МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 19, № 5 (1976), 773—782

УДК 513.6

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА МНОГООБРАЗИЯХ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ

Н. И. Яцкин

В работе доказывается теорема о приводимости к постоянным коэффициентам вполне интегрируемого линейного дифференциального уравнения на многообразии линейной связности. Библ. 8 назв.

1. Пусть (M, ∇) — многоообразие (C^∞, связное) линейной связности, A — группа Ли с единицей 1, $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли группы A, $\mathcal{F}_A(M) = C^\infty(M, A)$, $\Lambda^1(M, \mathfrak{a})$ — пространство $\mathfrak{a}$-значных 1-форм, $\mathfrak{X}(M)$ — алгебра Ли векторных полей на M.

Рассмотрим оператор (см. [1] — [3])

$$D : \mathcal{F}_A(M) \to \Lambda^1(M, \mathfrak{a}),$$

определенный формулой

$$\langle (D\Phi)(x), X\rangle = (R^{-1}_{\Phi(x)})_{*,\Phi(x)}(\Phi_{*,x})\langle X\rangle,$$

где $x \in M$, $X \in T_xM$, $R_{\Phi(x)}$ обозначает правый сдвиг на $\Phi(x)$ в группе A, а звездочка — касательное отображение в указываемой точке.

Уравнение

$$D\Phi = \alpha \tag{1}$$

вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда

$$d\bar{\alpha} - \frac{1}{2}[\bar{\alpha}, \bar{\alpha}] = 0. \tag{2}$$

Обозначим $\mathcal{L}^1(M, \mathfrak{a})$ подмножество форм из $\Lambda^1(M, \mathfrak{a})$, удовлетворяющих (2). Группа $\mathcal{F}_A(M)$ действует на

$\Lambda^1(\dot{M}, \mathfrak{a})$:

$$\rho(Q)\,\alpha = DQ + (\mathrm{Ad}\,Q)\,\alpha, \quad Q \in \mathcal{F}_A(\dot{M}),$$
$$\alpha \in \Lambda^1(M, \mathfrak{a}). \qquad (3)$$

Если формы α и α_1 принадлежат одной орбите этого действия, то говорят, что они приводимы одна к другой или эквивалентны. Множество $\mathcal{L}^1(M, \mathfrak{a})$ инвариантно относительно действия (3).

Определение 1. Будем говорить, что $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathfrak{a})$ постоянная (или самопараллельная) форма, если $\nabla\alpha = 0$, где

$$(\nabla\alpha)(X, Y) = Y\langle\alpha, X\rangle - \langle\alpha, \nabla_Y X\rangle; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \qquad (4)$$

Введем обозначения

$$\Lambda^1_{\mathrm{const}}(M, \nabla; \mathfrak{a}) = \{\alpha \in \Lambda^1(M, \mathfrak{a}) : \nabla\alpha = 0\},$$
$$\mathcal{L}^1_{\mathrm{const}}(M, \nabla, \mathfrak{a}) = \Lambda^1_{\mathrm{const}}(M, \nabla; \mathfrak{a}) \cap \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{a}),$$
$$\Lambda^1_{\mathrm{red}}(M, \nabla; \mathfrak{a}) = \rho(\mathcal{F}_A(M))\,\Lambda^1_{\mathrm{const}}(M, \nabla; \mathfrak{a}),$$
$$\mathcal{L}^1_{\mathrm{red}}(M, \nabla; \mathfrak{a}) = \Lambda^1_{\mathrm{red}}(M, \nabla; \mathfrak{a}) \cap \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{a}).$$

Формы, принадлежащие $\Lambda^1_{\mathrm{red}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$, будем называть приводимыми к постоянным или просто приводимыми.

Целью настоящей работы является выяснение условий принадлежности формы множеству $\mathcal{L}^1_{\mathrm{red}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$.

Такая задача полностью решена А. Л. Онищиком [2] для случая однородного пространства: $M = G/\Gamma$, где G — односвязная группа Ли, Γ — ее дискретная подгруппа, ∇ — прямая связность (в терминологии [4]) абсолютного параллелизма на M, заданного правоинвариантными полями на G.

2. Установим сначала некоторые условия принадлежности формы множеству $\mathcal{L}^1_{\mathrm{const}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$.

Предложение 1. *Пусть* $\alpha \in \Lambda^1_{\mathrm{const}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$, *тогда* $\alpha \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{const}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$, *если и только если*

$$\langle\alpha, T(X, Y)\rangle = [\langle\alpha, X\rangle, \langle\alpha, Y\rangle]; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \qquad (5)$$

где T *— тензор кручения связности* ∇.

Доказательство. Согласно формуле (4) имеем

$$Y \langle \alpha, X\rangle - \langle \alpha, \nabla_Y X\rangle = 0. \tag{6}$$

Условие (2) можно переписать в виде

$$X \langle \alpha, Y\rangle - Y \langle \alpha, X\rangle - \langle \alpha, [x, Y]\rangle = [\langle \alpha, X\rangle, \langle \alpha, Y\rangle]. \tag{2'}$$

Из (6) и (2′) следует (5):

$$\langle \alpha, T(X, Y)\rangle = \langle \alpha, \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]\rangle =$$
$$= X \langle \alpha, Y\rangle - Y \langle \alpha, X\rangle - \langle \alpha, [X, Y]\rangle = [\langle \alpha, X\rangle, \langle \alpha, Y\rangle].$$

Обратно, из (5) и (6), очевидно, следует (2′).

Замечание. Если M — абсолютно параллелизованное многообразие, то для постоянных полей [5, стр. 50] $T(X, Y) = -[X, Y]$, и мы получим

$$\langle \alpha, [X, Y]\rangle = -[\langle \alpha, X\rangle, \langle \alpha, Y\rangle].$$

В частности, если постоянные поля образуют алгебру Ли (тогда локально M — группа Ли), мы получаем антигомоморфизм этой алгебры Ли в алгебру $\mathfrak{a}$.

Предложение 2. *Рассмотрим ($\mathfrak{a}$-значное) тензорное поле*

$$V(X, Y) = [\langle \alpha, X\rangle, \langle \alpha, Y\rangle]$$

на M. Тогда, если $\nabla \alpha = 0$, то и $\nabla V = 0$.

Доказательство. По определению ковариантного дифференциала тензорных полей см. [6, стр. 81], или [7, стр. 53]) заметим, что в этих двух книгах определения (в несущественном) различны, мы следуем [6])

$$(\nabla V)(X, Y, Z) = (\nabla_Z V)(X, Y) = ZV(X, Y) - V(\nabla_Z X, Y) -$$
$$- V(X, \nabla_Z Y) = Z[\langle \alpha, X\rangle, \langle \alpha, Y\rangle] - [\langle \alpha, \nabla_Z X\rangle, \langle \alpha, Y\rangle] -$$
$$- [\langle \alpha, X\rangle, \langle \alpha, \nabla_Z Y\rangle] = [Z\langle \alpha, X\rangle - \langle \alpha, \nabla_Z X\rangle, \langle \alpha, Y\rangle] +$$
$$+ [\langle \alpha, X\rangle, Z\langle \alpha, Y\rangle - \langle \alpha, \nabla_Z Y\rangle] =$$
$$= [(\nabla \alpha)(X, Z), \langle \alpha, Y\rangle] + [\langle \alpha, X\rangle, (\nabla \alpha)(Y, Z)].$$

Получаем, что $\nabla \alpha = 0$ влечет $\nabla V = 0$.

Предложение 3. *Рассмотрим ($\mathfrak{a}$-значное) тензорное поле*

$$U(X, Y) = \langle \alpha, T(X, Y)\rangle$$

на M. Если $\nabla \alpha = 0$ и связность ∇ обладает свойством $\nabla T = 0$, то $\nabla U = 0$.

Доказательство. Очевидно, в силу перестановочности операций ∇ и свертывания тензоров [5, стр. 54].

Предложение 4. *Пусть* $\alpha \in \Lambda^1_{\mathrm{const}}$ $(M, \nabla; \mathfrak{a})$. *В предположении* $\nabla T = 0$, *для того, чтобы* $\alpha \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{const}}$ $(M, \nabla; \mathfrak{a})$, *необходимо и достаточно выполнение равенства* (5) *в некоторой фиксированной точке* $p \in M$.

Доказательство. Рассмотрим тензорное поле $W(X, Y) = U(X, Y) - V(X, Y)$. В силу предложений 2, 3 $\nabla W = 0$. Поэтому из $W(p) = 0$ следует $W \equiv 0$.

3. В предыдущем пункте были установлены условия, обеспечивающие импликацию $\alpha \in \Lambda^1_{\mathrm{const}}$ $(M, \nabla; \mathfrak{a}) \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{const}}$ $(M, \nabla; \mathfrak{a})$. Теперь мы остановимся на том, как можно задавать форму из $\Lambda^1_{\mathrm{const}}$ $(M, \nabla; \mathfrak{a})$.

Пусть ψ: $[0, 1] \to M$ — кусочно-гладкая кривая в M и $T_\psi : T_{\psi(0)} M \to T_{\psi(1)} M$ — параллельный перенос вдоль ψ, соответствующий связности ∇. Введем оператор $S_\psi : L(T_{\psi(0)} M, \mathfrak{a}) \to L(T_{\psi(1)} M, \mathfrak{a})$ формулой

$$S_\psi \alpha_0 (X) = \alpha_0 (T_\psi^{-1} X), \qquad \alpha_0 \in L(T_{\psi(0)} M, \mathfrak{a}), \qquad X \in T_{\psi(1)} M.$$

Обозначим $\Gamma(M, p)$ группоид замкнутых кривых в отмеченной точке $p \in M$. Немедленно получаем

Предложение 5. *Для того чтобы* $\alpha_0 \in L(T_p M, \mathfrak{a})$ *продолжалась до постоянной формы* $\alpha \in \Lambda^1_{\mathrm{const}}$ $(M, \nabla; \mathfrak{a})$, *необходимо и достаточно выполнения*

$$S_\psi \alpha_0 = \alpha_0 \tag{7}$$

для любой петли $\psi \in \Gamma(M, p)$.

4. Начиная с этого момента, нам понадобится подняться на универсальное накрывающее многообразие M:

$$\pi \colon \widetilde{M} \longrightarrow M.$$

Условимся считать, что $\pi_1(M)$ действует на $\widetilde{M}$ справа и, отметив точку $p \in \widetilde{M}$, будем рассматривать группу $\pi_1(M)$ вложенной в $\widetilde{M}$ в качестве орбиты точки p.

На $\widetilde{M}$ можно ввести линейную связность $\widetilde{\nabla}$ такую, что параллельный перенос $\widetilde{T}_\psi$, ей соответствующий, определится формулой

$$\widetilde{T}_\psi X = \pi_*^{-1} T_{\pi\circ\psi} \pi_* X,$$

где ψ — кривая в $\widetilde{M}$, $X \in T_{\psi(0)} \widetilde{M}$, и берется ветвь π^{-1}, проходящая через $\psi(1)$. Кривая ψ будет геодезической связности $\tilde{\nabla}$, если и только если $\pi\circ\psi$ будет геодезической ∇. В частности, (M, ∇) и $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ полны или неполны одновременно. Пусть $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathfrak{a})$, а $\tilde{\alpha} = \pi^*\alpha \in \Lambda^1(\tilde{M}, \mathfrak{a})$. Тогда справедливо

Предложение 6. $\alpha \in \Lambda^1_{\text{const}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{\alpha} \in \Lambda^1_{\text{const}}(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \mathfrak{a})$.

Доказательство. Утверждение предложения немедленно следует из формулы

$$\widetilde{\nabla\alpha} = \tilde{\nabla}\tilde{\alpha},$$

которая сразу получается из определения $\tilde{\nabla}$: $\tilde{\nabla}_X Y = \pi_*^{-1} \nabla_{\pi_* X}(\pi_* Y)$, которое эквивалентно данному выше в терминах параллельного переноса и в котором надо понимать поля определенными в малой окрестности, чтобы π было однолистным.

5. Рассмотрим теперь $\alpha \in \mathscr{L}^1(M, \mathfrak{a})$. Очевидно, $\tilde{\alpha} \in \mathscr{L}^1(\tilde{M}, \mathfrak{a})$ и верно также и обратное. В силу полной интегрируемости $\tilde{\alpha}$ и односвязности $\tilde{M}$ существует решение уравнения

$$D\Phi = \tilde{\alpha}, \tag{8}$$

$$\Phi(p) = 1. \tag{9}$$

Решение задачи (8) — (9) назовем фундаментальным решением уравнения (1). Для него выполняется следующее равенство:

$$\Phi(x\cdot\gamma) = \Phi(x)\,\alpha^{\#}(\gamma), \tag{10}$$

где $x \in \tilde{M}$, $\gamma \in \pi_1(M)$, через $x\cdot\gamma$ обозначено действие γ на x, а отображение

$$\alpha^{\#} : \pi_1(M) \to A$$

определено формулой

$$\alpha^{\#}(\gamma) = \Phi(p\cdot\gamma).$$

Из (10) следует, что $\alpha^{\#}$ есть гомоморфизм, называемый гомоморфизмом монодромии уравнения (1). Известно (см., например, [1]), что две формы α, $\alpha_1 \in \mathscr{L}^1(M, \mathfrak{a})$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их гомоморфизмы монодромии $\alpha^{\#}$, $\alpha_1^{\#}$ сопряжены.

6. Получим еще один вспомогательный результат. Пусть $\alpha_0 \in L(T_p\tilde{M}, \mathfrak{a})$. Согласно предложению 5 α_0 продолжается до постоянной 1-формы на $\tilde{M}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{S}_\psi\alpha_0 = \alpha_0$ для любой петли $\psi \in \in \Gamma(\tilde{M}, p)$ (где $\tilde{S}_\psi$ — оператор, двойственный $\tilde{T}_\psi^{-1}$). Однако, вообще говоря, не всякая постоянная форма на $\tilde{M}$ есть поднятие некоторой (а в силу предложения 6 необходимо постоянной) формы на M. Нас будут интересовать условия на α_0, обеспечивающие существование продолжения α_0 до 1-формы на $\tilde{M}$, которая опускается до постоянной формы на M.

Прежде всего заметим, что рассматриваемая связность $\tilde{\nabla}$ на $\tilde{M}\pi_1(M)$-инвариантна, т. е. каждое $\gamma \in \pi_1(M)$ есть аффинное преобразование $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$. Отсюда γ^* переводит $\Lambda^1_{\text{const}}(\tilde{M}, \tilde{\nabla}; \mathfrak{a})$ в себя. Тем самым определено действие $\pi_1(M)$ на $\{\alpha_0 \in L(T_p\tilde{M}, \mathfrak{a}) : \forall\psi \in \Gamma(\tilde{M}, p), \tilde{S}_\psi\alpha_0 = \alpha_0\}$:

$$\gamma \cdot \alpha_0 = \tilde{S}^{-1}\gamma^*\tilde{S}\alpha_0, \tag{11}$$

где $\tilde{S}$ — оператор продолжения до постоянной формы на $\tilde{M}$, определенный на указанном подпространстве в $L(T_p\tilde{M}, \mathfrak{a})$ согласно предложению 5, а $\tilde{S}^{-1}$ — его обратный оператор, который ставит в соответствие форме ее значение в точке p.

Обозначим

$$L_{\text{inv}}(T_p\tilde{M}, \mathfrak{a}) = \{\alpha_0 \in L(T_p\tilde{M}, \mathfrak{a}):\ 1)\ \forall\psi \in \Gamma(\tilde{M}, p),\ \tilde{S}_\psi\alpha_0 = \alpha_0;\ \ 2)\ \forall\gamma \in \pi_1(M),\ \gamma \cdot \alpha_0 = \alpha_0\}.$$

Резюмируя все сказанное, сформулируем

Предложение 7. *Отображение $\alpha_0 \in L(T_p\tilde{M}, \mathfrak{a})$ продолжается до постоянной формы $\beta \in \Lambda^1_{\text{const}}(\tilde{M}, \tilde{\nabla}; \mathfrak{a})$, такой, что $\beta = \tilde{\mu}$, $\mu \in \Lambda^1_{\text{const}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$, если и только если $\alpha_0 \in L_{\text{inv}}(T_p\tilde{M}, \mathfrak{a})$.*

7. В случае однородного пространства, исследованном А. Л. Онищиком ([2]): $M = G/\Gamma$, G односвязна, Γ дискретна, $\tilde{M} = G$, $\pi_1(M) = \Gamma$ и справедлива теорема:

Форма $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{a})$ принадлежит $\mathcal{L}^1_{\text{red}}(M, \mathfrak{a})$ тогда и только тогда, когда ее гомоморфизм монодромии $\alpha^\# : \Gamma \to A$ продолжается до гомоморфизма Φ: $G \to A$.

В общем случае многообразия линейной связности мы сформулируем теорему в аналогичных терминах. Для этого нам понадобится определить, что такое «гомоморфизм» Φ: $\tilde{M} \to A$.

Начиная с этого момента, считаем многообразие (M, ∇) полным, выше мы уже отмечали, что это эквивалентно полноте $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$. Обозначим $\operatorname{Exp} = \operatorname{Exp}_p$ экспоненциальное отображение

$$\operatorname{Exp} : T_p\tilde{M} \to \tilde{M}.$$

Определение 2. Гладкое отображение Φ : : $\tilde{M} \to A$ назовем «гомоморфизмом», если выполнены следующие условия:

(i) $\Phi(p) = 1$;

(ii) коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_p\tilde{M} & \xrightarrow{\Phi_{*,p}} & \mathfrak{a} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \operatorname{Exp}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\Phi} & A \end{array}$$

(iii) $$\Phi_{*,p} \in L_{\mathrm{inv}}(T_p\tilde{M}, \mathfrak{a});$$

(iv) $\Phi_{*,p}(\tilde{T}(X, Y)) = [\Phi_{*,p}(X), \Phi_{*,p}(Y)]$, $X, Y \in T_p\tilde{M}$, где $\tilde{T}$ — тензор кручения $\tilde{\nabla}$.

Определение 3. Пусть f: $\pi_1(M) \to A$ — некоторый гомоморфизм. Будем говорить, что f продолжается до «гомоморфизма» Φ: $\tilde{M} \to A$, если

(v) $\Phi(x \cdot \gamma) = \Phi(x) f(\gamma)$, $x \in \tilde{M}$, $\gamma \in \pi_1(M)$, т. е. $\Phi \in \operatorname{Map}_{\pi_1(M)}(\tilde{M}, A)$, где правое действие $\pi_1(M)$ на A задано гомоморфизмом f.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему настоящей работы.

ТЕОРЕМА. *Пусть* (M, ∇) — *полное многообразие линейной связности,* $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{a})$. *Если* α *приводима к постоянной* (*т. е.* $\alpha \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{red}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$), *то ее гомоморфизм монодромии* $\alpha^{\#}$: $\pi_1(M) \to A$ *продолжается до «гомоморфизма»* Φ: $\tilde{M} \to A$. *Если, кроме того,*

(vi) *отображение* Exp: $T_p\tilde{M} \to \tilde{M}$ *сюръективно*;

(vii) $\tilde{\nabla}\tilde{T} = 0$, *то справедливо обратное утверждение.*

Доказательство. 1) Предположим $\alpha \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{const}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$. В качестве $\Phi : \tilde{M} \to A$ возьмем фундаментальное решение уравнения (1), т. е. решение задачи (8) — (9). Свойство (i) выполнено автоматически, а из (10) следует (v), так что Φ продолжает $\alpha^{\#}$ в смысле определения 3. По определению оператора $D\ \widetilde{\alpha}(p) = (D\Phi)(p) = \Phi_{*,p}$. Но $\widetilde{\alpha} \in \mathscr{L}^1_{\text{const}}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; \mathfrak{a})$, поэтому, во-первых, $\Phi_{*,p} = \widetilde{\alpha}(p)$ удовлетворяет условию (iv), что следует из предложения 4, а во-вторых, так как $\widetilde{\alpha}$ есть форма, поднятая с M, по предложению 7 получим, что выполнено (iii). Пусть теперь $X \in T_p\widetilde{M}$ и $\psi_X(t) = \operatorname{Exp} tX$ — соответствующая геодезическая. Ограничение постоянной формы на геодезическую $\psi_X^* \alpha(t) = \langle \alpha(p), X\rangle = \text{const}$. Поэтому $\Phi(\operatorname{Exp} tX) = \exp t\langle \alpha(p), X\rangle$. Полагая $t = 1$, получим (ii).

2) Предположим $\alpha_1 \in \mathscr{L}^1_{\text{red}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$, а именно, $\alpha_1 = \rho(Q)\alpha$, $\alpha \in \mathscr{L}^1_{\text{const}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$, $Q \in \mathscr{F}_A(M)$. Очевидно, $\widetilde{\alpha}_1 = \rho(\widetilde{Q})\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha} \in \mathscr{L}^1_{\text{const}}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \mathfrak{a})$. $\widetilde{Q} = Q \circ \pi \in \mathscr{F}_A(\widetilde{M})$. Гомоморфизм монодромии формы α_1 сопряжен гомоморфизму монодромии формы α:

$$\alpha_1^{\#}(\gamma) = \widetilde{Q}(p)\alpha^{\#}(\gamma)\widetilde{Q}^{-1}(q), \qquad \gamma \in \pi_1(M).$$

В 1) мы доказали, что $\alpha^{\#}$ продолжается до «гомоморфизма» $\Phi\colon \widetilde{M} \to A$. Определим $\Phi_1 = \widetilde{Q}(p)\Phi\widetilde{Q}^{-1}(p)$ и докажем, что Φ_1 продолжает $\alpha_1^{\#}$. Свойства (i), (v), очевидно, выполнены. Имеем, $(\Phi_1)_{*,p} = \operatorname{Ad}\widetilde{Q}(p)\cdot\Phi_{*,p}$, и

$$\exp(\Phi_1)_{*,p}(X) = \exp[\operatorname{Ad}\widetilde{Q}(p)\,\Phi_{*,p}(X)] = \widetilde{Q}(p)\Phi(\operatorname{Exp} X)\,\widetilde{Q}^{-1}(p) = \Phi_1(\operatorname{Exp} X),$$

так что (ii) тоже выполнено. Чтобы доказать (iii), надо проверить инвариантность $(\Phi_1)_{*,p}$ относительно действий на $L(T_p\widetilde{M}, \mathfrak{a})$ группоида $\Gamma(\widetilde{M}, p)$ (см. (7)) и группы $\pi_1(M)$ (см. (11)). Обозначим для кратности $\alpha_0 = \Phi_{*,p}$, $\beta_0 = (\Phi_1)_{*p}$. Тогда $\widetilde{S}_\psi\,\beta_0(X) = \beta_0(\widetilde{T}_\psi^{-1}X) = (\operatorname{Ad}\widetilde{Q}(p)\,\alpha_0) \times (\widetilde{T}_\psi^{-1}X) = \operatorname{Ad}\widetilde{Q}(p)\cdot(\alpha_0(\widetilde{T}_\psi^{-1}X)) = \operatorname{Ad}\widetilde{Q}(p)\cdot(\widetilde{S}_\psi\,\alpha_0(X)) = \operatorname{Ad}\widetilde{Q}(p)\cdot(\alpha_0(X)) = \beta_0(X)$ и $\Gamma(\widetilde{M}, p)$-инвариантность β_0 доказана. Аналогично доказывается $\pi_1(M)$-инвариантность β_0, надо только заметить, что оператор $\operatorname{Ad}\widetilde{Q}(p)$ коммутирует с операторами $\widetilde{S}$, $\widetilde{S}^{-1}$ и γ^*. (Коммутирование с $\widetilde{S}$ следует из легко доказываемого коммутирования $\widetilde{\nabla}\operatorname{Ad}\widetilde{Q}(p) = \operatorname{Ad}\widetilde{Q}(p)\,\widetilde{\nabla}$). Итак, свойство ($iii$) установлено, а доказательство (iv) очевидно.

3) Докажем теперь достаточность условий (i) — (v), дополнительно предположив выполненными условия (vi) — (vii). Пусть $\alpha^{\#} : \pi_1(M) \to A$ продолжается до «гомоморфизма» $\Phi : \tilde{M} \to A$. Рассмотрим $\beta_0 = \Phi_{*, p} \in L(T_p\tilde{M}, \mathfrak{a})$ и $\beta = \tilde{S}\beta_0 \in \Lambda^1_{\mathrm{const}}(\tilde{M}, \tilde{\nabla}; \mathfrak{a})$. Из ($iv$) и ($vii$) по предложению 4 следует, что $\beta \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{const}}(\tilde{M}, \tilde{\nabla}; \mathfrak{a})$, а из ($iii$) по предложению 7 — что существует $\mu \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{const}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$ такая, что $\beta = \tilde{\mu}$. Пусть $\Psi : \tilde{M} \to A$ — фундаментальное решение, соответствующее форме μ. Тогда $\mu^{\#}(\gamma) = \Psi(p\cdot\gamma)$. В силу ($vi$) Exp: $T_p\tilde{M} \to \tilde{M}$ есть отображение «на», поэтому существует $X_\gamma \in T_p\tilde{M}$, что $p\cdot\gamma = \operatorname{Exp} X_\gamma$. Получаем $\mu^{\#}(\gamma) = \Psi(\operatorname{Exp} X_\gamma)$. Применяя теперь прямое утверждение теоремы к форме μ, получим (см. 1)) $\Psi(\operatorname{Exp} X_\gamma) = \exp(\tilde{\mu}(p)(X_\gamma)) = \exp \beta_0(X_\gamma)$. Итак, $\mu^{\#}(\gamma) = \exp \beta_0(X_\gamma) = \exp \Phi_{*, p}(X_\gamma)$. Осталось воспользоваться свойством (ii): $\mu^{\#}(\gamma) = \Phi(\operatorname{Exp} X_\gamma) = \Phi(p\cdot\gamma)$. И, наконец, учитывая ($v$), получим $\mu^{\#}(\gamma) = \alpha^{\#}(\gamma)$. Мы доказали, что у форм μ и α совпадают гомоморфизмы монодромии, следовательно, эти формы эквивалентны; и так как по построению $\mu \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{const}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$, то $\alpha \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{red}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$. Теорема доказана.

8. Если связность ∇ (а значит, и $\tilde{\nabla}$) риманова, то $\tilde{T} = 0$ и условие (vii) выполнено автоматически, и, в предположении полноты, отображение Exp сюръективно [7, стр. 72]. Так что условие (vi) тоже выполнено. Условие (iv) для связности с $\tilde{T} = 0$ сводится к условию коммутативности

$$(iv') \qquad [\Phi_{*,p}(X),\ \Phi_{*,p}(Y)] = 0; \qquad X, Y \in T_p\tilde{M}.$$

Следствие. *Пусть* (M, g) — *полное риманово многообразие и* $\alpha \in \mathscr{L}^1(M, \mathfrak{a})$. *Тогда* $\alpha \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{red}}(M, g; \mathfrak{a})$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha^{\#}: \pi_1(M) \to A$ *продолжается до «гомоморфизма»* $\Phi: \tilde{M} \to A$, *т. е. до гладкого отображения* Φ, *удовлетворяющего условиям* (i) — (iii), (iv').

9. Нетрудно убедиться, что для параллелизованного многообразия M, $L_{\mathrm{inv}}(T_p, \tilde{M}, \mathfrak{a}) = L(T_p\tilde{M}, \mathfrak{a})$, и условие ($iii$) пропадает. В случае же $M = G/\Gamma$ (iv) дает обычное понятие антигомоморфизма групп $G \to A$. (Расхождение с теоремой Онищика, выразившееся в появлении приставки «анти» произошло из-за того, что мы считаем алгебру Ли группы G составленной из право-, а не левоинвариантных полей.) Условие (*ii*) следует из (*iv*). Условие (*vi*) выполняется для групп, разумеется, не всегда, но оно оказывается излишним по той причине, что в этом случае $\Psi = \Phi$ (см. доказательство достаточности).

Если же параллелизованное многообразие имеет непостоянную структурную функцию, т. е. $\widetilde{\nabla} T \neq 0$, вопрос о достаточности условий теоремы остается открытым. Однако в этом случае можно доказать похожую теорему о приводимости к виду, инвариантному относительно группы автоморфизмов абсолютного параллелизма (которая по теореме Кобаяши является группой Ли [8, стр. 15]).

В заключение автор благодарит С. Г. Крейна за полезные обсуждения.

Воронежский лесотехнический институт

Поступило 12.VII.1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Онищик А. Л., Некоторые понятия и применения теории неабелевых когомологий, Тр. Моск. матем о-ва, **17** (1967), 48—88.

[2] Онищик А. Л., О вполне интегрируемых уравнениях на однородных пространствах, Матем. заметки, **9**, № 4 (1971), 365—373.

[3] Fedida E., Sur les feuilletages de Lie, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. B., **272**, № 15 (1971), 999—1001.

[4] Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж., Геометрия многообразий, М., «Мир», 1967.

[5] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, М., «Мир», 1971.

[6] Номидзу Н., Группы Ли и дифференциальная геометрия, М., ИЛ, 1960.

[7] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., «Мир», 1964.

[8] Kobayashi S., Transformation groups in differential geometry, Berlin, Springer, 1972.