A и B $\mathcal{K}$-аппроксимируемы и существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе H, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. В частности, если существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, действующий инъективно на свободных множителях A и B, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Пусть $\mathcal{L}$ — некоторый класс групп, X — произвольная группа, Y — подгруппа группы X. Через $\mathcal{L}^*(X, Y)$ обозначим семейство всех подгрупп группы Y вида $Z \cap Y$, где Z — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(X)$.

Будем говорить, что подгруппа Y группы X отделима семейством Σ нормальных подгрупп этой группы, если для любого элемента $x \in X$, не принадлежащего подгруппе Y, среди подгрупп семейства Σ найдется подгруппа N такая, что $x \notin YN$.

Очевидно, подгруппа Y отделима семейством Σ в том и только том случае, когда имеет место равенство $Y = \bigcap_{N \in \Sigma} YN$, и потому семейство Σ является фильтрацией тогда и только тогда, когда этим семейством отделима единичная подгруппа группы X.

В работе [17] Г. Баумслаг указал необходимые и достаточные условия финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения G, которые с использованием введенного выше определения могут быть сформулированы следующим образом.

Предложение 9 ([17], предложение 2). *Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар нормальных (H, K, φ)-совместимых подгрупп конечного индекса групп A и B соответственно.*

1. *Если группа G финитно аппроксимируема, то ее единичная подгруппа отделима в группах A и B семействами $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.*
2. *Если единичная подгруппа группы G отделима в группах A и B семействами $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, подгруппа H отделима в группе A семейством $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и подгруппа K отделима в группе B семейством $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, то группа G финитно аппроксимируема.*

Покажем, что условия 1 и 2 предложения 9 можно сформулировать в других терминах.

Как уже было отмечено во введении, класс $\mathcal{F}$ всех конечных групп является корневым. Если $R \in \mathcal{F}^*(G, A)$ и подгруппа $N \in \mathcal{F}^*(G)$ такова, что $R = N \cap A$, то по предложению 7 подгруппы R и $S = N \cap B$ (H, K, φ)-совместимы и являются, очевидно, нормальными подгруппами конечного индекса групп A и B соответственно. Поэтому $R = R_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$.

Обратно, пусть подгруппа R группы A совпадает с некоторой подгруппой R_λ, и пусть $S = S_\lambda$. Тогда группа $G_{R,S}$ представляет собой обобщенное свободное произведение двух конечных групп A/R и B/S. Следовательно, она финитно аппроксимируема ([17], теорема 2). Согласно утверждению 2 предложения 2 существует подгруппа $N_{R,S} \in \mathcal{F}^*(G_{R,S})$ такая, что $N_{R,S} \cap A/R = N_{R,S} \cap B/S = 1$. Тогда естественный гомоморфизм $\sigma : G_{R,S} \to G_{R,S}/N_{R,S}$ действует инъективно на подгруппах A/R и B/S. Поэтому снова по предложению 7 $R = N \cap A$, $S = N \cap B$, где $N = \ker(\rho_{R,S}\sigma)$. Поскольку группа $G_{R,S}/N_{R,S}$ конечна, $N \in \mathcal{F}^*(G)$ и, значит, $R \in \mathcal{F}^*(G, A)$.

Таким образом, множество подгрупп, составляющих семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, совпадает с множеством $\mathcal{F}^*(G, A)$. Совпадение множества подгрупп семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и множества $\mathcal{F}^*(G, B)$ проверяется аналогично. Отсюда вытекает, что обобщением предложения 9 является

Предложение 10. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп.*

1. *Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то ее единичная подгруппа отделима в группах A и B семействами $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ соответственно.*
2. *Если подгруппы 1 и H отделимы в группе A семейством $\mathcal{K}^*(G, A)$, подгруппы 1 и K отделимы в группе B семейством $\mathcal{K}^*(G, B)$, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Для проверки первого утверждения покажем, что единичная подгруппа отделима в группе A семейством $\mathcal{K}^*(G, A)$. Отделимость этой подгруппы в группе B семейством $\mathcal{K}^*(G, B)$ устанавливается аналогично.

Пусть g — произвольный неединичный элемент, принадлежащий пересечению всех подгрупп семейства $\mathcal{K}^*(G, A)$. Тогда элемент g отличен от единицы и в группе G. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, следовательно, существует подгруппа $N \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $g \notin N$. Значит, элемент g не содержится в подгруппе $N \cap A$ семейства $\mathcal{K}^*(G, A)$. Поэтому g не входит в пересечение всех подгрупп данного семейства, что противоречит выбору элемента g. Таким образом, единичная подгруппа отделима в группе A семейством $\mathcal{K}^*(G, A)$.

Докажем второе утверждение. Пусть g — произвольный неединичный элемент группы G. Рассмотрим два случая: $g \in H$ и $g \notin H$.

Если $g \in H$, то g не принадлежит хотя бы одной из подгрупп R_0 семейства $\mathcal{K}^*(G, A)$ ввиду отделимости единичной подгруппы группы A данным семейством. Так как $R_0 = D_0 \cap A$ для подходящей подгруппы $D_0 \in \mathcal{K}^*(G)$ и элемент g группы A не содержится в R_0, то $g \notin D_0$.

Таким образом, для произвольного неединичного элемента g группы G, лежащего в H, существует подгруппа $D_0 \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $g \notin D_0$.

Пусть теперь $g \notin H$ и $g = g_1 g_2 \ldots g_n$ — несократимая запись элемента g. Поскольку $g \notin H$, то для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ $g_k \notin H$, причем если $n > 1$, то соседние слоги лежат в разных свободных множителях.

Пусть для некоторого $k \in \{1, \ldots, n\}$ $g_k \in A$. Так как при этом $g_k \notin H$ и подгруппа H отделима в группе A семейством $\mathcal{K}^*(G, A)$, то существует подгруппа $R_k \in \mathcal{K}^*(G, A)$ такая, что $g_k \notin HR_k$. Если $g_k \in B$, то аналогичным образом находим подгруппу $S_k \in \mathcal{K}^*(G, B)$ такую, что $g_k \notin KS_k$.

По определению семейства $\mathcal{K}^*(G, A)$ для любой подгруппы R_k данного семейства существует подгруппа $D_k \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $R_k = D_k \cap A$. Аналогично для каждой подгруппы S_k семейства $\mathcal{K}^*(G, B)$ существует подгруппа $D_k \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $S_k = D_k \cap B$.

Обозначим через D пересечение всех подгрупп D_k, где $k \in \{1, \ldots, n\}$. В силу утверждения 1 предложения 2 $D \in \mathcal{K}^*(G)$. Обозначим $R = A \cap D$, $S = B \cap D$. Тогда подгруппа R нормальна в группе A и, если $g_k \in A$, то $g_k \notin HR$. Аналогично подгруппа S нормальна в группе B и, если $g_k \in B$, то $g_k \notin KS$. В силу предложения 7 подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы и существует гомоморфизм группы $G_{R,S}$ на $\mathcal{K}$-группу G/D, действующий на подгруппах A/R и B/S инъективно. Из предложения 8 теперь следует, что группа $G_{R,S}$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Подействуем гомоморфизмом $\rho_{R,S}$ на элемент g:

$$g\rho_{R,S} = (g_1 g_2 \ldots g_n)\rho_{R,S} = g_1\rho_{R,S} g_2\rho_{R,S} \ldots g_n\rho_{R,S} \neq 1.$$

Действительно, если $g_k \in A$, то $g_k \notin HR$ и потому $g_k R \notin HR/R$; если $g_k \in B$, то $g_k \notin KS$, значит, $g_k S \notin KS/S$, причем соседние слоги лежат в разных свободных множителях при $n > 1$.

Таким образом, если $n = 1$, то $g\rho_{R,S}$ не принадлежит объединяемой подгруппе, значит, отличен от единицы; если $n > 1$, то получаем несократимую запись элемента $g\rho_{R,S}$ группы $G_{R,S}$ длины, большей единицы. Следовательно, $g\rho_{R,S} \neq 1$.

Так как группа $G_{R,S}$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема, существует гомоморфизм ψ этой группы на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $g\rho_{R,S}\psi \neq 1$. В силу произвольности выбора элемента g отсюда вытекает, что группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. □

Заметим, что утверждение 1 предложения 10 справедливо для произвольного класса групп.

Далее до конца статьи снова будем предполагать, что подгруппы H и K являются нормальными в группах A и B соответственно.

Предложение 11. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и фактор-групп. Подгруппа H $\mathcal{L}$-отделима в группе A тогда и только тогда, когда она отделима в A семейством $\mathcal{L}^*(G, A)$. Подгруппа K $\mathcal{L}$-отделима в группе B тогда и только тогда, когда она отделима в B семейством $\mathcal{L}^*(G, B)$.*

Доказательство. Если подгруппа H отделима в группе A семейством $\mathcal{L}^*(G, A)$, то она оказывается и $\mathcal{L}$-отделимой в этой группе, так как в силу замкнутости класса $\mathcal{L}$ относительно взятия подгрупп каждая подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(G, A)$ содержится в $\mathcal{L}^*(A)$.

Если подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в A, то из нормальности подгруппы H в группе A и замкнутости класса $\mathcal{L}$ относительно факторизации в силу предложения 3 следует $\mathcal{L}$-аппроксимируемость фактор-группы A/H.

Пусть g — элемент группы A, не принадлежащий подгруппе H. Найдем подгруппу $N \in \mathcal{L}^*(G, A)$ такую, что $g \notin HN$.

Очевидно, подгруппы H и B (H, K, φ)-совместимы и группа $G_{H,B}$ изоморфна фактор-группе A/H. Тогда gH — отличный от единицы элемент $\mathcal{L}$-аппроксимируемой группы $G_{H,B}$. Значит, существует гомоморфизм ψ группы $G_{H,B}$ на некоторую группу из класса $\mathcal{L}$ такой, что $(gH)\psi \neq 1$.

Пусть $\sigma = \rho_{H,B}\psi$, $N = \ker \sigma \cap A$. Тогда $N \in \mathcal{L}^*(G, A)$ и $g \notin N$. Так как $H \subseteq N$, то $HN = N$. Поэтому $g \notin HN$ и, следовательно, N — искомая подгруппа. Значит, подгруппа H отделима в группе A семейством $\mathcal{L}^*(G, A)$.

Аналогично проверяется справедливость утверждения 2. □

Таким образом, если корневой класс групп замкнут относительно факторизации и объединяемые подгруппы нормальны в соответствующих свободных множителях, то справедливо (более удобное в применении видоизменение предложения 10)

Предложение 12. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп.*

1. *Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то ее единичная подгруппа отделима в группах A и B семействами $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$.*
2. *Если единичная подгруппа группы G отделима в группах A и B семействами $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$, подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Если H и K — собственные абелевы подгруппы групп A и B, то сформулированное в предложении 12 достаточное условие аппроксимируемости обобщенного свободного произведения G становится необходимым.

Предложение 13. *Пусть $\mathcal{L}$ — наследственный класс групп, H и K — собственные абелевы подгруппы групп A и B соответственно. Если группа G $\mathcal{L}$-аппроксимируема, то подгруппа H $\mathcal{L}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{L}$-отделима в группе B.*

Доказательство. Справедливость утверждения будем доказывать от противного.

Пусть подгруппа H не является $\mathcal{L}$-отделимой в группе A. Тогда существует элемент a группы A, не принадлежащий подгруппе H, такой, что для любой подгруппы N семейства $\mathcal{L}^*(A)$ справедливо включение $a \in HN$. Так как K — собственная подгруппа группы B, можем выбрать элемент b группы B, не принадлежащий подгрупе K.

Рассмотрим элемент $g = [a, b^{-1}ab] = a^{-1}b^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab$ группы G. Он имеет несократимую запись длины 8 и, следовательно, отличен от единицы. Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(G)$ и $N = M \cap A$. Так как подгруппа N принадлежит семейству $\mathcal{L}^*(A)$, имеем $a \in HN$, и потому для некоторого элемента h подгруппы H выполнено сравнение $a \equiv h \pmod{N}$. Следовательно, $a \equiv h \pmod{M}$ и, значит, $[a, b^{-1}ab] \equiv [h, b^{-1}hb] \pmod{M}$. Так как H является нормальной абелевой подгруппой группы G, то $[h, b^{-1}hb] = 1$, откуда получаем включение $g \in M$. Значит, неединичный элемент g группы G лежит в каждой подгруппе семейства $\mathcal{L}^*(G)$, что противоречит $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы G.

Таким образом, $\mathcal{L}$-отделимость подгруппы H в группе A доказана. $\mathcal{L}$-отделимость подгруппы K в группе B проверяется аналогично. □

3. Доказательства теоремы 1 и следствия 1

Доказательство теоремы 1. Очевидно, фактор-группа G/H изоморфна свободному произведению фактор-групп A/H и B/K. Рассмотрим гомоморфизм группы G/H на прямое произведение этих фактор-групп, действующий тождественно на подгруппах A/H и B/K. Хорошо известно, что ядро D данного гомоморфизма, называемое декартовой подгруппой группы G/H, является свободной группой.

Пусть N — нормальная подгруппа группы G такая, что $D = N/H$. Тогда $N \cap A = H$, $N \cap B = K$, $G/N \cong A/H \times B/K$. Отсюда и из того, что $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$ и класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия прямых произведений, следует, что фактор-группа G/N принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Подгруппа N представляет собой расширение группы H с помощью свободной группы N/H. Как известно, такое расширение расщепляемо, т. е. в N существует свободная подгруппа F, изоморфная N/H, такая, что N является расщепляемым расширением H при помощи F.

Пусть $\rho : F \to \operatorname{Aut} H$ — сопровождающий гомоморфизм данного расщепляемого расширения, $C = \ker \rho$. Тогда $F\rho \leqslant \operatorname{Aut}_G(H)$ и, следовательно, $F\rho \in \mathcal{K}$. В силу утверждения 1 предложения 6 подгруппа CH нормальна в группе N и является прямым произведением подгрупп C и H, а фактор-группа N/CH изоморфна $\mathcal{K}$-группе $F\rho$. Заметим также, что произведение CH можно рассматривать как расщепляемое расширение группы C при помощи $\mathcal{K}$-группы H.

Тогда факторы N/CH и CH/C субнормального ряда $1 \leqslant C \leqslant CH \leqslant N$ группы N принадлежат классу $\mathcal{K}$. Поэтому согласно условию Грюнберга в группе N найдется нормальная подгруппа M такая, что $M \subseteq C$ и $N/M \in \mathcal{K}$.

Аналогично субнормальный ряд $1 \leqslant M \leqslant N \leqslant G$ группы G удовлетворяет упомянутому выше условию Грюнберга ($G/N \in \mathcal{K}$, $N/M \in \mathcal{K}$), в силу которого в группе G существует нормальная подгруппа L такая, что $L \subseteq M$ и $G/L \in \mathcal{K}$.

Так как $N \cap A = H$, $N \cap B = K$, $F \leqslant N$ и $F \cap H = 1$, то $F \cap A = F \cap B = 1$. Из включений $L \subseteq C \subseteq F$ теперь следует $L \cap A = L \cap B = 1$.

Таким образом, естественный гомоморфизм группы G на $\mathcal{K}$-группу G/L инъективен на подгруппах A и B. В силу предложения 8 отсюда следует, что группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. □

Доказательство следствия 1. Так как класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, то из условий $A \in \mathcal{K}$ и $B \in \mathcal{K}$ следует $A/H \in \mathcal{K}$ и $B/K \in \mathcal{K}$. Поэтому импликация $2 \Rightarrow 1$ вытекает из теоремы 1. Импликация $1 \Rightarrow 2$ имеет место в силу предложения 4. □

4. Доказательства теорем 2, 3 и следствия 3

Доказательство теоремы 2. Проверим достаточность условий 1–3. Для этого покажем, что множества подгрупп, составляющих семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, совпадают с множествами $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ соответственно. Тогда $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G будет следовать из предложения 12.

Зафиксируем некоторое $\lambda \in \Lambda$ и обозначим через R подгруппу R_λ, через S — подгруппу S_λ. Так как подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы, то можем рассмотреть свободное произведение $G_{R,S}$ фактор-групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и KS/S, объединенными относительно изоморфизма $\overline{\varphi} : HR/R \to KS/S$. Легко видеть, что гомоморфизм $\rho_{R,S}$ сюръективен и переводит H на HR/R. Поэтому $\operatorname{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ — гомоморфный образ

$\mathcal{K}$-группы $\mathrm{Aut}_G(H)$. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации следует, что $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ также является $\mathcal{K}$-группой. Тогда в силу следствия 1 существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах A/R и B/S. Полагая $N = \ker(\rho_{R,S}\sigma)$, получаем $N \in \mathcal{K}^*(G)$ и согласно второй части предложения 7 $R = A \cap N$, $S = B \cap N$. Таким образом, подгруппы R и S содержатся в семействах $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ соответственно. Ввиду произвольности выбора λ отсюда следует, что все подгруппы семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ принадлежат $\mathcal{K}^*(G, A)$ и все подгруппы семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ принадлежат $\mathcal{K}^*(G, B)$. Справедливость противоположных включений вытекает из первой части предложения 7 и замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп.

Проверим необходимость условий 1–3. Так как подгруппа H нормальна в группе G, то ее централизатор $C_G(H)$ также нормален в G и группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ изоморфна фактор-группе $G/C_G(H)$. Из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G в силу предложения 5 следует $\mathcal{K}$-отделимость подгруппы $C_G(H)$. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации ввиду предложения 3 получаем $\mathcal{K}$-аппроксимируемость фактор-группы $G/C_G(H)$. Тогда $\mathrm{Aut}_G(H)$ также $\mathcal{K}$-аппроксимируема. К тому же группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна по условию, значит, она принадлежит классу $\mathcal{K}$ согласно утверждению 3 предложения 2.

Теперь, рассуждая как и выше, можно показать, что множества подгрупп семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ совпадают с множествами $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$. Поэтому в силу предложения 10 семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями.

Покажем, что подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A. Предположим противное: существует элемент a группы A, не принадлежащий H, но переходящий в некоторый элемент из образа подгруппы H при каждом гомоморфизме группы A на группу из класса $\mathcal{K}$. Так как K — собственная подгруппа группы B, то существует элемент b группы B, не принадлежащий подгруппе K. Обозначим элемент ab группы G через g. Тогда $\widehat{g}|_H \in \mathrm{Aut}_G(H)$. Ввиду того, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа, порядок элемента $\widehat{g}|_H$ равен некоторому конечному числу q.

Рассмотрим элемент $f = [a, g^{-q}ag^q]$. Он имеет несократимую запись длины $8q$, значит, отличен от единицы. Пусть ψ — произвольный гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$. Тогда $f\psi = [h\psi, g^{-q}\psi h\psi g^q\psi] = [h, g^{-q}hg^q]\psi$ для подходящего элемента h подгруппы H. Так как $\widehat{g^q}|_H = (\widehat{g}|_H)^q = \mathrm{id}$, то $[h, g^{-q}hg^q]\psi = 1$, что противоречит $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G.

Таким образом, подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A. Аналогично устанавливается $\mathcal{K}$-отделимость подгруппы K в группе B. □

Доказательство теоремы 3. Импликация $1 \Rightarrow 2$ следует из утверждения 2 предложения 2, импликация $2 \Rightarrow 3$ — из предложения 4. Проверим импликацию $3 \Rightarrow 1$.

Заметим, что если хотя бы одна из объединяемых подгрупп совпадает с соответствующим свободным множителем, то вся группа G совпадает с другим свободным множителем и потому $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Следовательно, можем считать, что подгруппы H и K являются собственными.

В силу утверждения 2 предложения 2 подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A и подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B.

Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп семейств $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$. Покажем, что тогда семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями.

Предположим, напротив, что в пересечении всех подгрупп семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ найдется неединичный элемент a. Тогда a — отличный от единицы элемент $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы A. Следовательно, существует подгруппа $R \in \mathcal{K}^*(A)$ такая, что $a \notin R$. В силу предложения 2 подгруппу R можно выбрать так, чтобы, кроме того, выполнялось соотношение $H \cap R = 1$. Аналогично строим подгруппу S группы B такую, что $S \in \mathcal{K}^*(B)$ и $K \cap S = 1$. Тогда подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы. Значит, $R = R_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Тогда a не принадлежит пересечению всех подгрупп семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, что противоречит выбору элемента a. Следовательно, $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — фильтрация.

Аналогично проверяется, что семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ также является фильтрацией.

Теперь требуемое утверждение следует из теоремы 2. □

Предложение 14. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, группы $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\mathrm{Aut}_B(K)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$. Если хотя бы одна из подгрупп H и K лежит в центре соответствующего свободного множителя или группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой, то группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Из того, что обобщенное свободное произведение G порождается подгруппами A и B, легко следует, что группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ порождается подгруппами $U = \mathrm{Aut}_A(H)$ и $V = \varphi \,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$.

Если $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа, то она совпадает с произведением порождающих ее подгрупп U и V. Поэтому $\mathrm{Aut}_G(H)/V \cong U/U \cap V$. Так как группы $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\mathrm{Aut}_B(K)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$ и этот класс замкнут относительно факторизации, имеем, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — расширение $\mathcal{K}$-группы при помощи $\mathcal{K}$-группы. Класс $\mathcal{K}$ — корневой, значит, такое расширение снова является $\mathcal{K}$-группой, и потому группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Теперь рассмотрим случай, когда одна из подгрупп H и K лежит в центре соответствующего свободного множителя. Пусть для определенности подгруппа K центральна в группе B. Тогда группа $\mathrm{Aut}_B(K)$ является единичной. Поэтому группа $\mathrm{Aut}_G(H)$, порождаемая подгруппами U и V, совпадает с U и, следовательно, принадлежит классу $\mathcal{K}$. □

Доказательство следствия 3. В силу предложения 4 группы $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\mathrm{Aut}_B(K)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$. Тогда согласно предложению 14 группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ также принадлежит классу $\mathcal{K}$. Поэтому обобщенное свободное произведение G $\mathcal{K}$-аппроксимируемо в силу теоремы 3. □

5. Доказательства теоремы 4 и следствий 4, 5

Доказательство теоремы 4. Утверждение 1 теоремы следует из предложения 13. Убедимся в справедливости утверждения 2.

Для этого покажем сначала, что если R — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(A)$, то $R \in \mathcal{K}^*(G, A)$.

Обозначим $H \cap R$ через U, $U\varphi$ — через V. Из наследственности класса $\mathcal{K}$ следует $V \in \mathcal{K}^*(K)$. Если K — центральная подгруппа группы B, то V, очевидно, нормальна в B. Если же K — нормальная циклическая подгруппа группы B, то и любая ее подгруппа нормальна в B. Поэтому ввиду $\mathcal{K}$-регулярности группы B по подгруппе K существует подгруппа $S \in \mathcal{K}^*(B)$ такая, что $K \cap S = V$.

Так как подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы, то можем построить обобщенное свободное произведение

$$G_{R,S} = (A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \overline{\varphi}).$$

Поскольку $R \in \mathcal{K}^*(A)$ и $S \in \mathcal{K}^*(B)$, фактор-группы A/R и B/S принадлежат классу $\mathcal{K}$. Отсюда согласно предложению 4 получаем, что группы $\mathrm{Aut}_{A/R}(HR/R)$ и $\mathrm{Aut}_{B/S}(KS/S)$ также принадлежат классу $\mathcal{K}$.

Если H — циклическая подгруппа группы A, то и фактор-группа HR/R является циклической. Следовательно, $\mathrm{Aut}(HR/R)$ — абелева группа и ее подгруппа $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ также абелева. Если K — центральная подгруппа группы B, то подгруппа KS/S также центральна в группе B/S. Поэтому согласно предложению 14 группа $\mathrm{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Таким образом, в силу следствия 1 существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на $\mathcal{K}$-группу, инъективный на свободных множителях A/R и B/S. Положим $N = \ker(\rho_{R,S}\sigma)$. Тогда $N \in \mathcal{K}^*(G)$ и по предложению 7 $R = N \cap A$. Значит, $R \in \mathcal{K}^*(G, A)$. $\square$

Покажем теперь, что семейство $\mathcal{K}^*(G, A)$ является фильтрацией.

Предположим, что существует неединичный элемент g, принадлежащий пересечению всех подгрупп семейства $\mathcal{K}^*(G, A)$. Тогда g отличен от единицы и в группе A. Поэтому из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы A следует, что существует подгруппа $R \in \mathcal{K}^*(A)$, не содержащая элемент g. Ввиду доказанного выше $R \in \mathcal{K}^*(G, A)$, что противоречит выбору элемента g. Значит, $\mathcal{K}^*(G, A)$ — фильтрация.

Убедимся, что семейство $\mathcal{K}^*(G, B)$ также является фильтрацией. Рассуждая от противного, зафиксируем произвольный неединичный элемент g, принадлежащий пересечению всех подгрупп семейства $\mathcal{K}^*(G, B)$.

Предположим сначала, что g содержится в подгруппе K. Тогда g имеет прообраз относительно изоморфизма φ, т. е. существует неединичный элемент h группы H такой, что $h\varphi = g$. Далее, как и выше, находим подгруппу R семейства $\mathcal{K}^*(G, A)$, не содержащую элемент h. Тогда существует подгруппа $N \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $N \cap A = R$. Очевидно, что $g = h\varphi \notin N$. Значит, элемент g не принадлежит подгруппе $N \cap B$ семейства $\mathcal{K}^*(G, B)$, что противоречит выбору данного элемента.

Пусть теперь элемент g не содержится в подгруппе K. Тогда gK — отличный от единицы элемент фактор-группы B/K. Очевидно, подгруппы A и K (H, K, φ)-совместимы и группа $G_{A,K}$ изоморфна фактор-группе B/K. Из $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы K в группе B, замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации и предложения 3 вытекает $\mathcal{K}$-аппроксимируемость фактор-группы B/K.

Таким образом, gK — отличный от единицы элемент $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы $G_{A,K}$. Следовательно, существует гомоморфизм σ группы $G_{A,K}$ на некоторую $\mathcal{K}$-группу такой, что $(gK)\sigma \neq 1$. Пусть $N = \ker(\rho_{A,K}\sigma)$. Тогда $N \in \mathcal{K}^*(G)$ и $g \notin N$. Далее, как и выше, заключаем, что элемент g не принадлежит подгруппе $N \cap B$ семейства $\mathcal{K}^*(G, B)$, что вновь противоречит выбору данного элемента. Значит, $\mathcal{K}^*(G, B)$ — фильтрация.

Теперь справедливость второго утверждения теоремы следует из предложения 12. $\square$

Пусть π — непустое множество простых чисел. Как обычно, через π' будем обозначать множество всех простых чисел, не принадлежащих π.

Говорят, что подгруппа Y некоторой группы X π'-изолирована в X, если для произвольного элемента x группы X и произвольного π'-числа q из того, что x^q — элемент подгруппы Y, следует, что x также является элементом подгруппы Y.

Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу. Если все группы из класса $\mathcal{L}$ периодические, то через $\pi(\mathcal{L})$ обозначим множество всех простых делителей порядков их элементов. Если класс $\mathcal{L}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, положим $\pi(\mathcal{L})$ равным множеству всех простых чисел. Так как в классе $\mathcal{L}$ имеется по крайней мере одна неединичная группа, то в обоих случаях множество $\pi(\mathcal{L})$ не пусто.

Предложение 15. *Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу, X — некоторая группа, Y — ее подгруппа. Если подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X, то она $\pi(\mathcal{L})'$-изолирована в X.*

Доказательство. Если класс $\mathcal{L}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то $\pi(\mathcal{L})$ совпадает с множеством всех простых чисел. Поэтому, какова бы ни была группа X, каждая ее подгруппа оказывается $\pi(\mathcal{L})'$-изолированной.

Пусть теперь класс $\mathcal{L}$ состоит только из периодических групп, q — $\pi(\mathcal{L})'$-число и x — элемент группы X такой, что $x^q \in Y$. Пусть также N — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(X)$. Тогда X/N — периодическая $\pi(\mathcal{L})$-группа. Обозначим через s порядок ее элемента xN. Отсюда $x^s \in N$, а потому $x^s \in YN$. С другой стороны, $x^q \in Y$, поэтому $x^q \in YN$. Таким образом, $x^s \in YN$ и $x^q \in YN$, причем q и s взаимно просты. Значит, $x \in YN$. Так как подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ была выбрана произвольным образом, то $x \in \bigcap\limits_{N\in\mathcal{L}^*(X)} YN$. Отсюда и из $\mathcal{L}$-отделимости подгруппы Y в группе X вытекает, что $x \in Y$. □

Для подгрупп конечно порожденных нильпотентных групп необходимое условие $\mathcal{L}$-отделимости, доставляемое предложением 15, при определенных ограничениях, накладываемых на класс $\mathcal{L}$, является и достаточным, как показывает

Предложение 16. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп. Тогда произвольная $\pi(\mathcal{K})'$-изолированная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы $\mathcal{K}$-отделима.*

Доказательство. Из теоремы 3 работы [23] следует, что произвольная $\pi(\mathcal{K})'$-изолированная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы отделима конечными $\pi(\mathcal{K})$-группами. Так как гомоморфный образ нильпотентной группы снова является нильпотентной группой, то произвольная $\pi(\mathcal{K})'$-изолированная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы оказывается отделимой конечными нильпотентными $\pi(\mathcal{K})$-группами, а значит, и конечными разрешимыми $\pi(\mathcal{K})$-группами. Так как класс $\mathcal{K}$ состоит из периодических групп, то, как легко видеть, он содержит все конечные разрешимые $\pi(\mathcal{K})$-группы ([15], предложение 2) и, следовательно, произвольная $\pi(\mathcal{K})'$-изолированная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы $\mathcal{K}$-отделима. □

Предложение 17. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, состоящий только из периодических групп, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, K — $\mathcal{K}$-отделимая подгруппа группы B. Тогда группа B $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе K.*

Доказательство. Пусть V — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(K)$, нормальная в группе B. Так как подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B, то ввиду предложения 15 K $\pi(\mathcal{K})'$-изолирована в B. Отсюда и из того, что $V \in \mathcal{K}^*(K)$, следует $\pi(\mathcal{K})'$-изолированность подгруппы V в группе B. Тогда в силу предложения 16 подгруппа V $\mathcal{K}$-отделима в этой группе.

Таким образом, V — нормальная $\mathcal{K}$-отделимая подгруппа группы B. Поэтому ввиду замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации и предложения 3 группа B/V $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Так как B — конечно порожденная нильпотентная группа, то и K/V — конечно порожденная нильпотентная группа. Поскольку $V \in \mathcal{K}^*(K)$ и класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, фактор-группа K/V является периодической, а потому конечной подгруппой $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы B/V. Поэтому в силу утверждения 2 предложения 2 существует подгруппа $S/V \in \mathcal{K}^*(B/V)$ такая, что $K/V \cap S/V = 1$.

Тогда $S \in \mathcal{K}^*(B)$ и $K \cap S = V$. Следовательно, группа B $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе K. □

Доказательство следствия 4. Пусть V — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(K)$, нормальная в группе B. Так как свободный множитель B содержится в $\mathcal{K}$ и класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, то фактор-группа B/V принадлежит классу $\mathcal{K}$. Таким образом, $V \in \mathcal{K}^*(B)$ и $K \cap V = V$, т. е. группа B $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе K.

Заметим также, что из принадлежности группы B классу $\mathcal{K}$ вытекает $\mathcal{K}$-отделимость подгруппы K в этой группе. Теперь справедливость утверждения следует из теоремы 4. □

Доказательство следствия 5. Если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, утверждение следствия вытекает непосредственно из теоремы 4 и предложения 17.

Пусть $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу. Заметим, что класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений. Из первых двух свойств следует, что $\mathcal{K}$ содержит все циклические группы, из третьего — что он включает и все полициклические группы, а значит, и все конечно порожденные нильпотентные группы. Поэтому оказываются выполненными условия следствия 4, из которого и вытекает сформулированное утверждение. □

6. Доказательства теоремы 5 и следствия 6

Предложение 18. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — $\mathcal{L}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X, имеющая конечный ранг Гирша–Зайцева. Тогда существует подгруппа $Z \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$. В частности, Y является $\mathcal{L}$-группой.*

Доказательство. Пусть $1 = Y_0 \leqslant Y_1 \leqslant \dots \leqslant Y_n = Y$ — субнормальный ряд группы Y, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой. Доказательство будем вести индукцией по длине этого ряда.

Если $n = 0$, то утверждение предложения очевидным образом следует из $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы X. Поэтому далее будем считать, что $n \geqslant 1$ и для всех подгрупп, обладающих рядом указанного выше вида длины, меньшей n, искомое утверждение имеет место.

Так как группа X, а значит, и ее подгруппа Y_1, аппроксимируется группами без кручения, то она сама не имеет кручения. Поэтому Y_1 — бесконечная циклическая группа, порожденная некоторым элементом y. Также из $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы X следует, что существует нормальная подгруппа M этой группы такая, что $X/M \in \mathcal{L}$ и $y \notin M$. Из отсутствия кручения в фактор-группе X/M вытекает, что элемент y имеет бесконечный порядок по модулю подгруппы M. Поэтому $M \cap Y_1 = 1$.

Так как $M \cap Y_{i+1}/M \cap Y_i \cong (M \cap Y_{i+1})Y_i/Y_i \leqslant Y_{i+1}/Y_i$, то группа $M \cap Y$ также обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой, причем длина этого ряда строго меньше n. Поэтому в силу индуктивного предположения существует подгруппа $L \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $L \cap (M \cap Y) = 1$.

Обозначим $L \cap M$ через Z. Тогда $Z \cap Y = 1$ и ввиду утверждения 1 предложения 2 подгруппа Z содержится в семействе $\mathcal{L}^*(X)$. Следовательно, Z — искомая подгруппа. □

Предложение 19 ([22], предложение 1.2.5)**.** *Пусть класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — $\mathcal{L}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X. Если существует подгруппа $Z \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$, то подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X.*

Доказательство теоремы 5. Импликация $2 \Rightarrow 1$ имеет место в силу предложения 4. Проверим справедливость импликации $1 \Rightarrow 2$. Легко видеть, что класс всех $\mathcal{K}$-групп без кручения замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому в силу предложения 18 существует нормальная подгруппа Z группы A такая, что фактор-группа A/Z является $\mathcal{K}$-группой без кручения и $Z \cap H = 1$. Аналогично существует подгруппа Y, нормальная в группе B, такая, что B/Y — $\mathcal{K}$-группа без кручения и $Y \cap K = 1$.

Выбранные таким образом подгруппы Z и Y (H, K, φ)-совместимы. Следовательно, можем построить обобщенное свободное произведение $G_{Z,Y}$. Как уже отмечалось в доказательстве теоремы 2, группа $\mathrm{Aut}_{G_{Z,Y}}(HZ/Z)$ является гомоморфным образом $\mathcal{K}$-группы $\mathrm{Aut}_G(H)$. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации получаем, что $\mathrm{Aut}_{G_{Z,Y}}(HZ/Z) \in \mathcal{K}$. Поэтому согласно следствию 1 существует гомоморфизм γ группы $G_{Z,Y}$ на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах A/Z и B/Y. Так как $Z \cap H = 1$ и гомоморфизм $\rho_{Z,Y}$ продолжает естественный гомоморфизм группы A на фактор-группу A/Z, то композиция $\rho_{Z,Y}\gamma$ представляет собой гомоморфизм группы G на $\mathcal{K}$-группу, инъективный на подгруппе H. Таким образом, импликация $1 \Rightarrow 2$ также имеет место.

Осталось отметить, что $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G следует из предложения 8. $\square$

Доказательство следствия 6. В силу предложения 18 существует гомоморфизм группы A на некоторую $\mathcal{K}$-группу без кручения, инъективный на H. Тогда согласно предложению 4 группа $\mathrm{Aut}_A(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Аналогично проверяется, что группа $\mathrm{Aut}_B(K)$ также содержится в классе $\mathcal{K}$. Тогда согласно предложению 14 группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$ и группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 5. $\square$

Литература

[1] Gruenberg K.W. *Residual properties of infinite soluble groups*, Proc. Lond. Math. Soc. **7**, 29–62 (1957).

[2] Азаров Д.Н., Тьеджо Д. *Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп*, Науч. тр. Ивановск. гос. ун-та. Матем., №5, 6–10 (2002).

[3] Азаров Д. Н., Туманова Е. А. *Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами*, Науч. тр. Ивановск. гос. ун-та. Матем., №6, 29–42 (2008).

[4] Tieudjo D. *On root-class residuality of some free constructions*, JP J. Algebra, Number Theory and Appl. **18** (2), 125–143 (2010).

[5] Азаров Д.Н., Гольцов Д.В. *О почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений некоторыми классами конечных групп*, Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. Естественные, общественные науки, №2, 86–91 (2012).

[6] Туманова Е.А. *Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой*, Чебышевский сб. **14** (3), 140–147 (2013).

[7] Туманова Е.А. *Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп*, Моделир. и анализ информ. систем **20** (1), 133–137 (2013).

[8] Гольцов Д.В. *О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп*, Чебышевский сб. **14** (3), 34–41 (2013).

[9] Туманова Е.А. *Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп*, Моделир. и анализ информ. систем **21** (4), 148–180 (2014).

[10] Гольцов Д.В. *Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп*, Матем. заметки **97** (5), 665–669 (2015).

[11] Соколов Е.В. *Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп*, Матем. заметки **97** (5), 767–780 (2015).

[12] Sokolov E.V. *A characterization of root classes of groups*, Comm. Algebra **43** (2), 856–860 (2015).

[13] Гольцов Д.В., Яцкин Н.И. *Классы групп и подгрупповые топологии*, Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. Естественные, общественные науки, №2, 115–128 (2011).

[14] Соколов Е.В. *Об отделимости циклических подгрупп свободной группы корневым классом групп*, Матем. и ее прилож.: Журн. Ивановск. матем. о-ва, №1, 101–104 (2011).

[15] Гудовщикова А.С., Соколов Е.В. *Два замечания о классе конечных разрешимых π-групп*, Вестн. молодых ученых Ивановск. гос. ун-та, №12, 3–4 (2012).
[16] Мальцев А.И. *О гомоморфизмах на конечные группы*, Учен. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та **18**, 49–60 (1958).
[17] Baumslag G. *On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **106**, 193–209 (1963).
[18] Higman G. *Amalgams of p-groups*, J. Algebra **1**, 301–305 (1964).
[19] Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya. *On various rank conditions in infinite groups*, Algebra and Discrete Math., №4, 23–43 (2007).
[20] Туманова Е. А. *Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп*, Чебышевский сб. **13** (1), 150–152 (2012).
[21] Туманова Е.А. *Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп*, Матем. заметки **95** (4), 605–614 (2014).
[22] Соколов Е.В. *Отделимость подгрупп некоторыми классами конечных групп* (LAP Lambert Academic Publishing, 2012).
[23] Соколов Е.В. *Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп*, Сиб. матем. журн. **55** (6), 1381–1390 (2014).

Е.А. Туманова

аспирант, кафедра алгебры и математической логики,
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, д. 39, г. Иваново, 153025, Россия;
преподаватель, кафедра высшей математики и информатики,
Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России,
пр. Строителей, д. 33, г. Иваново, 153040, Россия,

e-mail: helenfog@bk.ru

E.A. Tumanova

On the root-class residuality of generalized free products with a normal amalgamation

Abstract. We obtain both necessary and sufficient conditions for the free product of two groups with normal amalgamated subgroups to be a residually $\mathcal{C}$-group, where $\mathcal{C}$ is a root class of groups, which must be homomorphically closed in most cases.

Keywords: generalized free product, residual property, root class of groups.

E.A. Tumanova

Postgraduate, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Ivanovo State University,
39 Ermaka str., Ivanovo, 153025 Russia;
Lecturer, Chair of the Higher Mathematics and Information Science,
Ivanovo Fire and Rescue Academy,
33 Stroitelei Ave., Ivanovo, 153040 Russia,

e-mail: helenfog@bk.ru