УДК 521.54

А. В. Якушев

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ КОНЕЧНЫМИ P-ГРУППАМИ РАСЩЕПЛЯЮЩИХСЯ РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

Получено достаточное условие аппроксимируемости конечными p-группами расщепляющихся расширений групп. С его помощью доказано, что группа $P(n, \varepsilon) = \langle x, y;\ y^{-2}xy^2 = x^{\varepsilon}y^{-1}x^n y\rangle$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon = \pm 1$, аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда числа $n + \varepsilon - 1$ и $n - 2$ делятся на p.

1. Введение.

Напомним, что группа G называется расщепляющимся расширением своей нормальной подгруппы A при помощи подгруппы B, если $G = BA$ и $B \cap A = 1$. В этом случае сопряжение элементом $b \in B$ определяет автоморфизм группы A, и сопоставляя элементу b этот автоморфизм, получаем гомоморфизм θ группы B в группу $\mathrm{Aut}\, A$ всех автоморфизмов группы A. θ называется гомоморфизмом, сопровождающим рассматриваемое расширение, и хорошо известно, что группа G однозначно определяется группами A и B и отображением θ.

А. И. Мальцев [1] доказал, что расщепляющееся расширение G конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы A при помощи финитно аппроксимируемой группы B является финитно аппроксимируемой группой.

В данной работе рассматривается аппроксимируемость группы G конечными p-группами. Для формулировки результатов договоримся о следующих обозначениях.

Пусть A – некоторая группа и Φ – подгруппа группы автоморфизмов группы A. Тогда для произвольной Φ-допустимой нормальной подгруппы N группы A и для любого $\varphi \in \Phi$ отображение $\varphi_N : A/N \to A/N$, определяемое по правилу $(aN)\varphi_N = (a\varphi)N$ $(a \in A)$, является автоморфизмом фактор-группы A/N, а отображение $\rho_N : \varphi \mapsto \varphi_N$ определяет гомоморфизм группы Φ в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,(A/N)$ группы A/N. Образ группы Φ относительно ρ_N будем обозначать символом Φ_N. Если еще p –

некоторое простое число, то $\mathcal{N}_p(A,\Phi)$ будет обозначать семейство всех таких нормальных Φ-допустимых подгрупп N конечного p-индекса группы A, что группа $\Phi_{_N}$ является p-группой.

Следующее утверждение принадлежит Д. И. Молдаванскому (не опубликовано):

Теорема 1. *Пусть группа G является расщепляющимся расширением группы A при помощи группы B с сопровождающим гомоморфизмом θ и пусть $\Phi = B\theta$. Группа G аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда группа B аппроксимируется конечными p-группами и пересечение всех подгрупп семейства $\mathcal{N}_p(A,\Phi)$ совпадает с единичной подгруппой группы A.*

В самом деле, необходимость очевидна, так как пересечение с подгруппой A любой нормальной подгруппы конечного p-индекса группы G входит в семейство $\mathcal{N}_p(A,\Phi)$.

Пусть $g \in G$ и $g \neq 1$. Если $g \notin A$, то в группе G/A найдется нормальная подгруппа N/A конечного p-индекса такая, что $gA \notin N/A$. Тогда элемент g не входит в нормальную подгруппу N конечного p-индекса группы G.

Пусть теперь $g \in A$ и пусть подгруппа N из семейства $\mathcal{N}_p(A,\Phi)$ не содержит элемента g. Тогда $M = \operatorname{Ker}(\theta\rho_{_N})$ является нормальной подгруппой конечного p-индекса группы B и взаимный коммутант $[M,A]$ подгрупп M и A содержится в подгруппе N. Отсюда следует, что MN нормальная подгруппа группы G, имеющая, к тому же, конечный p-индекс в группе G. Легко видеть также, что $MN \cap A = N$, и потому $g \notin MN$. Таким образом, группа G аппроксимируется конечными p-группами.

Непосредственное применение в конкретных ситуациях критерия, доставляемого теоремой 1, может быть связано со значительными трудностями технического характера, и основная цель данной работы – указать следующее простое достаточное условие аппроксимируемости расщепляющегося расширения конечными p-группами:

Теорема 2. *Пусть группа G является расщепляющимся расширением конечно порожденной группы A при помощи группы B с сопровождающим гомоморфизмом θ и пусть $\Phi = B\theta$. Если группы A и B аппроксимируемы конечными p-группами и подгруппа A^pA' группы A принадлежит семейству $\mathcal{N}_p(A,\Phi)$ (т. е. $\Phi_{A^pA'}$ является p-группой), то группа G аппроксимируется конечными p-группами.*

Этот результат применяется к описанию аппроксимируемых конечными p-группами некоторых групп с одним определяющим соотношением. Речь идет о группах вида

$$P(n,\varepsilon) = \langle x, y;\ y^{-2}xy^2 = x^{\varepsilon}y^{-1}x^n y\rangle,$$

где $n \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon = \pm 1$. Этот класс групп был рассмотрен в работе [2]. Там отмечено, в частности, что группа G с одним определяющим соотношением тогда и только тогда обладает единственной нормальной подгруппой N, фактор-группа по которой бесконечная циклическая, являющейся, к тому же, свободной группой ранга 2, когда группа G изоморфна некоторой группе $P(n, \varepsilon)$. Поэтому из теоремы А. И. Мальцева, приведенной выше, следует, что каждая группа $P(n, \varepsilon)$ финитно аппроксимируема. Здесь будет доказана

Теорема 3. *Группа $P(n, \varepsilon)$ аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда числа $n + \varepsilon - 1$ и $n - 2$ делятся на p.*

Более подробно, если группа $P(n, 1)$ аппроксимируема конечными p-группами, то $p = 2$, и аппроксимруемость ее конечными 2-группами имеет место тогда и только тогда, когда число n является четным. Группа $P(n, -1)$ аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда число $n - 2$ делится на p.

2. Доказательство теоремы 2.

Следующее утверждение может быть доказано непосредственной индукцией (см. также следствие к лемме 3.7 из [3]):

Лемма 2.1. *Если автоморфизм φ группы G действует тождественно в фактор-группе G/G' группы G по ее коммутанту, то φ действует тождественно и в каждом факторе $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$ нижнего центрального ряда группы G.*

Лемма 2.2. *Автоморфизм φ конечной p-группы G является p-элементом, если p-элементом является индуцированный им автоморфизм $\varphi_{_{G'}}$ фактор-группы G/G'.*

В самом деле, очевидные индуктивные соображения приводят к существованию целого числа $n \geq 0$ такого, что для любого элемента $g \in G$ имеет место сравнение $g\varphi^{p^n} \equiv g \pmod{\gamma_c(G)}$, где c – класс нильпотентности группы G. Иначе говоря, для некоторого $x \in \gamma_c(G)$ имеет место равенство $g\varphi^{p^n} = gx$, и так как ввиду леммы 2.1 автоморфизм φ^{p^n} действует тождественно на подгруппе $\gamma_c(G)$, то для любого целого числа $k \geq 1$ имеем $g(\varphi^{p^n})^k = gx^k$. Поэтому, если порядок подгруппы $\gamma_c(G)$ равен p^r, то $\varphi^{p^{n+r}} = 1$.

Лемма 2.3. *Автоморфизм φ конечной абелевой p-группы G является p-элементом, если p-элементом является индуцированный им автоморфизм $\varphi_{_{G^p}}$ фактор-группы G/G^p.*

Пусть, в самом деле, группа G является прямым произведением m (неединичных) циклических групп с порождающими $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и пусть для некоторых целых чисел β_{ij}

$$a_i\varphi = a_1^{\beta_{i1}} a_2^{\beta_{i2}} \cdots a_m^{\beta_{im}} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Фактор-группа G/G^p является линейным пространством над полем $\mathbb{Z}_p$ с базисом $a_1, \ldots, a_m$, а индуцированный автоморфизм φ_{G^p} – оператором этого пространства, матрица которого в базисе $a_1, \ldots, a_m$ совпадает с $B = (\beta_{ij})$. Поэтому из условия леммы вытекает, что найдется такое целое число $n \geq 1$, что $B^{p^n} \equiv E \pmod p$ (где E – единичная матрица). Легко видеть, что тогда для любого целого числа $s \geq 1$ имеет место сравнение $B^{p^{n+s-1}} \equiv E \mod p^s$.

Пусть, с другой стороны, p^r – экспонента группы G и пусть A – свободная группа ранга m многообразия абелевых групп экспоненты p^r с множеством свободных порождающих $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Пусть ψ – такой эндоморфизм группы A, что

$$x_i\psi = x_1^{\beta_{i1}} x_2^{\beta i2} \cdots x_m^{\beta im} (i = 1, \ldots, m).$$

Из предыдущего следует, что ψ является автоморфизмом группы A, причем $\psi^{p^{n+r-1}} = 1$. Если теперь ρ – гомоморфизм группы A в группу G, переводящий элементы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в элементы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ соответственно, то $\psi\rho = \rho\varphi$ и потому для любого $k \geq 1$ $\psi^k\rho = \rho\varphi^k$. Так как отображение ρ сюрьективно, то $\varphi^{p^{n+r-1}} = 1$.

Из лемм 2.2 и 2.3, очевидно, следует

Лемма 2.4. *Автоморфизм φ конечной p-группы G является p-элементом, если p-элементом является индуцированный им автоморфизм $\varphi_{G^pG'}$ фактор-группы G/G^pG'.*

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 2. Ввиду теоремы 1 нам достаточно показать, что если A – конечно порожденная группа, аппроксимируемая конечными p-группами, и Φ – некоторая подгруппа группы автоморфизмов группы A, то пересечение всех подгрупп семейства $\mathcal{N}_p(A, \Phi)$ совпадает с единичной подгруппой группы A при условии, что это семейство содержит подгруппу A^pA'.

Пусть a – неединичный элемент группы A и пусть нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы A не содержащит элемент a. Так как фактор-группа A/N является нильпотентной и удовлетворяет тождеству $x^{p^n} = 1$ для некоторого целого $n > 0$, то N содержит подгруппу $M = A^{p^n}\gamma_{c+1}(A)$ (где c – класс нильпотентности A/N). Покажем, что $M \in \mathcal{N}_p(A, \Phi)$. Поскольку подгруппа M является Φ-допустимой и имеет конечный p-индекс в группе A, для этого достаточно понять, что все элементы группы Φ_M являются p-элементами.

Пусть $H = A/M$. Так как $H^pH' = A^pA'M/M$ и $M \subseteq A^pA'$, то $H/H^pH' \simeq A/A^pA'$. Для произвольного автоморфизма φ из группы Φ автоморфизм $\varphi_{_M}$ группы H индуцирует в фактор-группе H/H^pH' автоморфизм, соответствующий при изоморфизме группы H/H^pH' на группу A/A^pA', автоморфизму $\varphi_{_{A^pA'}}$. Так как по предположению $\varphi_{_{A^pA'}}$ является p-элементом группы $\operatorname{Aut} A/A^pA'$, то автоморфизм группы H/H^pH', индуцированный автоморфизмом $\varphi_{_M}$, является p-элементом. В силу леммы 2.4 p-элементом является и автоморфизм φ_M. Теорема 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 3.

В следующих двух леммах $w(x,y)$ будет обозначать слово вида

$$w(x,y) = y^{-m_1}x^{n_1}y^{m_1}y^{-m_2}x^{n_2}y^{m_2}\cdots y^{-m_s}x^{n_s}y^{m_s},$$

где $s \geq 1$ и $m_1, m_2 \ldots m_s, n_1, n_2 \ldots n_s$ – некоторые целые числа. Полагаем также $u = \sum_{i=1}^{s} n_i$ и $v = \sum_{i=1}^{s} n_i m_i$.

Лемма 3.1. *Пусть элементы a и b конечной p-группы G удовлетворяют равенству $w(a,b) = 1$, причем p делит число u и не делит число v. Тогда для некоторого целого числа k, сравнимого с единицей по модулю p, в группе G выполнено равенство $b^{-1}ab = a^k$.*

Доказательство. Это утверждение докажем индукцией по классу нильпотентности c группы G. При $c = 1$ группа G является абелевой, и в этом случае можно положить $k = 1$.

Пусть $c > 1$ и Z – центр группы G. Из индуктивного предположения следует, что для некоторого числа k_1, сравнимого с 1 по модулю p, и некоторого элемента $z \in Z$ в группе G выполнено равенство $b^{-1}ab = a^{k_1}z$. Тогда для любого числа $t \geq 0$ имеем $b^{-t}ab^t = a^{k_1^t}z^{k_1^{t-1}+\cdots+k_1+1}$, и потому элемент $w(a,b)$ принимает вид $a^m z^n$, для некоторых чисел m и n, сравнимых по модулю p с числами u и v соответственно. Так как число n не делится на p, то из равенства $z^n = a^{-m}$ для некоторого числа l получаем равенство $z = a^{-lm}$. Очевидно теперь, что число $k = k_1 - lm$ является искомым.

Лемма 3.2. *Пусть в группе $G = \langle x, y;\ w(x,y) = 1\rangle$ элемент $[[x,y],x]$ отличен от 1. Если группа G аппроксимируема конечными p-группами, то p делит числа u и v.*

Доказательство. Так как неабелева группа G аппроксимируема конечными p-группами, она обладает гомоморфизмом на неабелеву конечную p-группу H. Поскольку, далее, фактор-группа неабелевой нильпотентной группы по ее коммутанту не может быть циклической группой, группа H/H' является прямым произведением двух неединичных циклических

p-групп, и потому существует гомоморфное отображение группы G на конечную абелеву группу, при котором элемент x переходит в элемент порядка p. Поэтому p делит u. Если бы число v не делилось бы на p, то в силу леммы 3.1 элемент $[[x, y], x]$ при любом гомоморфизме группы G на конечную p-группу отображался бы в единицу, что противоречит условиям леммы.

Переходя теперь непосредственно к доказательству теоремы 3, заметим, прежде всего, что группа $P(n, \varepsilon)$ имеет представление вида

$$P(n, \varepsilon) = \langle x, y;\ w(x, y) = 1\rangle,$$

рассматриваемого в лемме 3.2, где $w(x, y) = y^{-2}x^{-1}y^2x^{\epsilon}y^{-1}x^ny$ и потому $u = n + \epsilon - 1$ и $v = n - 2$. Легко видеть, кроме того, что в этой группе элемент $[[x, y], x]$ отличен от единицы. Поэтому необходимость условий теоремы 3 следует из леммы 3.2.

Для доказательства достаточности условий перейдем к другому представлению группы $P(n, \epsilon)$. Введя образующие a_1 и a_2 вместе с определяющими соотношениями $a_1 = x,\ a_2 = y^{-1}xy$, получим представление этой группы вида

$$\langle a_1, a_2, y;\ y^{-1}a_1y = a_2, y^{-1}a_2y = a_1^{\varepsilon}a_2^n\rangle.$$

Отсюда видно, что группа $P(n, \varepsilon)$ является расщепляющимся расширением свободной группы A, свободно порождаемой элементами a_1, a_2, при помощи бесконечной циклической группы B с порождающим y. При этом, сопровождающий гомоморфизм θ отображает группу B на циклическую подгруппу Φ группы автоморфизмов группы A, порожденную автоморфизмом φ, который элемент a_1 переводит в элемент a_2, а элемент a_2 – в элемент $a_1^{\epsilon}a_2^n$. Матрица автоморфизма фактор-группы A/A^pA', индуцированного автоморфизмом φ, имеет вид $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & n \end{pmatrix}$, и легко видеть, что если p делит числа $n+\epsilon-1$ и $n-2$, то $M^p \equiv E \pmod p$. Следовательно, $\Phi_{A^pA'}$ является p-группой, и так как свободные группы аппроксимируемы конечными p-группами при любом простом p, требуемое утверждение вытекает из теоремы 2.

Список использованной литературы

1. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49 – 60.
2. Холл Ф. Нильпотентные группы // Математика. Период. сб. переводов иностр. ст. 1968. Т. 12, № 1. С. 3 – 36.
3. Brunner A. M., Mccool T. and Pietrowski A. Groups which are an infinite cyclic extension of a unique base group // J. Austral. Math. Soc. 1977. Vol. 23 (Ser A). 499 – 503.