Известия вузов. Математика
2020, №12, с. 41–50
https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Е.А. ТУМАНОВА

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ НЕКОТОРЫХ HNN-РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

Аннотация. Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп и G — HNN-расширение некоторой группы B с подгруппами H и K, связанными при помощи изоморфизма $\varphi\colon H \to K$. Получены достаточные условия аппроксимируемости группы G классом $\mathcal{K}$ при условии, что множество $\{h^{-1}(h\varphi) \mid h \in H\}$ является нормальной подгруппой в B или существует автоморфизм α группы B такой, что $H\alpha = K$. В частности, указаны достаточные условия аппроксимируемости группы G разрешимыми, периодическими разрешимыми и конечными разрешимыми группами в случае, когда группа B аппроксимируется нильпотентными группами, а подгруппы H и K являются циклическими и отображаются друг на друга некоторым автоморфизмом группы B.

Ключевые слова: HNN-расширение, аппроксимируемость корневыми классами, финитная аппроксимируемость, аппроксимируемость конечными p-группами, аппроксимируемость разрешимыми группами.

УДК: 512.543

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-12-41-50

Введение

Пусть $\mathcal{L}$ — некоторый класс групп. Говорят, что группа X *аппроксимируется классом* $\mathcal{L}$ (или является $\mathcal{L}$-*аппроксимируемой*), если для каждого неединичного элемента $x \in X$ найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-группу) такой, что $x\sigma \neq 1$.

При исследовании аппроксимируемости конструкции HNN-расширения основным является вопрос о наследовании ею данного свойства от базовой группы (используемая здесь и далее терминология, касающаяся HNN-расширений, согласована с монографией [1]). Наибольшее количество результатов такого рода получено при изучении аппроксимируемости корневыми классами групп (см., например, [2]–[9]).

Напомним, что согласно [10] нетривиальный (т. е. содержащий хотя бы одну неединичную группу) класс групп $\mathcal{K}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяет следующему условию: для любой группы X и любого субнормального ряда $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ этой группы из соотношений $X/Y \in \mathcal{K}$ и $Y/Z \in \mathcal{K}$ вытекает существование такой нормальной подгруппы T группы X, что $X/T \in \mathcal{K}$ и $T \leqslant Z$. Равносильные определения корневого класса указаны в [11] (см. предложение 6 ниже). Установлено, в частности, что класс групп является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп

Поступила в редакцию 13.01.2020, после доработки 28.04.2020. Принята к публикации 29.06.2020.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00187.

и расширений, а также вместе с любыми двумя группами X, Y содержит декартово произведение $\prod_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$. Отсюда легко следует, что пересечение любого числа корневых классов — снова корневой класс. Конкретными примерами корневых классов могут служить классы всех разрешимых групп, всех конечных групп, периодических π-групп конечного периода (где π — непустое множество простых чисел), всех групп без кручения, а также их нетривиальные пересечения.

Изучение аппроксимируемости не каким-то конкретным, а произвольным корневым классом групп (удовлетворяющим, возможно, некоторым дополнительным ограничениям) позволяет доказать сразу несколько утверждений, используя одну последовательность рассуждений. Для HNN-расширений первые результаты такого рода получены в [12] путем адаптации методов из [13]. Последующие исследования аппроксимируемости HNN-расширений произвольным корневым классом групп проводились при различных ограничениях, накладываемых на связанные подгруппы. В [14] изучались HNN-расширения с совпадающими связанными подгруппами, в [15]–[18] — HNN-расширения со связанными подгруппами, лежащими в центре базовой группы. В частности, в [16], [17] полностью решен вопрос об аппроксимируемости корневым классом, замкнутым относительно взятия фактор-групп, HNN-расширения с центральными циклическими связанными подгруппами. Кроме того, в [19] получено достаточное условие аппроксимируемости корневым классом групп HNN-расширения, связанные подгруппы которого являются ретрактами базовой группы.

В настоящей статье на базовую группу и связанные подгруппы также накладываются определенные ограничения, позволяющие в конечном итоге свести рассматриваемую задачу к использованию некоторых из перечисленных выше результатов. В разделе 1 приводятся формулировки новых теорем и следствий, раздел 2 содержит некоторые вспомогательные утверждения, в разделе 3 производится доказательство всех основных результатов работы.

1. Формулировка результатов

Пусть всюду далее $G = \langle B, t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi\rangle$ — HNN-расширение некоторой группы B с проходной буквой t и подгруппами H и K, связанными при помощи изоморфизма $\varphi\colon H \to K$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $L = \{h^{-1}(h\varphi) \mid h \in H\}$ и существует гомоморфизм σ группы B на группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $\ker\sigma \cap H = 1 = \ker\sigma \cap K$, $H\sigma \cap K\sigma = 1$ и множество $L\sigma$ является нормальной подгруппой группы $B\sigma$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Существует гомоморфизм τ группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах H и K, и, если группа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то и группа G является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой.*

2. *Пусть подгруппа $L\sigma$ изолирована в группе $B\sigma$. Тогда образ гомоморфизма τ можно считать группой без кручения и, если группа B аппроксимируется $\mathcal{K}$-группами без кручения, то и группа G аппроксимируется $\mathcal{K}$-группами без кручения.*

В качестве комментария к формулировкам теоремы 1 и приводимых далее теорем 2 и 3 отметим, что при изучении аппроксимируемости свободных конструкций групп произвольным корневым классом $\mathcal{K}$ наличие гомоморфизма на $\mathcal{K}$-группу, инъективного на связанных (или объединенных в случае обобщенного свободного произведения) подгруппах нередко оказывается более важным, нежели просто $\mathcal{K}$-аппроксимируемость (см, например, [14], [18], [20], [21]). Если указанные подгруппы конечны, то существование такого гомоморфизма свободной конструкции равносильно ее аппроксимируемости (см. предложение 2 ниже). В общем случае, однако, это не так; данный вопрос подробно обсуждается в [22].

Следуя [23], будем говорить, что группа имеет *конечный ранг Гирша–Зайцева*, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является периодической или бесконечной циклической группой.

Следствие 1. Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $H \cap K = 1$ и множество $L = \{h^{-1}(h\varphi) \mid h \in H\}$ является нормальной подгруппой группы B. Группа G аппроксимируется классом $\mathcal{K}$, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) $B \in \mathcal{K}$;

2) группа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема, подгруппы H и K конечны;

3) группа B аппроксимируется $\mathcal{K}$-группами без кручения, подгруппа, порожденная множеством $H \cup K$, имеет конечный ранг Гирша–Зайцева.

Отметим, что если подгруппы H и K лежат в центре группы B, то множество $L = \{h^{-1}(h\varphi) \mid h \in H\}$ оказывается центральной подгруппой данной группы. Поэтому следствие 1 обобщает основные результаты работы [15].

Если подгруппы H и K нормальны в группе B и $H \cap K = 1$, то $[H, K] = 1$ и множество L вновь оказывается подгруппой. Легко видеть, что эта подгруппа нормальна в группе B тогда и только тогда, когда для каждого элемента $b \in B$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\hat{b}|_H"'] & K \arrow[d, "\hat{b}|_K"] \\ H \arrow[r, "\varphi"'] & K \end{tikzcd}$$

(здесь $\hat{b}$ — внутренний автоморфизм группы B, производимый элементом b).

Отметим также, что если подгруппы H и K нормальны в группе B, то подгруппа, порожденная множеством $H \cup K$, совпадает с произведением HK и потому имеет конечный ранг Гирша–Зайцева тогда и только тогда, когда этим свойством обладают подгруппы H и K.

Более конкретным примером применения теоремы 1 служит

Следствие 2. Пусть B — разрешимая группа, H и K — тривиально пересекающиеся циклические подгруппы, порождаемые элементами h и $k = h\varphi$. Пусть также $[h, k] = 1$ и циклическая подгруппа L, порожденная элементом $h^{-1}k$, нормальна в группе B. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) группа G аппроксимируется разрешимыми группами;

2) если группа B финитно аппроксимируема, подгруппы H и K конечны, то группа G аппроксимируется конечными разрешимыми группами;

3) если группа B не имеет кручения и подгруппа L изолирована в ней, то группа G аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.

Во всех сформулированных выше утверждениях предполагалось, что $H \cap K = 1$. В приводимых далее теоремах и следствиях на подгруппы H и K накладывается другое ограничение: они должны быть циклическими и отображаться друг на друга некоторым автоморфизмом группы B; тривиальности пересечения подгрупп H и K более не требуется.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, H и K — бесконечные циклические подгруппы. Пусть также существуют автоморфизм α группы B, удовлетворяющий условию $H\alpha = K$, и гомоморфизм β группы B на нильпотентную $\mathcal{K}$-группу, инъективный на подгруппах H и K. Если группа B аппроксимируется разрешимыми $\mathcal{K}$-группами, то найдется гомоморфизм группы G на разрешимую*

$\mathcal{K}$-группу, инъективный на подгруппах H и K, и группа G аппроксимируется разрешимыми $\mathcal{K}$-группами.

Следствие 3. Пусть H и K — бесконечные циклические подгруппы и существует автоморфизм $\alpha \in \operatorname{Aut} B$ такой, что $H\alpha = K$. Если группа B аппроксимируется нильпотентными группами без кручения, то группа G аппроксимируется разрешимыми группами. В частности, если B — свободная группа, то группа G аппроксимируется разрешимыми группами.

В связи с формулировкой следствия 3 имеет смысл отметить, что известен алгоритм, позволяющий для произвольных элементов h и k свободной группы B определить, существует ли автоморфизм $\alpha \in \operatorname{Aut} B$ такой, что $h\alpha = k$ (см., например, [1], гл. 1, предложение 4.19).

Следствие 4. Всякая группа с одним определяющим соотношением вида $[u, tv] = 1$, где t — некоторый образующий, u и v — произвольные слова, не содержащие t, аппроксимируется разрешимыми группами.

Приведенное утверждение дополняет основные результаты из [24] об аппроксимируемости групп с одним определяющим соотношением вида $[u, w] = 1$.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, H и K — циклические подгруппы, порядок которых равен некоторому простому числу p. Пусть также существуют автоморфизм α группы B, удовлетворяющий условию $H\alpha = K$, и гомоморфизм β группы B на нильпотентную $\mathcal{K}$-группу, инъективный на подгруппах H и K. Если группа B аппроксимируется разрешимыми $\mathcal{K}$-группами и циклическая группа порядка $p-1$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, то группа G аппроксимируется разрешимыми $\mathcal{K}$-группами.*

Следствие 5. Пусть H и K — циклические подгруппы, порядок которых равен некоторому простому числу p, π — множество простых чисел, содержащее все делители числа $p-1$, и существует автоморфизм α группы B такой, что $H\alpha = K$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если группа B аппроксимируется периодическими нильпотентными π-группами конечного периода, то группа G аппроксимируется периодическими разрешимыми π-группами конечного периода;

2) если группа B аппроксимируется конечными нильпотентными π-группами, то группа G аппроксимируется конечными разрешимыми π-группами.

Отметим, что следствия 2, 3 и 5 дополняют отдельные результаты из [16], [17], где также исследуется аппроксимируемость разрешимыми группами HNN-расширений с циклическими связанными подгруппами.

2. Некоторые вспомогательные утверждения

Для доказательства теорем 1–3 потребуется следующее общее построение.

Пусть N — нормальная подгруппа группы B такая, что $N \cap H = 1 = N \cap K$. Тогда отображение $\varphi_N\colon HN/N \to KN/N$, переводящее смежный класс hN $(h \in H)$ в смежный класс $(h\varphi)N$, корректно определено и является изоморфизмом подгруппы HN/N на подгруппу KN/N. Поэтому наряду с HNN-расширением G можно рассмотреть HNN-расширение

$$G_N = \langle B/N, t;\ t^{-1}(HN/N)t = KN/N,\ \varphi_N\rangle.$$

Легко видеть, что тождественное отображение образующих группы G в группу G_N, будучи продолженным до отображения слов, переводит все определяющие соотношения группы G в равенства, верные в группе G_N, и потому задает сюръективный гомоморфизм $\rho_N\colon G \to G_N$, продолжающий естественный гомоморфизм $B \to B/N$.

В теоремах 1–3 для доказательства аппроксимируемости группы G используется

Предложение 1 ([12], теорема 4.1)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп и группа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Если существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, действующий инъективно на подгруппах H и K, то группа G также является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой.*

Следующие четыре утверждения позволяют строить гомоморфизмы, необходимые для применения предложения 1.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — произвольная группа. Тогда из $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы X следует ее $\mathcal{L}$-дискриминируемость.*

Доказательство. Пусть Y — конечное подмножество неединичных элементов группы X. Покажем, что существует гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{L}$, удовлетворяющий соотношению $\ker\sigma \cap Y = \varnothing$.

Так как группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема, то для каждого элемента $y \in Y$ найдется гомоморфизм σ_y группы X на группу из класса $\mathcal{L}$ такой, что $y\sigma_y \neq 1$. Положим $Z_y = \ker\sigma_y$ и $Z = \bigcap_{y \in Y} Z_y$. Тогда Z — нормальная подгруппа группы X и $Z \cap Y = \varnothing$.

По теореме Ремака (см., например, [25], теорема 4.3.9) фактор-группа X/Z вкладывается в прямое произведение $\mathcal{L}$-групп X/Z_y и ввиду условий, наложенных на класс $\mathcal{L}$, принадлежит данному классу. Следовательно, естественный гомоморфизм $X \to X/Z$ является искомым. $\square$

Предложение 3 ([26], предложение 11)**.** *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — некоторая $\mathcal{L}$-аппроксимируемая группа. Тогда для любой подгруппы Y группы X, имеющей конечный ранг Гирша–Зайцева, найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{L}$ такой, что* $\ker\sigma \cap Y = 1$.

Предложение 4 ([18], теорема 3)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп и содержащий хотя бы одну непериодическую группу. Пусть также группа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема, подгруппы H и K лежат в ее центре. Если существует гомоморфизм группы B на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах H и K, то найдется и гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах H и K.*

Предложение 5 ([17], теорема 1)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также группа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема, подгруппы H и K лежат в ее центре и являются конечными циклическими. Тогда ограничение ψ изоморфизма φ на подгруппу $H \cap K$ является автоморфизмом последней и группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда циклическая подгруппа, порожденная ψ, принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Приводимое далее предложение содержит упоминавшиеся выше равносильные определения корневого класса.

Предложение 6 ([11], теорема 1)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *класс $\mathcal{K}$ является корневым;*

2) *класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия декартовых сплетений;*

3) *класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия расширений и вместе с любыми двумя группами X, Y содержит декартову степень группы X в мощности $|Y|$.*

Следующие два утверждения составляют основу доказательства теорем 2 и 3.

Предложение 7. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, X — нильпотентная $\mathcal{L}$-аппроксимируемая группа, Y — некоторый член верхнего центрального ряда группы X. Тогда фактор-группа X/Y $\mathcal{L}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Очевидные индуктивные соображения позволяют ограничиться рассмотрением случая, когда Y — центр группы X.

Пусть xY — произвольный неединичный элемент группы X/Y. Тогда $x \notin Y$ и, значит, существует элемент $z \in X$ такой, что $[x, z] \neq 1$. Пользуясь $\mathcal{L}$-аппроксимируемостью группы X, найдем ее гомоморфизм σ на группу из класса $\mathcal{L}$, удовлетворяющий условию $[x, z]\sigma \neq 1$. Поскольку $[x\sigma, z\sigma] = [x, z]\sigma \neq 1$, элемент $x\sigma$ не принадлежит центру Z группы $X\sigma$. Вместе с тем, для любых элементов $x' \in X$, $y \in Y$ справедливы равенства $[x'\sigma, y\sigma] = [x', y]\sigma = 1$. Поэтому $Y\sigma \leqslant Z$ и $x\sigma \notin Y\sigma$.

Положим $N = \ker\sigma$. Тогда $x \notin YN$ и, следовательно, $xY \notin YN/Y$. Значит, образ элемента xY остается отличным от единицы при естественном гомоморфизме группы X/Y на фактор-группу $(X/Y)/(YN/Y)$, принадлежащую классу $\mathcal{L}$ ввиду соотношений $(X/Y)/(YN/Y) \cong X/YN \cong (X/N)/(YN/N)$, включения $X/N \in \mathcal{L}$ и замкнутости класса $\mathcal{L}$ относительно взятия фактор-групп. $\square$

Предложение 8. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, X — некоторая группа, Y и Z — ее изоморфные циклические подгруппы, порядок которых либо бесконечен, либо равен некоторому простому числу. Пусть также существует автоморфизм α группы X, удовлетворяющий условию $Y\alpha = Z$, и гомоморфизм σ группы X на нильпотентную группу из класса $\mathcal{K}$, действующий инъективно на подгруппах Y и Z. Тогда найдется гомоморфизм ρ группы X на нильпотентную группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что подгруппы $Y\rho$ и $Z\rho$ лежат в центре группы $X\rho$ и $\ker\rho \cap Y = 1 = \ker\rho \cap Z$.*

Доказательство. Без потери общности можно считать, что если порядок подгрупп Y и Z бесконечен, то группа $X\sigma$ не имеет кручения. В самом деле, в этом случае $Y\sigma \cap \tau(X\sigma) = 1 = Z\sigma \cap \tau(X\sigma)$, где $\tau(X\sigma)$ — периодическая часть группы $X\sigma$, и $X\sigma/\tau(X\sigma) \in \mathcal{K}$ ввиду замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия фактор-групп. Поэтому вместо гомоморфизма σ можно рассматривать его продолжение до гомоморфизма на фактор-группу $X\sigma/\tau(X\sigma)$.

Положим $M = \ker\sigma$ и $N = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} M\alpha^i$. Тогда $Y \cap N = 1 = Z \cap N$ и $N\alpha = N$. По теореме Ремака фактор-группа X/N вкладывается в декартово произведение P групп $X/M\alpha^i$ $(i \in \mathbb{Z})$, каждая из которых изоморфна нильпотентной $\mathcal{K}$-группе X/M. Очевидно, что группы P и X/N нильпотентны и не имеют кручения, если последним свойством обладает группа X/M.

Обозначим для краткости группу X/N, подгруппы YN/N и ZN/N через $\bar{X}$, $\bar{Y}$ и $\bar{Z}$ соответственно. Пусть $1 = \bar{X}_0 \leqslant \bar{X}_1 \leqslant \ldots \leqslant \bar{X}_n = \bar{X}$ — верхний центральный ряд группы $\bar{X}$, $\bar{y}$ — некоторый порождающий подгруппы $\bar{Y}$ и j — такое число, что $\bar{y} \in \bar{X}_{j+1} \setminus \bar{X}_j$. Если порядок подгрупп Y и Z равен некоторому простому числу, то из соотношения $\bar{y} \notin \bar{X}_j$ вытекает, что $\bar{Y} \cap \bar{X}_j = 1$. Если порядок подгрупп Y и Z бесконечен, то согласно сделанному выше предположению группы X/M и $\bar{X}$ не имеют кручения. Поэтому в силу следствия из теоремы 4.5 работы [27] подгруппа $\bar{X}_j$ изолирована в группе $\bar{X}$ и, так как $\bar{y} \notin \bar{X}_j$, то снова $\bar{Y} \cap \bar{X}_j = 1$.

Поскольку $N\alpha = N$, автоморфизм α индуцирует автоморфизм $\bar{\alpha}$ группы $\bar{X}$. Так как подгруппы $\bar{X}_j$ и $\bar{X}_{j+1}$ являются характеристическими в группе $\bar{X}$, то из соотношений $\bar{Y} \leqslant \bar{X}_{j+1}$, $\bar{Y} \cap \bar{X}_j = 1$ и $\bar{Z} = \bar{Y}\bar{\alpha}$ следует $\bar{Z} \leqslant \bar{X}_{j+1}$ и $\bar{Z} \cap \bar{X}_j = 1$. Значит, композиция θ естественных гомоморфизмов $X \to \bar{X}$ и $\bar{X} \to \bar{X}/\bar{X}_j$ действует инъективно на подгруппах Y и Z, а образы этих подгрупп относительно θ лежат в центре нильпотентной группы $X\theta$.

Так как подгруппы Y и Z вкладываются в $\mathcal{K}$-группу $X\sigma$ и класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп, то $Y, Z \in \mathcal{K}$. Если порядок данных подгрупп бесконечен, то $P \cong \prod_{y\in Y}(X/M)_y$, где $(X/M)_y$ — изоморфная копия группы X/M для каждого $y \in Y$, и из предложения 6 следует $P \in \mathcal{K}$. Ввиду замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп и фактор-групп отсюда получаем $\bar{X} \in \mathcal{K}$, $\bar{X}/\bar{X}_j \in \mathcal{K}$ и гомоморфизм θ является искомым.

Пусть порядок подгрупп Y и Z конечен. Отметим, что класс нильпотентных $\mathcal{K}$-групп замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Будучи декартовым произведением нильпотентных $\mathcal{K}$-групп, группа P аппроксимируется нильпотентными $\mathcal{K}$-группами в силу леммы 1.1 из [10]. Тем же свойством обладают ее подгруппа $\bar{X}$ и согласно предложению 7 фактор-группа $\bar{X}/\bar{X}_j$. Значит, пользуясь предложением 2, гомоморфизм θ можно продолжить до гомоморфизма ρ группы X на нильпотентную $\mathcal{K}$-группу, действующего инъективно на подгруппах Y и Z. Так как ρ продолжает θ, то подгруппы $Y\rho$ и $Z\rho$ лежат в центре группы $X\rho$ и, следовательно, гомоморфизм ρ является искомым. $\square$

3. Доказательства теорем и следствий

Доказательство теоремы 1. Пусть $N = \ker\sigma$. Поскольку $N \cap H = 1 = N \cap K$, определены HNN-расширение $G_N = \langle B/N, t;\ t^{-1}(HN/N)t = KN/N,\ \varphi_N\rangle$ и гомоморфизм $\rho_N\colon G \to G_N$. Для удобства введем следующие обозначения: $\bar{G} = G_N$, $\bar{B} = B\sigma$, $\bar{H} = H\sigma$, $\bar{K} = K\sigma$, $\bar{L} = L\sigma$, $\bar{\varphi} = \varphi_N$.

Для любого $h \in H$ справедливы равенства $(h^{-1}(h\varphi))\sigma = (h\sigma)^{-1}(h\varphi)\sigma = (hN)^{-1}(h\varphi)N = (hN)^{-1}(hN)\varphi_N$, поэтому $\bar{L} = \{\bar{h}^{-1}(\bar{h}\bar{\varphi}) \mid \bar{h} \in \bar{H}\}$. Если $\bar{h} \in \bar{H}$ и $\bar{h}^{-1}(\bar{h}\bar{\varphi}) \in \bar{H}$, то $\bar{h}\bar{\varphi} \in \bar{H} \cap \bar{K}$ и, так как $\bar{H} \cap \bar{K} = 1$, то $\bar{h}\bar{\varphi} = 1$, откуда $\bar{h}^{-1}(\bar{h}\bar{\varphi}) = 1$. Следовательно, $\bar{H} \cap \bar{L} = 1$. Аналогично проверяется, что $\bar{K} \cap \bar{L} = 1$, и, значит, определены HNN-расширение $\bar{G}_{\bar{L}} = \langle \bar{B}/\bar{L}, t;\ t^{-1}(\bar{H}\bar{L}/\bar{L})t = \bar{K}\bar{L}/\bar{L},\ \bar{\varphi}_{\bar{L}}\rangle$ и гомоморфизм $\rho_{\bar{L}}\colon \bar{G} \to \bar{G}_{\bar{L}}$.

Рассмотрим отображение образующих группы $\bar{G}_{\bar{L}}$ в группу $\bar{B}/\bar{L}$, переводящее t в 1 и действующее тождественно на образующих группы $\bar{B}/\bar{L}$, и продолжим его до отображения слов μ. Если $\bar{h} \in \bar{H}$, то $\bar{h}^{-1}(\bar{h}\bar{\varphi}) \in \bar{L}$ и $(\bar{h}\bar{L})\bar{\varphi}_{\bar{L}} = (\bar{h}\bar{\varphi})\bar{L} = \bar{h}\bar{L}$. Поэтому отображение μ переводит все определяющие соотношения группы $\bar{G}_{\bar{L}}$ в равенства, верные в группе $\bar{B}/\bar{L}$, и, тем самым, задает сюръективный гомоморфизм $\theta\colon \bar{G}_{\bar{L}} \to \bar{B}/\bar{L}$.

По условию теоремы $\bar{B} \in \mathcal{K}$ и класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия фактор-групп. Следовательно, $\bar{B}/\bar{L} \in \mathcal{K}$ и, если подгруппа $\bar{L}$ изолирована в группе $\bar{B}$, то $\bar{B}/\bar{L}$ — группа без кручения. Таким образом, композиция $\rho_N \circ \rho_{\bar{L}} \circ \theta$ представляет собой искомый гомоморфизм. Поскольку класс $\mathcal{K}$-групп без кручения является корневым как пересечение класса $\mathcal{K}$ и корневого класса всех групп без кручения, аппроксимируемость группы G вытекает из предложения 1. $\square$

Доказательство следствия 1. Чтобы воспользоваться утверждением 1 теоремы 1, укажем такой гомоморфизм σ группы B, что $B\sigma \in \mathcal{K}$, $\ker\sigma \cap H = 1 = \ker\sigma \cap K$ и $H\sigma \cap K\sigma = 1$.

Если $B \in \mathcal{K}$, в качестве σ следует взять тождественное отображение группы B. Если подгруппы H и K конечны, применим предложение 2 и найдем гомоморфизм σ группы B на группу из класса $\mathcal{K}$, ядро которого тривиально пересекается с множеством $\{hk^{-1} \mid h \in H,\ k \in K\} \setminus \{1\}$. Очевидно, что он обладает необходимыми свойствами. Наконец, если группа B аппроксимируется $\mathcal{K}$-группами без кручения и подгруппа M, порожденная множеством $H \cup K$, имеет конечный ранг Гирша–Зайцева, то в силу предложения 3 существует гомоморфизм группы B на группу из класса $\mathcal{K}$, ядро которого тривиально пересекается с M. Этот гомоморфизм и будет искомым. $\square$

Доказательство следствия 2. Поскольку $[h, k] = 1$, множество $\{x^{-1}(x\varphi) \mid x \in H\}$ совпадает с подгруппой L. Как уже было отмечено во введении, классы всех разрешимых групп и конечных разрешимых групп являются корневыми. Заметим также, что указанные классы замкнуты относительно взятия фактор-групп и что финитно аппроксимируемая разрешимая группа аппроксимируется конечными разрешимыми группами. Поэтому первые два утверждения следствия 2 вытекают из соответствующих утверждений следствия 1, а третье — из утверждения 2 теоремы 1 (если в качестве σ взять тождественное отображение группы B в себя). $\square$

Доказательство теорем 2 *и* 3. Прежде всего заметим, что класс разрешимых $\mathcal{K}$-групп является корневым и замкнут относительно взятия фактор-групп как пересечение обладающих этими свойствами класса $\mathcal{K}$ и класса всех разрешимых групп. Согласно предложению 8 существует гомоморфизм σ группы B на нильпотентную $\mathcal{K}$-группу такой, что подгруппы $H\sigma$ и $K\sigma$ лежат в центре группы $B\sigma$ и $\ker\sigma \cap H = 1 = \ker\sigma \cap K$. Положим $N = \ker\sigma$, рассмотрим HNN-расширение $G_N = \langle B/N, t;\ t^{-1}(HN/N)t = KN/N,\ \varphi_N\rangle$ и покажем, что гомоморфизм $\rho_N\colon G \to G_N$ может быть продолжен до гомоморфизма группы G на разрешимую $\mathcal{K}$-группу, инъективного на подгруппах H и K. Тогда аппроксимируемость группы G разрешимыми $\mathcal{K}$-группами будет следовать из предложения 1.

Если выполняется условие теоремы 2, то класс разрешимых $\mathcal{K}$-групп содержит непериодическую группу B/N и искомое продолжение существует ввиду предложения 4. Пусть выполняется условие теоремы 3 и ψ — ограничение изоморфизма φ_N на подгруппу $HN/N \cap KN/N$, которая, очевидно, имеет порядок 1 или p. Тогда порядок ψ делит $p-1$ и, так как циклическая группа порядка $p-1$ принадлежит классу разрешимых $\mathcal{K}$-групп, то группа G_N аппроксимируется разрешимыми $\mathcal{K}$-группами в силу предложения 5. Поскольку подгруппы H и K конечны, существование искомого продолжения гомоморфизма ρ_N следует из предложения 2. $\square$

Доказательство следствия 3. Пусть h и k — порождающие подгрупп H и K. По предложению 2 существует гомоморфизм σ группы B на нильпотентную группу без кручения такой, что $h\sigma \neq 1 \neq k\sigma$. Так как группа $B\sigma$ не имеет кручения, то $\ker\sigma \cap H = 1 = \ker\sigma \cap K$ и группа G аппроксимируется разрешимыми группами в силу теоремы 2.

Хорошо известно, что пересечение членов нижнего центрального ряда произвольной свободной группы тривиально [28], а факторы этого ряда являются свободными абелевыми группами без кручения [29]. Поэтому каждая свободная группа аппроксимируется нильпотентными группами без кручения. $\square$

Доказательство следствия 4. Пусть X — группа с образующими символами t, x_i $(i \in \mathcal{I})$ и одним определяющим соотношением $[u, tv] = 1$, где u и v — слова в образующих x_i $(i \in \mathcal{I})$. Соотношение $[u, tv] = 1$ может быть переписано в виде $t^{-1}ut = vuv^{-1}$. Отсюда следует, что группа X представляет собой HNN-расширение свободной группы с базисом x_i $(i \in \mathcal{I})$, связанные подгруппы которого являются циклическими и порождаются элементами u и vuv^{-1}. Поскольку указанные элементы сопряжены, требуемое утверждение вытекает из следствия 3. $\square$

Доказательство следствия 5. Как уже было отмечено во введении, классы периодических разрешимых π-групп конечного периода и конечных разрешимых π-групп являются корневыми. Легко видеть также, что они замкнуты относительно взятия фактор-групп, а классы периодических нильпотентных π-групп конечного периода и конечных нильпотентных π-групп — относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Из аппроксимируемости группы B каким-либо из двух последних классов и конечности подгрупп H и K в силу предложения 2 следует существование гомоморфизма группы B на группу из соответствующего класса, инъективного на подгруппах H и K. Поэтому требуемое утверждение вытекает из теоремы 3. $\square$

Литература

[1] Линдон Р., Шупп П. *Комбинаторная теория групп* (Мир, М., 1980).

[2] Baumslag B., Tretkoff M. *Residually finite HNN-extensions*, Comm. Algebra **6** (2), 179–194 (1978).

[3] Молдаванский Д.И. *Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп*, Укр. матем. журн. **44** (6), 842–845 (1992).

[4] Молдаванский Д.И. *Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений*, Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Матем., № 3, 129–140 (2000).

[5] Молдаванский Д.И. *Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп*, Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Матем., № 3, 123–133 (2002).

[6] Молдаванский Д.И. *Аппроксимируемость конечными p-группами некоторых HNN-расширений групп*, Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Матем., № 3, 102–116 (2003).

[7] Азаров Д.Н. *О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга*, Сиб. матем. журн. **54** (6), 1203–1215 (2013).

[8] Азаров Д.Н. *О финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений групп*, Матем. заметки **96** (2), 163–169 (2014).

[9] Logan A.D. *The residual finiteness of (hyperbolic) automorphism-induced HNN-extensions*, Comm. Algebra **46** (12), 5399–5402 (2018).

[10] Gruenberg K.W. *Residual properties of infinite soluble groups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **7** (1), 29–62 (1957).

[11] Sokolov E.V. *A characterization of root classes of groups*, Comm. Algebra **43** (2), 856–860 (2015).

[12] Tieudjo D. *On root-class residuality of some free constructions*, JP J. Algebra Number Theory Appl. **18** (2), 125–143 (2010).

[13] Азаров Д.Н., Тьеджо Д. *Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп*, Науч. тр. Ивановск. гос. ун-та. Матем., № 5, 6–10 (2002).

[14] Туманова Е.А. *Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп*, Модел. и анализ информ. систем **21** (4), 148–180 (2014).

[15] Гольцов Д.В. *Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп*, Матем. заметки **97** (5), 665–669 (2015).

[16] Туманова Е.А. *Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага — Солитэра*, Сиб. матем. журн. **58** (3), 700–709 (2017).

[17] Соколов Е.В., Туманова Е.А. *Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами*, Матем. заметки **102** (4), 597–612 (2017).

[18] Соколов Е.В., Туманова Е.А. *Обобщенные прямые произведения групп и их применение к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп*, Алгебра и логика **58** (6), 720–740 (2019).

[19] Туманова Е.А. *Аппроксимируемость корневыми классами групп древесных произведений с объединенными ретрактами*, Сиб. матем. журн. **60** (4), 891–906 (2019).

[20] Туманова Е.А. *Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением*, Изв. вузов. Матем., № 10, 27–44 (2015).

[21] Соколов Е.В., Туманова Е.А. *Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами*, Изв. вузов. Матем., № 3, 48–63 (2020).

[22] Sokolov E.V., Tumanova E.A. *To the question of the root-class residuality of free constructions of groups*, Lobachevskii J. Math. **41** (2), 260–272 (2020).

[23] Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya. *On various rank conditions in infinite groups*, Algebra Discrete Math. **6** (4), 23–43 (2007).

[24] Bencsáth K., Douglas A., Kahrobaei D. *Some residually solvable one-relator groups*, Irish Math. Soc. Bull. **65**, 23–31 (2010).

[25] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. *Основы теории групп*, 3-е изд. (Наука, М., 1982).

[26] Соколов Е.В., Туманова Е.А. *Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп*, Сиб. матем. журн. **57** (1), 171–185 (2016).

[27] Холл Ф. *Нильпотентные группы*, Математика. Период. сб. перев. иностр. ст. **12** (1), 3–36 (1968).

[28] Magnus W. *Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring*, Math. Ann. **111**, 259–280 (1935).

[29] Hall M., Jr. *A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (5), 575–581 (1950).

Елена Александровна Туманова

Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, д. 39, г. Иваново, 153025, Россия,

e-mail: helenfog@bk.ru

E.A. Tumanova

On the root-class residuality of certain HNN-extensions of groups

Abstract. Let $\mathcal{K}$ be a root class of groups and G be an HNN-extension of a group B with subgroups H and K associated by an isomorphism $\varphi\colon H \to K$. We obtain certain sufficient conditions for G to be residually a $\mathcal{K}$-group provided the set $\{h^{-1}(h\varphi) \mid h \in H\}$ is a normal subgroup of B or there exists an automorphism α of B such that $H\alpha = K$. In particular, we find sufficient conditions for G to be residually solvable, residually periodic solvable, or residually finite solvable in the case when B is residually nilpotent while H and K are cyclic and map onto each other by an automorphism of B.

Keywords: HNN-extension, root-class residuality, residual finiteness, residual p-finiteness, residual solvability.

Elena Alexandrovna Tumanova

Ivanovo State University,
39 Ermak str., Ivanovo, 153025 Russia,

e-mail: helenfog@bk.ru