Сибирский математический журнал
Июль—август, 2019. Том 60, № 4

УДК 512.543

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ГРУПП ДРЕВЕСНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ С ОБЪЕДИНЕННЫМИ РЕТРАКТАМИ

Е. А. Туманова

Аннотация. Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный корневой класс групп. Доказано, что древесное произведение $\mathscr{K}$-аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами является $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группой. С помощью данного результата получены критерии аппроксимируемости классом $\mathscr{K}$ групп Артина и Коксетера с древесной структурой. Доказано также, что HNN-расширение X $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы B, в свою очередь, аппроксимируется классом $\mathscr{K}$, если связанные подгруппы группы X являются ретрактами в группе B и класс $\mathscr{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.415

Ключевые слова: древесное произведение групп, HNN-расширение, группа Артина, группа Коксетера, аппроксимируемость корневыми классами, финитная аппроксимируемость, аппроксимируемость конечными p-группами, аппроксимируемость разрешимыми группами.

§ 1. Введение

Пусть T — дерево с множеством вершин V и множеством ребер E. Пусть каждой вершине $v \in V$ сопоставлена некоторая группа A_v, а каждому ребру $e = \{v, w\} \in E$ — группа H_e и вложения $\varphi_{ev} : H_e \to A_v$, $\varphi_{ew} : H_e \to A_w$. Для удобства подгруппы $H_e\varphi_{ev}$ и $H_e\varphi_{ew}$ групп A_v и A_w будем обозначать через H_{vw} и H_{wv} соответственно.

Пусть каждая группа A_v $(v \in V)$ задана множеством образующих и множеством определяющих соотношений. Согласно [1] *древесным произведением* групп A_v $(v \in V)$ с подгруппами H_{vw} и H_{wv}, объединенными при помощи изоморфизмов φ_{ev} и φ_{ew} $(e = \{v, w\} \in E)$, называется группа

$$G = \langle A_v\ (v \in V);\ H_{vw} = H_{wv}\ (\{v, w\} \in E)\rangle,$$

образующими которой являются образующие групп A_v $(v \in V)$, а определяющими соотношениями — соотношения групп A_v $(v \in V)$, а также всевозможные соотношения вида $h\varphi_{ev} = h\varphi_{ew}$ $(e = \{v, w\} \in E,\ h \in H_e)$, где $h\varphi_{ev}$ — слово от образующих группы A_v, определяющее образ элемента h относительно вложения φ_{ev}, $h\varphi_{ew}$ — слово от образующих группы A_w, определяющее образ элемента h относительно вложения φ_{ew}. Группы A_v $(v \in V)$ называются

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18–31–00187).

вершинными группами, а подгруппы H_{vw} и H_{wv} ($\{v, w\} \in E$) — *реберными подгруппами*.

Заметим, что если дерево T состоит из двух вершин и одного ребра, то соответствующее ему древесное произведение является свободным произведением двух его вершинных групп с объединенной подгруппой. Еще одну хорошо известную конструкцию — свободное произведение произвольного семейства групп с одной объединенной подгруппой — можно рассматривать как древесное произведение, соответствующее графу-звезде, при условии, что все реберные подгруппы группы, отвечающей центральной вершине, совпадают.

Напомним, что группа X называется *аппроксимируемой классом групп* $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$*-аппроксимируемой*), если для каждого отличного от 1 элемента $x \in X$ найдется гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$-группу), под действием которого x переходит в неединичный элемент. В настоящей работе исследуется аппроксимируемость древесных произведений произвольным корневым классом групп.

Понятие корневого класса групп введено Грюнбергом в [2]. Согласно данному им определению нетривиальный (т. е. содержащий хотя бы одну неединичную группу) класс групп $\mathcal{K}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяет следующему условию: если $1 \leq Z \leq Y \leq X$ — субнормальный ряд группы X, факторы X/Y и Y/Z которого принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и $X/T \in \mathcal{K}$. Однако для понимания того, что же именно представляют собой корневые классы групп, более удобным оказывается равносильное определение, приведенное в [3]: нетривиальный класс групп $\mathcal{K}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами X и Y содержит декартово произведение вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$. Из второго определения сразу следует, что пересечение любых корневых классов снова корневой класс. В качестве конкретных примеров корневых классов отметим классы всех конечных групп, конечных p-групп, где p — некоторое простое число, разрешимых групп и всех групп без кручения.

В [2, 4] установлено, что, каким бы ни был корневой класс групп $\mathcal{K}$, свободное произведение любого семейства $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп оказывается $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. Вместе с тем известные к настоящему времени результаты об аппроксимируемости конкретными корневыми классами групп (см., например, [5–9]) позволяют предположить, что для более сложно устроенных теоретико-групповых конструкций, таких как свободное произведение с объединенной подгруппой или HNN-расширение, получить столь же универсальный критерий скорее всего никогда не удастся. Поэтому исследование аппроксимируемости указанных конструкций проводят при различных ограничениях, накладываемых на группы, из которых они построены, подгруппы этих групп и связывающие их изоморфизмы (см., например, [3, 4, 10–19]). Одним из подобного рода ограничений является свойство объединяемой подгруппы обобщенного свободного произведения быть ретрактом в содержащем ее свободном множителе.

Напомним, что подгруппа Y группы X называется *ретрактом*, если в группе X существует нормальная подгруппа Z такая, что $X = YZ$ и $Y \cap Z = 1$. Иначе говоря, подгруппа Y — ретракт в X, если существует гомоморфизм группы X

на группу Y, действующий на подгруппе Y тождественно. Отметим также, что подгруппа Y является ретрактом в группе X тогда и только тогда, когда последняя представляет собой расщепляемое расширение некоторой группы Z с помощью группы Y.

Болер и Эванс [20] установили, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами является финитно аппроксимируемой группой. В [21] получен аналогичный результат для случая аппроксимируемости конечными p-группами. Обобщением обоих этих утверждений служит приводимая далее теорема 1, доказанная в [22].

Теорема 1 [22, теорема 1]. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный корневой класс групп, P — свободное произведение групп A_1 и A_2 с подгруппами $H_1 \leq A_1$ и $H_2 \leq A_2$, объединенными относительно некоторого изоморфизма $\varphi : H_1 \to H_2$. Если группы A_1 и A_2 $\mathscr{K}$-аппроксимируемы, подгруппа H_1 — ретракт в группе A_1, подгруппа H_2 — ретракт в группе A_2, то группа P является $\mathscr{K}$-аппроксимируемой.*

В [11] теорема 1 была распространена на случай свободного произведения произвольного семейства групп с одной объединенной подгруппой. Кроме того, в [17] было получено обобщающее теорему 1 достаточное условие аппроксимируемости произвольным корневым классом свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами, только одна из которых является ретрактом в соответствующем свободном множителе. Основным результатом настоящей статьи является

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный корневой класс групп, $T = (V, E)$ — дерево и G — древесное произведение групп A_v $(v \in V)$ с подгруппами H_{vw} и H_{wv}, объединенными при помощи изоморфизмов φ_{ev} и φ_{ew} $(e = \{v, w\} \in E)$. Если все группы A_v $\mathscr{K}$-аппроксимируемы и для каждого ребра $\{v, w\} \in E$ подгруппа H_{vw} является ретрактом в группе A_v и подгруппа H_{wv} является ретрактом в группе A_w, то группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема.*

В качестве примера применения теоремы 2 здесь будут получены критерии аппроксимируемости произвольным корневым классом для групп Артина и Коксетера с древесной структурой.

Пусть V — произвольное множество, E — некоторое семейство двухэлементных подмножеств множества V. Напомним (см., например, [23]), что *группой Артина* называется группа с образующими a_v $(v \in V)$ и определяющими соотношениями

$$a_v a_w a_v \ldots = a_w a_v a_w \ldots \quad (\{v, w\} \in E),$$

где оба слова, в левой и правой частях, имеют длину $m_e \geq 2$ $(e = \{v, w\} \in E)$ и состоят из чередующихся символов a_v и a_w. Всюду далее будем записывать такие соотношения в виде

$$\langle a_v a_w \rangle^{m_e} = \langle a_w a_v \rangle^{m_e} \quad (e = \{v, w\} \in E).$$

Таким образом, группа Артина задается представлением

$$G = \langle a_v \ (v \in V);\ \langle a_v a_w \rangle^{m_e} = \langle a_w a_v \rangle^{m_e} \ (e = \{v, w\} \in E) \rangle.$$

Вместе с группой Артина обычно рассматривают и *группу Коксетера* $\overline{G}$, которая получается, если к числу определяющих соотношений группы Артина G добавить соотношения $a_v^2 = 1$ $(v \in V)$. Из равенств $a_v^2 = 1$ следует, что

$a_v = a_v^{-1}$ для всех $v \in V$ и потому каждое соотношение $\langle a_v a_w \rangle^{m_e} = \langle a_w a_v \rangle^{m_e}$ ($e = \{v, w\} \in E$) может быть переписано в виде $(a_v a_w)^{m_e} = 1$. Таким образом, группа $\overline{G}$ имеет представление

$$\overline{G} = \big\langle a_v\ (v \in V);\ a_v^2 = 1\ (v \in V),\ (a_v a_w)^{m_e} = 1\ (e = \{v, w\} \in E)\big\rangle.$$

Очевидно, что пару множеств (V, E) можно рассматривать как неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Если этот граф является деревом, то группа Артина (Коксетера) называется *группой Артина* (соответственно *Коксетера*) *с древесной структурой* [24]. Как показано ниже, группы Артина и Коксетера с древесной структурой оказываются древесными произведениями с объединенными ретрактами и потому при изучении их аппроксимируемости корневыми классами можно использовать теорему 2.

Всюду далее если $\mathscr{K}$ — произвольный корневой класс групп, то через $\pi(\mathscr{K})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков конечных групп из класса $\mathscr{K}$, а через $\mathscr{Z}(\mathscr{K})$ — множество положительных целых чисел, все простые делители которых принадлежат множеству $\pi(\mathscr{K})$.

Следствие 1. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный корневой класс групп и*

$$G = \langle a_v\ (v \in V);\ \langle a_v a_w \rangle^{m_e} = \langle a_w a_v \rangle^{m_e}\ (e = \{v, w\} \in E)\rangle$$

— группа Артина с древесной структурой.

1. *Если класс $\mathscr{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема.*

2. *Пусть класс $\mathscr{K}$ состоит только из периодических групп.*

(i) *Если все числа m_e ($e \in E$) четны, то группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все числа $m_e/2$ ($e \in E$) принадлежат множеству $\mathscr{Z}(\mathscr{K})$.*

(ii) *Если среди чисел m_e ($e \in E$) есть хотя бы одно нечетное, то группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все числа m_e ($e \in E$) принадлежат множеству $\mathscr{Z}(\mathscr{K})$ и $2 \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$.*

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный корневой класс групп и*

$$\overline{G} = \big\langle a_v\ (v \in V);\ a_v^2 = 1\ (v \in V),\ (a_v a_w)^{m_e} = 1\ (e = \{v, w\} \in E)\big\rangle$$

— группа Коксетера с древесной структурой. Группа $\overline{G}$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все числа m_e ($e \in E$) принадлежат множеству $\mathscr{Z}(\mathscr{K})$ и $2 \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$.

Как отмечено выше, классы конечных групп и разрешимых групп, а значит, и их пересечение — класс конечных разрешимых групп — являются корневыми. Поэтому из следствий 1 и 2 вытекает, что группы Артина и Коксетера с древесной структурой аппроксимируются конечными разрешимыми группами. Из указанных утверждений легко вывести также критерий аппроксимируемости данных групп конечными p-группами: в этом случае $\pi(\mathscr{K}) = \{p\}$, а $\mathscr{Z}(\mathscr{K})$ представляет собой множество всех неотрицательных степеней числа p. В качестве комментария к формулировкам следствий 1 и 2 отметим, что если все числа m_e ($e \in E$) принадлежат множеству $\mathscr{Z}(\mathscr{K})$ и среди них есть хотя бы одно четное, то включение $2 \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$ выполняется автоматически.

Кроме критериев аппроксимируемости групп Артина и Коксетера с помощью теоремы 2 здесь будет доказана

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп, содержащий хотя бы одну непериодическую группу, и $X = \langle B, t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi\rangle$ —* HNN-*расширение $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы B с подгруппами $H \leq B$ и $K \leq B$, связанными посредством некоторого изоморфизма $\varphi : H \to K$. Если подгруппы H и K являются ретрактами в группе B, то группа X $\mathscr{K}$-аппроксимируема.*

Хорошо известно, что каждая свободная группа аппроксимируется разрешимыми группами без кручения [25]. Класс разрешимых групп без кручения является корневым как пересечение корневых классов разрешимых групп и всех групп без кручения. Поэтому непосредственно из теоремы 3 вытекают следующие два утверждения.

Следствие 3. *Пусть X —* HNN-*расширение разрешимой группы B с подгруппами $H \leq B$ и $K \leq B$, связанными посредством некоторого изоморфизма $\varphi : H \to K$. Если подгруппы H и K являются ретрактами в группе B, то группа X аппроксимируется разрешимыми группами. Если группа B не имеет кручения, то группа X аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.*

Следствие 4. *Пусть X —* HNN-*расширение свободной группы B с подгруппами $H \leq B$ и $K \leq B$, связанными посредством некоторого изоморфизма $\varphi : H \to K$. Если подгруппы H и K являются ретрактами в группе B, то группа X аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.*

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теорем 2, 3 и следствий 1, 2.

§ 2. Некоторые свойства древесных произведений групп

Пусть $T = (V, E)$ — некоторое дерево и G — древесное произведение групп A_v $(v \in V)$ с подгруппами H_{vw} и H_{wv}, объединенными при помощи изоморфизмов φ_{ev} и φ_{ew} $(e = \{v, w\} \in E)$. Для каждого поддерева $T' = (V', E')$ дерева T можно определить древесное произведение, сопоставив вершинам и ребрам поддерева T' те же группы и вложения, что и в дереве T. Далее будем называть это древесное произведение *соответствующим поддереву* T'. В [1] доказано, что если $T' = (V', E')$ — некоторое поддерево дерева T и G' — соответствующее ему древесное произведение, то тождественное отображение образующих группы G' в группу G продолжаемо до вложения. В частности, все группы A_v $(v \in V)$ вкладываются в G посредством тождественного отображения образующих, что позволяет считать каждую вершинную группу подгруппой древесного произведения.

Пусть E' — некоторое подмножество множества E и $\{T_i \mid i \in I\}$ — множество компонент связности графа, который получается из T путем удаления всех ребер, принадлежащих множеству E'. Множество $\{T_i \mid i \in I\}$ будем называть *разбиением дерева T на поддеревья, соответствующим множеству E'*.

Очевидно, что для любых различных $i, j \in I$ в дереве T имеется не более одного ребра, связывающего некоторую вершину из T_i с некоторой вершиной из T_j, и что если такое ребро существует, то оно принадлежит E'. Очевидно также, что любое ребро из E' связывает вершины, принадлежащие разным поддеревьям. Поэтому можно определить граф $\mathscr{T}$ с множеством вершин $\mathscr{V} = \{T_i \mid i \in I\}$ и множеством ребер $\mathscr{E}$, взаимно однозначно соответствующим множеству E', где $\{T_i, T_j\} \in \mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда существует ребро

$e \in E'$, связывающее некоторую вершину из T_i с некоторой вершиной из T_j. Легко видеть, что граф $\mathscr{T}$ является деревом. Будем называть его *деревом, определяемым множеством* E'.

Обозначим через G_i древесное произведение, соответствующее поддереву T_i. Как уже было отмечено выше, для каждого $i \in I$ все вершинные группы поддерева T_i можно считать подгруппами в G_i. Поэтому если ребро $e \in E'$ связывает вершину v поддерева T_i с вершиной w поддерева T_j, то отображения φ_{ev} и φ_{ew} задают вложения группы H_e в группы G_i и G_j соответственно. Следовательно, можно определить древесное произведение $\mathscr{G}$, сопоставив вершине $T_i \in \mathscr{V}$ группу G_i, а ребру $\{T_i, T_j\} \in \mathscr{E}$, соответствующему ребру $e = \{v, w\} \in E'$, — группу H_e и вложения φ_{ev}, φ_{ew}. Построенную таким образом группу $\mathscr{G}$ будем называть *древесным произведением, определяемым множеством* E'.

Нетрудно убедиться в том, что справедливо

Предложение 1 [1]. *Пусть G — древесное произведение, соответствующее некоторому дереву T, и E' — подмножество множества ребер дерева T. Тогда древесное произведение $\mathscr{G}$, определяемое множеством E', имеет то же представление, что и группа G. В частности, группы G и $\mathscr{G}$ изоморфны.*

Пусть в каждой вершинной группе A_v $(v \in V)$ зафиксирована нормальная подгруппа R_v. Систему подгрупп $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in V\}$ будем называть *системой совместимых нормальных подгрупп*, если для любого ребра $e = \{v, w\} \in E$ подгруппы R_v и R_w *H_e-совместимы*, т. е. в группе H_e существует нормальная подгруппа R_e такая, что $R_v \cap H_{vw} = R_e\varphi_{ev}$ и $R_w \cap H_{wv} = R_e\varphi_{ew}$.

Легко видеть, что если $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in V\}$ — система совместимых нормальных подгрупп групп A_v $(v \in V)$, то для любого ребра $e = \{v, w\} \in E$ отображение $\overline{\varphi_{ev}} : H_e/R_e \to H_{vw}R_v/R_v$, переводящее смежный класс hR_e $(h \in H_e)$ в смежный класс $(h\varphi_{ev})R_v$, и отображение $\overline{\varphi_{ew}} : H_e/R_e \to H_{wv}R_w/R_w$, переводящее смежный класс hR_e $(h \in H_e)$ в смежный класс $(h\varphi_{ew})R_w$, корректно определены и являются изоморфизмами подгрупп. Поэтому для того же дерева T наряду с древесным произведением G можно рассматривать древесное произведение

$$G_{\mathscr{R}} = \langle A_v/R_v \ (v \in V);\ H_{vw}R_v/R_v = H_{wv}R_w/R_w \ (\{v, w\} \in E)\rangle$$

групп A_v/R_v $(v \in V)$ с подгруппами $H_{vw}R_v/R_v$ и $H_{wv}R_w/R_w$, объединенными при помощи изоморфизмов $\overline{\varphi_{ev}}$ и $\overline{\varphi_{ew}}$ $(e = \{v, w\} \in E)$.

Непосредственно проверяется, что отображение слов, продолжающее тождественное отображение образующих группы G в группу $G_{\mathscr{R}}$, переводит все определяющие соотношения группы G в равенства, верные в группе $G_{\mathscr{R}}$, и, следовательно, определяет сюръективный гомоморфизм. Таким образом, имеет место

Предложение 2. *Пусть $T = (V, E)$ — дерево, G — соответствующее древесное произведение групп A_v $(v \in V)$ и $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in V\}$ — система совместимых нормальных подгрупп групп A_v $(v \in V)$. Тогда существует сюръективный гомоморфизм $\rho_{\mathscr{R}} : G \to G_{\mathscr{R}}$, действие которого на подгруппах A_v $(v \in V)$ совпадает с действием естественных гомоморфизмов $A_v \to A_v/R_v$.*

Предложение 3. *Пусть $T = (V, E)$ — дерево и G — соответствующее древесное произведение групп A_v $(v \in V)$ с подгруппами H_{vw} и H_{wv}, объединенными при помощи изоморфизмов φ_{ev} и φ_{ew} $(e = \{v, w\} \in E)$. Пусть также* *для каждого ребра $\{v, w\} \in E$ подгруппа H_{vw} является ретрактом в группе A_v и подгруппа H_{wv} является ретрактом в группе A_w. Тогда для любой вершины $u \in V$ и для любой нормальной подгруппы R_u группы A_u существует гомоморфизм группы G на фактор-группу A_u/R_u, продолжающий естественный гомоморфизм группы A_u на данную фактор-группу. В частности, каждая подгруппа B_u группы A_u, являющаяся ретрактом в A_u, оказывается ретрактом и в группе G.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную вершину $u \in V$ и нормальную подгруппу R_u группы A_u. Так как T является деревом, для каждой вершины $v \in V$ существует единственная простая цепь из зафиксированной вершины u в вершину v. Длину указанной цепи будем называть *расстоянием* от вершины u до вершины v.

Построим систему $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in V\}$ совместимых нормальных подгрупп групп A_v $(v \in V)$, воспользовавшись индукцией по расстоянию l от вершины u до вершины v, для которой необходимо определить подгруппу R_v.

Если $l = 0$, то $R_v = R_u$. Пусть теперь $l > 0$ и для всех вершин, находящихся от u на расстоянии, меньшем l, подгруппы уже построены. Пусть вершина v находится от u на расстоянии l, w — непосредственно предшествующая v вершина простой (u, v)-цепи и e — ребро, соединяющее вершины w и v. Тогда w находится от u на расстоянии $l - 1$ и потому в вершинной группе A_w построена совместимая нормальная подгруппа R_w. Найдем в группе A_v нормальную подгруппу R_v такую, что R_w и R_v H_e-совместимы.

Пусть $R_{wv} = R_w \cap H_{wv}$ и $R_{vw} = R_{wv}\varphi_{ew}^{-1}\varphi_{ev}$. Так как H_{vw} — ретракт в группе A_v, существует нормальная подгруппа N_{vw} группы A_v, удовлетворяющая условиям $A_v = H_{vw}N_{vw}$ и $H_{vw} \cap N_{vw} = 1$. Положим $R_v = R_{vw}N_{vw}$ и покажем, что подгруппа R_v искомая.

Сначала убедимся в том, что подгруппа R_v нормальна в группе A_v. Действительно, так как R_w нормальна в группе A_w, то R_{wv} нормальна в H_{wv} и, следовательно, R_{vw} нормальна в H_{vw}. Кроме того, N_{vw} нормальна в A_v. Поэтому

$$R_v^{A_v} = (R_{vw}N_{vw})^{A_v} = R_{vw}^{A_v}N_{vw} = R_{vw}^{H_{vw}N_{vw}}N_{vw} = R_{vw}^{N_{vw}}N_{vw}.$$

Из нормальности подгруппы N_{vw} в группе A_v следует также, что $[R_{vw}, N_{vw}] \subseteq N_{vw}$. Поэтому $R_{vw}^{N_{vw}} \subseteq R_{vw}N_{vw} = R_v$. Таким образом, $R_v^{A_v} \subseteq R_vN_{vw} = R_v$, и, значит, R_v — нормальная подгруппа группы A_v.

Покажем, что подгруппы R_w и R_v H_e-совместимы, т. е. в группе H_e существует нормальная подгруппа R_e такая, что $R_w \cap H_{wv} = R_e\varphi_{ew}$ и $R_v \cap H_{vw} = R_e\varphi_{ev}$. Действительно, положим $R_e = R_{wv}\varphi_{ew}^{-1}$. Тогда $R_w \cap H_{wv} = R_{wv} = R_e\varphi_{ew}$ и $R_{vw} = R_{wv}\varphi_{ew}^{-1}\varphi_{ev} = R_e\varphi_{ev}$. Как отмечено выше, подгруппа R_{wv} нормальна в H_{wv} и потому подгруппа R_e нормальна в H_e. Остается показать, что $R_v \cap H_{vw} = R_{vw}$.

Так как $R_v = R_{vw}N_{vw}$, то $R_{vw} \subseteq R_v \cap H_{vw}$. Справедливость обратного включения вытекает из равенства $H_{vw} \cap N_{vw} = 1$. В самом деле, если $h \in R_v \cap H_{vw}$, то $h = h_1h_2$ для некоторых элементов $h_1 \in R_{vw}$, $h_2 \in N_{vw}$. Ввиду включения $R_{vw} \subseteq H_{vw}$ отсюда следует, что $h_2 = h_1^{-1}h \in H_{vw} \cap N_{vw} = 1$ и $h = h_1 \in R_{vw}$.

Таким образом, подгруппа R_v оказывается определенной для каждой вершины v, находящейся от u на расстоянии l, а значит, и для любой вершины $v \in V$.

Для того же дерева T и построенной системы $\mathscr{R}$ совместимых нормальных подгрупп вершинных групп наряду с древесным произведением G можно рассматривать древесное произведение $G_{\mathscr{R}}$ фактор-групп A_v/R_v $(v \in V)$ с подгруппами $H_{vw}R_v/R_v$ и $H_{wv}R_w/R_w$, объединенными при помощи изоморфизмов $\overline{\varphi_{ev}}$ и $\overline{\varphi_{ew}}$ $(e = \{v, w\} \in E)$. В силу предложения 2 существует сюръективный гомоморфизм $\rho_{\mathscr{R}} : G \to G_{\mathscr{R}}$, действие которого на подгруппах A_v $(v \in V)$ совпадает с действием естественных гомоморфизмов $A_v \to A_v/R_v$.

Покажем, что для каждой вершины $v \in V$ имеет место включение $A_v\rho_{\mathscr{R}} \subseteq A_u\rho_{\mathscr{R}}$. Будем рассуждать индукцией по расстоянию l от вершины u до вершины v. Если $l = 0$, утверждение очевидно. Поэтому будем считать, что $l > 0$, w — непосредственно предшествующая v вершина простой (u, v)-цепи, e — ребро, соединяющее w с v, и $A_w\rho_{\mathscr{R}} \subseteq A_u\rho_{\mathscr{R}}$. Так как $A_v = H_{vw}N_{vw}$, произвольный элемент $a \in A_v$ представим в виде $a = hb$ для подходящих $h \in H_{vw}$ и $b \in N_{vw}$. Ввиду того, что действие гомоморфизма $\rho_{\mathscr{R}}$ на вершинной группе A_v совпадает с действием естественного гомоморфизма $A_v \to A_v/R_v$ и $N_{vw} \subseteq R_v$ по построению подгруппы R_v, получаем, что $a\rho_{\mathscr{R}} = h\rho_{\mathscr{R}}$. Следовательно, $A_v\rho_{\mathscr{R}} = H_{vw}\rho_{\mathscr{R}}$. Так как гомоморфизм $\rho_{\mathscr{R}}$ переводит все определяющие соотношения группы G в верные равенства, $x\varphi_{ew}\rho_{\mathscr{R}} = x\varphi_{ev}\rho_{\mathscr{R}}$ для каждого $x \in H_e$.

Отсюда $H_{wv}\rho_{\mathscr{R}} = H_{vw}\rho_{\mathscr{R}}$ и, значит, $A_v\rho_{\mathscr{R}} = H_{wv}\rho_{\mathscr{R}} \subseteq A_w\rho_{\mathscr{R}} \subseteq A_u\rho_{\mathscr{R}}$.

Из доказанного вытекает, что $G_{\mathscr{R}} \subseteq A_u\rho_{\mathscr{R}}$ и потому $G_{\mathscr{R}} = A_u/R_u$. Следовательно, $\rho_{\mathscr{R}}$ — искомый гомоморфизм.

В частности, если B_u — ретракт в A_u, то гомоморфизм группы A_u на группу B_u, действующий на подгруппе B_u тождественно, может быть продолжен до гомоморфизма группы G на группу B_u. Значит, подгруппа B_u является ретрактом и в группе G. Предложение доказано.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Сначала предположим, что дерево T конечно. Для этого случая доказательство проведем индукцией по количеству ребер в T.

Если в дереве T нет ни одного ребра, т. е. T состоит только из одной вершины, то древесное произведение G совпадает с единственной вершинной группой, которая согласно условию $\mathscr{K}$-аппроксимируема. Покажем, что если для дерева T, содержащего не более чем n ребер, древесное произведение G $\mathscr{K}$-аппроксимируемо, то это утверждение справедливо и в случае, когда количество ребер равно $n + 1$.

Зафиксируем некоторую концевую вершину v дерева T и единственное инцидентное вершине v ребро $e = \{v, w\}$. Пусть T_e — поддерево исходного дерева T, получающееся при удалении из дерева T ребра e вместе с вершиной v, и G_e — соответствующее поддереву T_e древесное произведение. Согласно индуктивному предположению группа G_e $\mathscr{K}$-аппроксимируема. В силу предложения 3 реберная подгруппа H_{wv} служит ретрактом в древесном произведении G_e. Следовательно, определяемое ребром e древесное произведение $\mathscr{G}$ является свободным произведением $\mathscr{K}$-аппроксимируемых групп A_v и G_e с объединенными ретрактами, а потому — $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группой ввиду теоремы 1. Остается заметить, что согласно предложению 1 исходное древесное произведение G изоморфно группе $\mathscr{G}$.

Пусть T — бесконечное дерево и g — произвольный отличный от 1 элемент группы G. Для завершения доказательства покажем, что существует гомоморфизм группы G на $\mathscr{K}$-аппроксимируемую группу, переводящий g в неединичный элемент. Понятно, что каждый такой гомоморфизм может быть продолжен до гомоморфизма группы G на группу из класса $\mathscr{K}$, действующего на элементе

g аналогичным образом.

Пусть ω — некоторое слово, определяющее элемент g. Обозначим через T_0 наименьшее поддерево дерева T, совокупность вершинных групп которого содержит все образующие группы G, соответствующие символам слова ω. Очевидно, что дерево T_0 конечно.

Пусть G_0 — соответствующее дереву T_0 древесное произведение. Тогда в силу рассмотренного выше случая конечного дерева группа G_0 $\mathscr{K}$-аппроксимируема. Как отмечено выше, G_0 можно считать подгруппой в G, при этом $g \in G_0$ согласно построению.

Пусть E' — множество всех ребер дерева T, каждое из которых соединяет некоторую вершину из поддерева T_0 с некоторой вершиной, не содержащейся в T_0. Пусть также $\{T_i \mid i \in I\}$ — разбиение дерева T на поддеревья, соответствующее множеству E', $\mathscr{T} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ и $\mathscr{G}$ — дерево и древесное произведение соответственно, определяемые множеством E'. Легко видеть, что $\mathscr{T}$ — звезда, центральной вершиной которой является поддерево T_0.

Пусть $\{T_0, T_i\} \in \mathscr{E}$ — произвольное ребро звезды $\mathscr{T}$ и e — соответствующее ему ребро из множества E', соединяющее некоторую вершину v поддерева T_0 с некоторой вершиной w поддерева T_i. Тогда так как подгруппа H_{vw} является ретрактом в A_v и подгруппа H_{wv} является ретрактом в A_w, в силу предложения 3 H_{vw} — ретракт в G_0 и H_{wv} — ретракт в G_i.

Следовательно, группа $\mathscr{G}$ представляет собой древесное произведение с объединенными ретрактами. Очевидно, что G_0 является ретрактом в G_0, поэтому снова в силу предложения 3 G_0 — ретракт в $\mathscr{G}$. Согласно предложению 1 группы G и $\mathscr{G}$ изоморфны. Таким образом, существует гомоморфизм группы G на группу G_0, действующий на подгруппе G_0 тождественно и, следовательно, являющийся искомым. Теорема доказана.

§ 4. Некоторые утверждения о корневых классах групп и аппроксимируемости ими

Всюду в этом параграфе если $\mathscr{K}$ — корневой класс групп и X — некоторая группа, то через $\mathscr{K}^*(X)$ будем обозначать множество всех таких нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathscr{K}$. Понятно, что группа X аппроксимируется классом $\mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда пересечение всех подгрупп семейства $\mathscr{K}^*(X)$ тривиально.

Предложение 4. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный корневой класс групп и X — некоторая группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Пересечение конечного числа подгрупп семейства $\mathscr{K}^*(X)$ снова является подгруппой данного семейства.*

2. *Если X — конечная $\mathscr{K}$-аппроксимируемая группа, то она принадлежит классу $\mathscr{K}$.*

Доказательство. Действительно, если N_1, N_2, …, N_k — подгруппы семейства $\mathscr{K}^*(X)$, то по теореме Ремака фактор-группа $X/(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k)$ вкладывается в прямое произведение фактор-групп X/N_1, X/N_2, …, X/N_k и в силу замкнутости класса $\mathscr{K}$ относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей принадлежит этому классу.

Пусть X — конечная $\mathscr{K}$-аппроксимируемая группа. Если $X = 1$, включение $X \in \mathscr{K}$ очевидно. Если $X \neq 1$, выберем для каждого неединичного элемента $x \in X$ не содержащую его подгруппу $N_x \in \mathscr{K}^*(X)$ и обозначим через N пересечение всех таких подгрупп. Тогда $N = 1$ и в силу утверждения 1 справедливо включение $N \in \mathscr{K}^*(X)$. Таким образом, $X \in \mathscr{K}$. Предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс, состоящий из периодических групп. Пусть также P — свободное произведение циклической группы A и абелевой группы B с подгруппами $H \leq A$ и $K \leq B$, объединенными относительно некоторого изоморфизма $\varphi : H \to K$, причем $K \neq B$ и $[A : H] < \infty$. Если группа P $\mathscr{K}$-аппроксимируема, то $[A : H] \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$.*

Доказательство. Пусть группа P $\mathscr{K}$-аппроксимируема и группа A порождается элементом a и $t = [A : H]$. Если $t = 1$, утверждение предложения очевидно. Поэтому далее будем считать, что $t > 1$.

Предположим, что существует целое число $s \in [1; t-1]$ такое, что $a^s \in HN$ для любой подгруппы $N \in \mathscr{K}^*(P)$. Так как $K \neq B$, найдется элемент $b \in B \setminus K$. Рассмотрим элемент $c = [a^s, b]$. Он имеет в группе P несократимую запись длины 4 и, следовательно, отличен от 1 [26, теорема 4.4]. В то же время для каждой подгруппы $N \in \mathscr{K}^*(P)$ найдется такой элемент $h \in H$, что $a^s \equiv h \pmod N$ и потому в силу абелевости группы B $c \equiv [h, b] = 1 \pmod N$. Это противоречит $\mathscr{K}$-аппроксимируемости группы P.

Значит, для любого числа $s \in \{1, \ldots, t-1\}$ найдется подгруппа $N_s \in \mathscr{K}^*(P)$, удовлетворяющая условию $a^s \notin HN_s$. Положим $N = \bigcap_{s=1}^{t-1} N_s$. Тогда по предложению 4 $N \in \mathscr{K}^*(P)$ и, как легко видеть, $N \cap A \subseteq H$.

Так как $A/(N \cap A) \cong AN/N \leq P/N \in \mathscr{K}$ и класс $\mathscr{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп, $A/(N \cap A) \in \mathscr{K}$. Поскольку $\mathscr{K}$ состоит из периодических групп, циклическая группа $A/(N \cap A)$ конечна и, следовательно, все простые делители ее порядка принадлежат множеству $\pi(\mathscr{K})$. Так как $N \cap A \leq H \leq A$, то $[A : H]$ делит $[A : N \cap A]$. Поэтому $[A : H] \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$. Предложение доказано.

Предложение 6. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный корневой класс групп. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Произвольная свободная группа $\mathscr{K}$-аппроксимируема* [4, теорема 1].
2. *Свободное произведение произвольного семейства $\mathscr{K}$-аппроксимируемых групп, в свою очередь, аппроксимируется классом $\mathscr{K}$* [2, 4].
3. *Произвольное расширение $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathscr{K}$-группы аппроксимируется классом $\mathscr{K}$* [2, лемма 1.5].

Если корневой класс $\mathscr{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то в силу своей замкнутости относительно взятия подгрупп он включает и бесконечную циклическую группу. Поэтому непосредственно из предложения 6 вытекает

Предложение 7. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп, содержащий хотя бы одну непериодическую группу. Тогда произвольное расширение $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы при помощи бесконечной циклической группы снова является $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группой. В частности, произвольное расширение свободной группы при помощи бесконечной циклической группы $\mathscr{K}$-аппроксимируемо.*

Предложение 8. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный корневой класс групп. Конечная разрешимая группа содержится в классе $\mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда ее порядок принадлежит множеству $\mathscr{Z}(\mathscr{K})$.*

Доказательство. Необходимость условия следует из определения множества $\mathscr{Z}(\mathscr{K})$. Проверим достаточность.

Пусть X — конечная разрешимая группа и ее порядок q принадлежит множеству $\mathscr{Z}(\mathscr{K})$. Известно, что группа X обладает субнормальным рядом с циклическими факторами простых порядков. Так как каждый из этих порядков делит q и $q \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$, все они содержатся в множестве $\pi(\mathscr{K})$. Отсюда, из определения множества $\pi(\mathscr{K})$, теоремы Силова и наследственности класса $\mathscr{K}$ следует, что последнему принадлежат все факторы указанного ряда. Поэтому в силу замкнутости класса $\mathscr{K}$ относительно взятия расширений $X \in \mathscr{K}$. Предложение доказано.

§ 5. Аппроксимируемость корневыми классами двупорожденных групп Артина и Коксетера

Для доказательства критерия аппроксимируемости произвольным корневым классом двупорожденной группы Артина потребуются два вспомогательных утверждения, приводимые далее.

Предложение 9. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный корневой класс групп, m — целое число, большее 1, и $G = \langle x, y;\ x^m = y^2 \rangle$.*

1. *Если класс $\mathscr{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема.*

2. *Если класс $\mathscr{K}$ состоит из периодических групп, то группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $m \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$ и $2 \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что группа G представляет собой свободное произведение бесконечных циклических групп $X = \langle x \rangle$ и $Y = \langle y \rangle$ с объединенными подгруппами, порождаемыми элементами x^m и y^2. Поэтому необходимость в утверждении 2 следует из предложения 5.

Рассмотрим отображение образующих группы G в бесконечную циклическую группу с порождающим z, действующее по правилу $x \mapsto z^2$, $y \mapsto z^m$. Будучи продолженным до отображения слов, оно переводит определяющее соотношение группы G в верное равенство и потому задает гомоморфизм σ, действующий, очевидно, инъективно на свободных множителях X и Y. Отсюда ввиду теоремы Нейманн [27] вытекает, что ядро гомоморфизма σ является свободной группой. Таким образом, группа G представляет собой расширение свободной группы при помощи бесконечной циклической группы, и, следовательно, утверждение 1 имеет место в силу предложения 7.

Докажем достаточность в утверждении 2. Для этого возьмем произвольный элемент $g \in G \setminus 1$ и укажем гомоморфизм группы G на $\mathscr{K}$-аппроксимируемую группу, переводящий g в неединичный элемент.

Обозначим через H бесконечную циклическую подгруппу группы G, порожденную элементом x^m (или, что то же самое, элементом y^2) и заметим, что она лежит в центре G. Если $g \in H$, искомым будет построенный выше гомоморфизм σ, поскольку он действует инъективно на подгруппе H, а группа $G\sigma$ является бесконечной циклической и, следовательно, аппроксимируется классом $\mathscr{K}$ согласно предложению 6. Если элемент g не лежит в подгруппе H, то он остается отличным от 1 при естественном гомоморфизме ρ группы G на фактор-группу G/H. Последняя имеет представление $\langle x, y;\ x^m = 1,\ y^2 = 1 \rangle$ и потому оказывается свободным произведением конечных циклических групп $X_m = \langle x;\ x^m = 1 \rangle$ и $Y_2 = \langle y;\ y^2 = 1 \rangle$. Так как $m \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$ и $2 \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$, в силу предложения 8 группы X_m и Y_2 принадлежат классу $\mathscr{K}$. Значит, согласно предложению 6 их свободное произведение аппроксимируется данным классом, и ρ — искомый гомоморфизм. Предложение доказано.

Предложение 10. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный корневой класс групп, k — положительное целое число и $G = \langle x, y;\ x^{-1}y^k x = y^k\rangle$.*

1. *Если класс $\mathscr{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема.*

2. *Если класс $\mathscr{K}$ состоит из периодических групп, то группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $k \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$.*

Доказательство. Воспользуемся той же схемой рассуждений, что и при доказательстве предложения 9.

Группа G представляет собой HNN-расширение бесконечной циклической группы $Y = \langle y\rangle$ с проходной буквой x и совпадающими связанными подгруппами, порожденными элементом y^k. Добавляя к представлению G новый образующий z и определяющее соотношение $z = y^k$, получаем представление

$$G = \langle x, y, z;\ z = y^k,\ x^{-1}zx = z\rangle,$$

из которого видно, что группа G одновременно является свободным произведением той же группы Y и свободной абелевой группы $\langle x, z;\ [z, x] = 1\rangle$ с объединенными подгруппами, порожденными элементами y^k и z. Поэтому, как и при доказательстве предложения 9, необходимость в утверждении 2 следует из предложения 5.

Естественный гомоморфизм σ группы G на ее фактор-группу по нормальному замыканию элемента x действует инъективно на базовой группе Y. Согласно теореме о строении подгрупп HNN-расширений [28] это означает, что ядро гомоморфизма σ является свободной группой. Поскольку образ G относительно σ — бесконечная циклическая группа, отсюда и из предложения 7 сразу вытекает утверждение 1.

Проверка достаточности в утверждении 2 почти дословно повторяет аналогичное рассуждение из доказательства предложения 9. Возьмем произвольный элемент $g \in G\backslash 1$, обозначим через H циклическую подгруппу, порожденную элементом y^k, и укажем гомоморфизм группы G на $\mathscr{K}$-аппроксимируемую группу, переводящий g в неединичный элемент, рассмотрев два случая: $g \in H$ и $g \notin H$. Если $g \in H$, искомым оказывается определеный выше гомоморфизм σ, так как он действует инъективно на H и отображает G на бесконечную циклическую группу. Если $g \notin H$, заметим, что подгруппа H лежит в центре G, и рассмотрим естественный гомоморфизм ρ группы G на фактор-группу

$$G/H = \langle x, y;\ x^{-1}y^k x = y^k,\ y^k = 1\rangle = \langle x, y;\ y^k = 1\rangle,$$

представляющую собой свободное произведение бесконечной циклической группы $X = \langle x\rangle$ и конечной циклической группы $Y_k = \langle y;\ y^k = 1\rangle$. Группа X аппроксимируется классом $\mathscr{K}$ в силу предложения 6, группа Y_k принадлежит указанному классу ввиду предложения 8, поскольку $k \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$. Следовательно, снова в силу предложения 6 группа G/H $\mathscr{K}$-аппроксимируема и, так как $g\rho = gH \neq 1$, гомоморфизм ρ оказывается искомым. Предложение доказано.

Предложение 11. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный корневой класс групп, m — целое число, большее 1, и $G = \langle a, b;\ \langle ab\rangle^m = \langle ba\rangle^m\rangle$ — двупорожденная группа Артина.*

1. *Если класс $\mathscr{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема.*

2. *Пусть класс $\mathscr{K}$ состоит только из периодических групп.*

(i) *Если m четно, то группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $m/2 \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$.*

(ii) *Если m нечетно, то группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $m \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$ и $2 \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$.*

Доказательство. Известно [29, лемма 9], что группа G изоморфна группе $\langle x, y;\ x^m = y^2\rangle$, если число m нечетно, и группе $\langle x, y;\ x^{-1}y^k x = y^k\rangle$, где $k = m/2$, если m четно. Первый из указанных изоморфизмов задается отображением $a \mapsto x^{l+1}y^{-1}$, $b \mapsto yx^{-l}$, где $l = (m-1)/2$, второй — отображением $a \mapsto x^{-1}y$, $b \mapsto x$. Поэтому требуемое утверждение вытекает из предложений 9 и 10. Предложение доказано.

Предложение 12. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный корневой класс групп, m — целое число, большее 1, и $G = \langle a, b;\ a^2 = 1,\ b^2 = 1,\ (ab)^m = 1\rangle$ — двупорожденная группа Коксетера. Группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $m \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$ и $2 \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$.*

Доказательство. Добавим к представлению группы G образующие x, y и определяющие соотношения $x = a$, $y = ab$. Тогда $b = xy$. Заменив во всех соотношениях группы G образующие a и b их выражениями через x и y, удалим из представления группы G образующие a, b и соотношения $a = x$, $b = xy$. В результате получим

$$G = \langle x, y;\ x^2 = 1,\ y^m = 1,\ (xy)^2 = 1\rangle.$$

Используя равенство $x = x^{-1}$, это представление можно переписать в виде

$$G = \langle x, y;\ x^2 = 1,\ y^m = 1,\ x^{-1}yx = y^{-1}\rangle.$$

Известно (см., например, [26, § 1.2]), что порядок группы G конечен и равен $2m$. В силу предложения 4 отсюда, в частности, следует, что группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она принадлежит классу $\mathscr{K}$. Кроме того, из соотношения $x^{-1}yx = y^{-1}$ вытекает, что циклическая подгруппа Y, порожденная элементом y, нормальна в G. Так как $G/Y \cong \mathbb{Z}_2$, группа G конечная полициклическая. В силу предложения 8 $G \in \mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда $m \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$ и $2 \in \mathscr{Z}(\mathscr{K})$. Предложение доказано.

§ 6. Доказательства следствий 1 и 2

Пусть

$$G = \langle a_v\ (v \in V);\ \langle a_v a_w\rangle^{m_e} = \langle a_w a_v\rangle^{m_e}\ (e = \{v, w\} \in E)\rangle,$$
$$\overline{G} = \big\langle a_v\ (v \in V);\ a_v^2 = 1\ (v \in V),\ (a_v a_w)^{m_e} = 1\ (e = \{v, w\} \in E)\big\rangle$$

и граф $T = (V, E)$ является деревом. Построим по дереву T граф $\mathscr{T}$, разбивая каждое ребро дерева T на два новой вершиной. Более формально множество вершин графа $\mathscr{T}$ совпадает с $V \cup E$, а ребрами служат всевозможные множества вида $\{e, v\}$, где $e \in E$, $v \in e$.

Очевидно, что граф $\mathscr{T}$ также является деревом. Построим по нему и группе G (группе $\overline{G}$) древесное произведение групп следующим образом.

Вершине $v \in V$, унаследованной от исходного дерева T, сопоставим циклическую группу G_v, порожденную образующим a_v (бесконечную для группы

Артина и порядка 2 для группы Коксетера). Вновь добавленной вершине, соответствующей ребру $e = \{v, w\} \in E$ дерева T, сопоставим группу G_e, представляющую собой двупорожденную группу Артина

$$\langle a_v, a_w;\ \langle a_v a_w\rangle^{m_e} = \langle a_w a_v\rangle^{m_e}\rangle$$

или двупорожденную группу Коксетера

$$\Big\langle a_v, a_w;\ a_v^2 = 1,\ a_w^2 = 1,\ (a_v a_w)^{m_e} = 1\Big\rangle$$

соответственно. Наконец, ребру ε, соединяющему вершины $e \in E$ и $v \in e$, сопоставим группу $H_\varepsilon = G_v$ и вложения $\varphi_{\varepsilon v} : H_\varepsilon \to G_v$, $\varphi_{\varepsilon e} : H_\varepsilon \to G_e$, продолжающие тождественные отображения образующего a_v.

Легко видеть, что построенное таким образом древесное произведение совпадает с исходной группой Артина (Коксетера).

Заметим, что естественный гомоморфизм группы G_e ($e = \{v, w\} \in E$) на ее фактор-группу по нормальному замыканию элемента $a_v a_w^{-1}$ переводит G_e на каждую из подгрупп $H_\varepsilon\varphi_{\varepsilon e}$ и $H_\delta\varphi_{\delta e}$, где $\varepsilon = \{e, v\}$, $\delta = \{e, w\}$, действуя на указанных подгруппах тождественно. Следовательно, подгруппы $H_\varepsilon\varphi_{\varepsilon e}$ и $H_\delta\varphi_{\delta e}$ — ретракты в группе G_e. Заметим также, что для каждого ребра $\varepsilon = \{e, v\}$ подгруппа $H_\varepsilon\varphi_{\varepsilon v}$ совпадает с группой G_v и, в частности, является ретрактом в ней. Поэтому утверждения следствий 1 и 2 вытекают из теоремы 2 и предложений 11 и 12.

§ 7. Доказательство теоремы 3

Пусть B_i для каждого $i \in \mathbb{Z}$ обозначает изоморфную копию группы B и $\sigma_i : B \to B_i$ — соответствующий изоморфизм. Определим древесное произведение G групп B_i, взяв в качестве дерева бесконечную цепь, вершины которой занумерованы последовательными целыми числами, и сопоставив вершине $i \in \mathbb{Z}$ группу B_i, а ребру $\{i,\ i+1\}$ ($i \in \mathbb{Z}$) — группу H и вложения $\alpha_i : H \to B_i$, $\beta_i : H \to B_{i+1}$, где α_i — сужение на подгруппу H изоморфизма σ_i, β_i — композиция изоморфизма φ и сужения на подгруппу K изоморфизма σ_{i+1}. Отметим, что тогда в группе G для любых элемента $h \in H$ и числа $i \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство $h\sigma_i = h\varphi\sigma_{i+1}$.

Поскольку подгруппы H и K являются ретрактами в группе B, образы подгруппы H относительно вложений α_i и β_i будут ретрактами в группах B_i и B_{i+1} соответственно для каждого $i \in \mathbb{Z}$. Следовательно, древесное произведение G аппроксимируется классом $\mathscr{K}$ в силу теоремы 2.

Используя метод Рейдемейстера — Шрейера (см., например, [26, § 2.3]), нетрудно показать, что нормальное замыкание подгруппы B в группе X имеет то же представление, что и группа G (подгруппа B_i группы G при этом соответствует подгруппе t^iBt^{-i} группы X). Таким образом, группа X оказывается расширением $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы G при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом t, и, следовательно, аппроксимируется классом $\mathscr{K}$ согласно предложению 7. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Karras A., Solitar D.* The subgroups of a free products of two groups with an amalgamated subgroup // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 150. P. 227–254.
2. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.

3. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. V. 43. P. 856–860.

4. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. № 5. С. 6–10.

5. *Raptis E., Varsos D.* The residual finiteness of HNN-extensions and generalized free products of nilpotent groups: A characterization // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1992. V. 53. P. 408–420.

6. *Азаров Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 1. С. 3–8.

7. *Aschenbrenner M., Friedl S.* A criterion for HNN extensions of finite p-groups to be residually p // J. Pure Appl. Algebra. 2011. V. 215. P. 2280–2289.

8. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1203–1215.

9. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 605–614.

10. *Tieudjo D.* On root-class residuality of some free constructions // JP J. Algebra, Number Theory Appl. 2010. V. 18, N 2. P. 125–143.

11. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Модел. и анализ информ. систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 133–137.

12. *Гольцов Д. В.* О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, № 3. С. 34–41.

13. *Туманова Е. А.* Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, № 3. С. 134–141.

14. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148–180.

15. *Гольцов Д. В.* Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 665–669.

16. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.

17. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.

18. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага — Солитэра // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 700–709.

19. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами // Мат. заметки. 2017. Т. 102, № 4. С. 597–612.

20. *Boler J., Evans B.* The free product of residually finite groups amalgamated along retracts is residually finite // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 37, N 1. P. 50–52.

21. *Bobrovskii P. A., Sokolov E. V.* The cyclic subgroup separability of certain generalized free products of two groups // Algebra Colloq. 2010. V. 17, N 4. P. 577–582.

22. *Азаров Д. Н., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2008. № 6. С. 29–42.

23. *Appel K., Schupp P.* Artin groups and infinite Coxeter groups // Invent. Math. 1983. V. 72. P. 201–220.

24. *Безверхний В. Н., Инченко О. В.* Проблемы равенства и сопряженности в группах Коксетера с древесной структурой // Чебышевский сб. 2005. Т. 6, № 2. С. 81–90.

25. *Magnus W.* Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring // Math. Ann. 1935. V. 111. P. 259–280.

26. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

27. *Neumann H.* Generalized free products with amalgamated subgroups. II // Amer. J. Math. 1949. V. 31. P. 491–540.

28. *Karras A., Solitar D.* Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Can. J. Math. 1971. V. 23. P. 627–643.

29. *Безверхний В. Н.* Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Коксетера большого типа // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвузовск. сб. науч. тр. Тула: Тул. гос. пед. ин-т им. Л. Н. Толстого, 1986. С. 26–61.

Поступила в редакцию 8 октября 2018 г.
После доработки 14 января 2019 г.
Принята к публикации 12 марта 2019 г.

Туманова Елена Александровна
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
helenfog@bk.ru