ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983. 616 с.
2. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М., 1976. 352 с.
3. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М., 1977. 351 с.
4. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М., 1980. 536 с.
5. Weiser A., Eisenstat S. C., Schultz M. H. On solving elliptic equations to moderate accuracy.— SIAM J. Numer. Anal., 1980, v. 17, № 6, p. 908—929.
6. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978. 592 с.
7. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М., 1984. 335 с.
8. Капорин И. Е. Алгоритм блочного гнездового сечения.— В сб.: Числен. методы линейн. алгебры. М., 1982, с. 73—93.
9. George A. An automatic one-way dissection algorithm for irregular finite element problems.— SIAM J. Numer. Anal., 1980, v. 17, № 6, p. 740—751.
10. Кучеров А. Б. Прямой метод частичного исключения для решения несимметричных пятиточечных разностных уравнений.— В сб.: Разностн. методы матем. физики. М., 1984, с. 35—53.
11. Golub G. H., Varga R. S. Chebyshev semi-iterative methods, successive overrelaxation iterative methods and second order Richardson iterative methods.— Numer. Math., 1961, v. 3, № 2, p. 147—168.
12. Reid J. K. The use of conjugate gradients for systems of linear equations possesing „Property A".— SIAM J. Numer. Anal., 1972, v. 9, № 2, p. 325—332.
13. Hageman L., Young D. M. Applied iterative methods. Acad. Press, 1981. 386 p.
14. Самарский А. А., Капорин И. Е., Кучеров А. Б. и др. Некоторые современные методы решения сеточных уравнений.— Изв. вузов. Матем., 1983, № 7, с. 3—12.
15. Axelsson O., Gustavsson I. On the use of preconditioned conjugate gradient methods for red-black ordered five-point difference schemes.— J. Comput. Phys., 1980, v. 35, p. 284—289.
16. Богданова М. С., Голубева А. А., Капорин И. Е. и др. Комплекс программ ELLDEC-2.— В сб.: Библиотека программ для решения сеточн. уравнений. М., 1984, с. 3—159.
17. Кузнецов Ю. А. Вычислительные методы в подпространствах, II.— В сб.: Вычисл. процессы и системы, М., 1984, с. 265—350.

г. Москва

Поступила
17.07.1985

Н. И. Яцкин

УДК 514.7

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Каноническая связность на редуктивном пространстве

Пусть G — связная односвязная группа Ли; $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли; H — замкнутая подгруппа в G; $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}$, соответствующая подгруппе H; $M = G/H$ — левое (составленное из левых классов смежности) однородное пространство; $p: G \to M$ — естественная проекция. Группа G действует на M слева с помощью преобразований $\hat{L}_g$: $\hat{L}_g(g_1H) = gg_1H$.

Однородное пространство M называется редуктивным, если имеется прямое разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, в котором подпространство $\mathfrak{m}$ $\mathrm{Ad}(H)$-инвариантно. Это подпространство отождествляется с помощью отображения $p_{*,1}|_{\mathfrak{m}}$ с касательным пространством T_oM в отмеченной точке $o = p(1) = H \in M$.

Представление изотропии

$$\lambda: H \to \mathrm{GL}(T_oM) \tag{1.1}$$

определяется (см. [1], т. 2, с. 175) формулой $\lambda(h) = (\hat{L}_h)_{*,o}$; $h \in H$, или (при отождествлении $T_oM = \mathfrak{m}$) $\lambda(h) = (\mathrm{Ad}\, h)|_{\mathfrak{m}}$. Представление (1.1) является для редуктивных пространств точным. Образом этого представления является группа линейной изотропии $J = \lambda(H)$, изоморфная группе изотропии H (действующей на $\mathfrak{m}$ с помощью сужения на $\mathfrak{m}$ присоединенного представления Ad).

Опишем универсальное накрывающее многообразие $\widetilde{M}$ и фундаментальную группу $\pi_1(M)$ однородного пространства $M = G/H$. Информацию сведем в диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "p_0"] \arrow[dd, bend right=60, "p"'] & & & H \arrow[lll, hook'] \arrow[d, "p_0|_H"] \\
G/H_0 \simeq \widetilde{M} \arrow[d, "\pi"] & & \pi_1(M) \simeq H/H_0 , \arrow[ll, hook'] \arrow[dll, "o"] & \\
G/H = M & & &
\end{tikzcd}
\tag{1.2}
$$

в которой: H_0 — компонента единицы $1 \in H$; группа H/H_0 действует справа на многообразии G/H_0 (поскольку H_0 — нормальный делитель H) и вкладывается в G/H_0 в качестве орбиты отмеченной точки $o = p_0(1) = H_0 \in G/H_0$ (отмеченные точки в M и $\widetilde{M}$ обозначаются одинаково; $\pi(o) = o$); отождествление $\pi_1(M) \simeq \simeq H/H_0$ достигается, если элементу $hH_0 \in H/H_0$ поставить в соответствие гомотопический класс петли $p \circ \psi$ в многообразии M, где ψ — произвольный путь в группе G, соединяющий единицу $1 \in G$ и $h \in H$ (описанное соответствие будет гомоморфизмом, если операцию в $\pi_1(M)$ определять так, чтобы в произведении путей $\psi_2 \cdot \psi_1$ сначала проходился путь ψ_1, а потом ψ_2); диагональная стрелка изображает постоянное отображение в отмеченную точку $o \in M$.

Существует описание G-инвариантных связностей на M (см., напр., [1], гл. 10; [2]). Согласно [3] все такие связности получаются опусканием на M лево-G и, одновременно, право-H-инвариантных связностей на G, причем опускание осуществляется с помощью естественной связности (которая будет обозначаться в дальнейшем символом δ) в главном расслоении

$$p : G \to M = G/H, \tag{1.3}$$

определяемой разнесением левыми сдвигами подпространства $\mathbf{m} \subset T_1 G = \mathbf{g}$ в точки $g \in G : \mathrm{Th}_g G = (L_g)_{*,1}\, \mathbf{m} \subset T_g G$ — в качестве горизонтальных в смысле связности δ подпространств.

Так называемая каноническая связность ∇ на M получается опусканием на M связности на G, порожденной левым параллелизмом Π_l на G. (Поясним, что параллелизм Π_l, очевидно, лево-G-инвариантен, в то время как соответствующая ему связность двусторонне-G-инвариантна.)

Каноническая линейная связность ∇ на M может быть получена и иначе: она является гомоморфным образом связности δ в главном расслоении (1.3) при вложении этого расслоения в расслоение реперов $P(M) \to M$, которое осуществляется после фиксации репера $u_0 \in P_o(M)$ по правилу: $G \ni g \to (\hat{L}_g)_{*,o}\, u_0$ (см. [4], с. 217). Отсюда вытекает, что параллельный перенос вдоль произвольного пути в M можно реализовать как дифференциал некоторого преобразования $\hat{L}_g$, $g \in G$ (см. [1], т. 2, с. 181).

Обозначим через $p' : \mathfrak{H}\mathfrak{l} \to M$ подрасслоение голономии связности δ в расслоении (1.3), проходящее через $1 \in G$. Элемент $g \in \mathfrak{H}\mathfrak{l}$ тогда и только тогда, когда существует путь $\psi : [0, 1] \to G$ такой, что $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = g$ и ψ горизонтален в смысле δ, т. е. касательные векторы $\psi_*(t) \in (L_{\psi(t)})_{*,1}\, \mathbf{m}$ при любом $t \in [0, 1]$, или, в других терминах, $(D_l \psi)(t) \in \mathbf{m}$, $t \in [0, 1]$, где $(D_l\psi)(t) = (L_{\psi(t)})^{-1}_{*,1}\, \psi_*(t)$ — левый дифференциал (см. [5], с. 306). Образом этого подрасслоения при вложении (1.3) в $P(M)$ будет подрасслоение голономии линейной связности ∇, проходящее через u_0. Обозначим через $\mathrm{HL} = (p')^{-1}(o) \subset H$ группу голономии связности δ в точке $o \in M$. При вложении (1.3) в $P(M)$ эта группа перейдет в изоморфную (см. (1.1)) группу $\lambda(\mathrm{HL}) = \mathrm{HL}(M, \nabla, o)$ голономии линейной связности ∇ в точке $o \in M$.

Каноническая связность $\widetilde{\nabla}$ на $\widetilde{M} = G/H_0$ является накрывающей для канонической связности ∇ на M (в смысле [6], с. 76; см. также [7], с. 57). Эта связность также может быть получена как гомоморфный образ естественной связности δ_0 в главном расслоении $p_0 : G \to \widetilde{M}$, причем подрасслоение голономии для δ_0, проходящее через $1 \in G$, совпадает (как подмножество в G) с подрасслоением $\mathfrak{Hl}$ для δ. Имеем коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{Hl} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p_0'"'] \arrow[dr, "p'"] & G \arrow[d, "p"] \\
\widetilde{M} \arrow[r, "\pi"] & M
\end{tikzcd}
\tag{1.4}
$$

Группа голономии накрывающей связности $\mathrm{HL}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, o)$ отождествляется с ограниченной группой голономии $\mathrm{HL}_0(M, \nabla, o)$ или же с изоморфным образом $\lambda(\mathrm{HL}_0)$, где $\mathrm{HL}_0 = (p_0')^{-1}(o) \subset H_0$ — группа голономии связности δ_0.

Для группы HL_0 известно (см. [1], т. 2, с. 192) описание

$$\mathrm{HL}_0 = H_1, \tag{1.5}$$

где H_1 — нормальный делитель компоненты единицы H_0 группы H, порожденный идеалом $\mathfrak{h}_1 = \{[X, Y]_{\mathfrak{h}} : X, Y \in \mathfrak{m}\}$ алгебры Ли $\mathfrak{h}$. В случае дискретной группы H имеем (см. [2]):

$$\mathrm{HL} = H. \tag{1.6}$$

В общем случае существует эпиморфизм (см. [1], т. 1, с. 78):

$$\pi_1(M, o) \simeq H/H_0 \to \mathrm{HF} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{HL}/\mathrm{HL}_0, \tag{1.7}$$

который сопоставляет классу смежности $hH_0 \in H/H_0$ класс $h_1 \mathrm{HL}_0$, где h_1 — конечная точка горизонтального (в смысле δ) подъема петли $p \circ \psi$, где ψ — произвольный путь в G, соединяющий $1 \in G$ и $h \in H$.

Группы голономии HL и HL_0 можно считать действующими с помощью представления $\lambda = \mathrm{Ad}|_{\mathfrak{m}}$ на пространстве $\mathfrak{m}$, а также (в смысле соответствующего расширения действия) — на тензорной алгебре пространства $\mathfrak{m}$. При этом корректно определено действие факторгруппы (а следовательно, с помощью эпиморфизма (1.7), также и действие фундаментальной группы H/H_0) на подпространстве HL_0-инвариантов. Подпространство HL-инвариантов совпадает с подпространством HF-(или, эквивалентно, H/H_0-) инвариантов в подпространстве HL_0-инвариантов, т. е.

$$[V]^{\mathrm{HL}} = [[V]^{\mathrm{HL}_0}]^{\mathrm{HF}} = [[V]^{\mathrm{HL}_0}]^{H/H_0}, \tag{1.8}$$

где V — некоторое пространство тензоров над $\mathfrak{m}$, а квадратные скобки заключают подпространство инвариантов указываемой над скобками группы (см. [6], с. 80).

В заключение параграфа отметим, что каноническая связность ∇ полна, ее геодезическими, исходящими из точки $o \in M$, являются проекции геодезических (т. е. однопараметрических подгрупп) в G. Кривизна и кручение связности ∇ постоянны в смысле ∇, т. е.

$$\nabla \operatorname{Tor} = 0; \ \nabla \operatorname{Curv} = 0, \tag{1.9}$$

а их значения в точке o определяются формулами

$$\operatorname{Tor}_0(X, Y) = -[X, Y]_{\mathfrak{m}}; \ X, Y \in \mathfrak{m}; \tag{1.10}$$

$$\operatorname{Curv}_0(X, Y)Z = -[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z]; \ X, Y, Z \in \mathfrak{m}. \tag{1.11}$$

§ 2. Постоянные формы на редуктивных пространствах

Рассмотрим сначала G-инвариантные тензорные поля на M. Каждое такое поле однозначно определяется своим значением в точке o, и обратно, тензор в точке o продолжается до G-инвариантного поля на M тогда и только тогда, когда он J-инвариантен (или H-инвариантен при отождествлении (1.1)).

Перейдем теперь к описанию постоянных в смысле канонической связности ∇ тензорных полей на M. Снова такое поле определяется значением в точке o, и тензор в точке o продолжается до постоянного поля тогда и только тогда, когда он HL-инвариантен. Поскольку продолжение до постоянного поля осуществляется теми же операторами $(\hat{L}_g)_{*,o}$, что и продолжение до G-инвариантного поля (см. § 1 об операторах параллельного переноса), то в силу включения $\mathrm{HL} \subset \mathrm{H}$ получаем: всякое G-инвариантное поле постоянно (см. [1], т. 2, с. 181). В некоторых случаях справедливо обратное ([1], т. 2, с. 195).

Применим эти соображения к дифференциальным формам $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathbf{a})$ степени 1 со значениями в некоторой алгебре Ли $\mathbf{a}$. Значение формы α в точке o представляет собой „$\mathbf{a}$-значный ковектор“ $\alpha_0 = \alpha(o) \in L(T_oM, \mathbf{a}) \simeq L(\mathbf{m}, \mathbf{a})$. Группа голономии HL действует на $L(\mathbf{m}, \mathbf{a})$ по правилу (см. [6], с. 72):

$$\langle h \cdot \alpha_0, X\rangle = \langle \alpha_0, (\mathrm{Ad}\, h^{-1}) X\rangle;\ \alpha_0 \in L(\mathbf{m}, \mathbf{a});\ X \in \mathbf{m};\ h \in \mathrm{HL}; \tag{2.1}$$

подпространство HL-инвариантов может быть описано следующим образом:

$$[L(\mathbf{m}, \mathbf{a})]^{\mathrm{HL}} = \{\alpha_0 \in L(\mathbf{m}, \mathbf{a}) : \langle \alpha_0, (\mathrm{Ad}\, h) X\rangle = \langle \alpha_0, X\rangle;\ h \in \mathrm{HL};\ X \in \mathbf{m}\}. \tag{2.2}$$

Для подпространства инвариантов ограниченной группы голономии HL_0 имеем аналогичное описание, в котором $h \in \mathrm{HL}_0 = \mathrm{H}_1$ согласно (1.5), что в силу связности нормального делителя H_1 эквивалентно описанию в терминах соответствующего действия ad идеала $\mathbf{h}_1 = [\mathbf{m}, \mathbf{m}]_{\mathbf{h}} : [L(\mathbf{m}, \mathbf{a})]^{\mathrm{HL}_0} = \{\alpha_0 \in L(\mathbf{m}, \mathbf{a}) : \langle \alpha_0, (\mathrm{ad}\, W) X\rangle = 0;\ W \in \mathbf{h}_1;\ X \in \mathbf{m}\} = \{\alpha_0 \in L(\mathbf{m}, \mathbf{a}) : \langle \alpha_0, [[Y, Z]_{\mathbf{h}}, X]\rangle = 0;\ X, Y, Z \in \mathbf{m}\}$, откуда с учетом (1.11) получается

$$[L(\mathbf{m}, \mathbf{a})]^{\mathrm{HL}_0} = \{\alpha_0 \in L(\mathbf{m}, \mathbf{a}) : \langle \alpha_0, \mathrm{Curv}_0\rangle = 0\}, \tag{2.3}$$

где угловые скобки обозначают свертку тензоров. Подпространство (2.2) связано с подпространством (2.3) в силу (1.8) соотношением

$$[L(\mathbf{m}, \mathbf{a})]^{\mathrm{HL}} = [[L(\mathbf{m}, \mathbf{a})]^{\mathrm{HL}_0}]^{\mathrm{H}/\mathrm{H}_0}. \tag{2.4}$$

Обратимся теперь к изучению вполне интегрируемых, т. е. удовлетворяющих условию

$$d\alpha - \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0, \tag{2.5}$$

1-форм и соответствующих ковекторов. Согласно [6], с. 75 (в предположении $\nabla\,\mathrm{Tor} = 0$, которое в данном случае выполняется в силу (1.9)), постоянная форма, порожденная ковектором $\alpha_0 \in [L(\mathbf{m}, \mathbf{a})]^{\mathrm{HL}}$, вполне интегрируема тогда и только тогда, когда справедливо равенство $\langle \alpha_0, \mathrm{Tor}_0(X, Y)\rangle = -[\langle \alpha_0, X\rangle, \langle \alpha_0, Y\rangle]$, которое в рассматриваемой ситуации приобретает в соответствии с (1.10) вид

$$\langle \alpha_0, [X, Y]_{\mathbf{m}}\rangle = -[\langle \alpha_0, X\rangle, \langle \alpha_0, Y\rangle];\ X, Y \in \mathbf{m}. \tag{2.6}$$

Подводя итог изложенному в данном параграфе, можем сформулировать

Предложение 2. 1. *Множество* $\mathbf{a}$-*значных ковекторов в точке* $o \in M$, *порождающих постоянные вполне интегрируемые 1-формы на* M, *состоит из* H/H_0-*инвариантных элементов пространства* (2.3), *удовлетворяющих условию* (2.6).

Замечание 2.1. Без предположения H/H_0-инвариантности ковектор порождает вполне интегрируемую форму на $\widetilde{M}$, постоянную в смысле связности $\widetilde{\nabla}$; H/H_0-инвариантность обеспечивает опускаемость этой формы на M. Примем обозначение $\mathfrak{L}(\mathbf{m}, \mathbf{a})$ для множества ковекторов $\alpha_0 \in L(\mathbf{m}, \mathbf{a})$, удовлетворяющих условиям $\langle \alpha_0, \mathrm{Curv}_0\rangle = 0$ и (2.6), и обозначение $[\mathfrak{L}(\mathbf{m}, \mathbf{a})]^{H/H_0}$ для подмножества H/H_0-инвариантов.

§ 3. Аффинные отображения редуктивных пространств в группы Ли

Напомним (см. [1], т. 1, с. 212; [4], с. 160) определение аффинного отображения одного многообразия линейной связности в другое: $f \in \mathrm{Aff}(M_1, \nabla^{(1)}; M_2, \nabla^{(2)})$, если

$$(T^{(2)}_{f\circ\psi} \circ f_{*,\psi(0)}) X = (f_{*,\psi(1)} \circ T^{(1)}_{\psi}) X;\ X \in T_{\psi(0)} M_1, \tag{3.1}$$

для любого пути ψ в многообразии M_1, т. е. дифференциал f коммутирует с параллельными переносами. Символом Aff_0 будем обозначать подмножество в Aff, состоящее из отображений, сохраняющих отмеченные точки. В качестве второго многообразия у нас будет фигурировать группа Ли A, снабженная правым параллелизмом Π_r. С помощью свойства аффинных отображений, состоящего в том, что такое отображение однозначно определяется своим значением и дифференциалом в некоторой точке (см. [6], с. 84), можно доказать, что

$$\mathrm{Aff}_0(G, \Pi_l;\ A, \Pi_r) = a\,\mathrm{Hom}(G, A),$$

где символом $a\,\mathrm{Hom}(G, A)$ обозначено множество антигомоморфизмов из группы Ли G в группу Ли A.

Следующая теорема дает аналогичное описание множества аффинных отображений редуктивного пространства $M = G/H$ с канонической связностью ∇ в группу Ли A.

Теорема 3.1. *Для редуктивного пространства M имеет место взаимно однозначное соответствие*

$$p^* : \mathrm{Aff}_0(M, \nabla;\ A, \Pi_r) \xrightarrow{\approx} a\,\mathrm{Hol}(G, H;\ A, 1), \tag{3.2}$$

где символом $a\,\mathrm{Hol}(G, H; A, 1)$ обозначено множество так называемых антиголоморфизмов, т. е. отображений $F : G \to A$, удовлетворяющих условию

$$F(g_1 g h) = F(g) F(g_1);\ g \in G;\ g_1 \in \mathfrak{H};\ h \in H, \tag{3.3}$$

где $\mathfrak{H}$ — подрасслоение голономии связности δ в расслоении $p : G \to M$, а соответствие (3.2) *устанавливается по правилу*:

$$C_0^\infty(M, A) \ni f \longmapsto p^* f = f \circ p \in C_0^\infty(G, A), \tag{3.4}$$

где C_0^∞ обозначает множество гладких отображений, сохраняющих отмеченные точки.

Замечание 3.1. Из (3.3) очевидным образом следует, что $F|_H = 1$ (этот факт подчеркивается в обозначении множества антиголоморфизмов).

Замечание 3.2. Аналогичное (3.4) соответствие $C_0^\infty(\widetilde{M}, A) \ni f \longmapsto p_0^* f = f \circ p_0 \in C_0^\infty(G, A)$ позволяет произвести отождествление

$$p_0^* : \mathrm{Aff}_0(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla};\ A, \Pi_r) \xrightarrow{\approx} a\,\mathrm{Hol}(G, H_0;\ A, 1). \tag{3.5}$$

Множество антиголоморфизмов в (3.5) определяется более слабым, чем (3.3), условием

$$F(g_1 g h_0) = F(g) F(g_1);\ g \in G;\ g_1 \in \mathfrak{H};\ h_0 \in H_0. \tag{3.6}$$

Доказательство теоремы 3.1. 1) Пусть $f \in \mathrm{Aff}_0(M, \nabla; A, \Pi_r)$ и пусть $\psi : [0,1] \to M$ — произвольный путь в M, соединяющий точки $\psi(0) = o$ и $\psi(1) = g_0 H$. Имеем по определению (3.1):

$$f_{*,\psi(1)} \circ T_\psi^{(\nabla)} = T_{f\circ\psi}^{(\Pi_r)} \circ f_{*,\psi(0)}. \tag{3.7}$$

Параллельный перенос в смысле параллелизма Π_r совпадает с дифференциалом правого сдвига $R_{f(g_0 H)}$ в группе A; параллельный перенос в смысле ∇ может быть реализован (см. § 1) как $(\hat{L}_{g_1})_{*,o}$ при некотором $g_1 = g_0 h$, $h \in H \subset G$, причем g_1 оказывается элементом подрасслоения голономии связности δ, проходящего через $1 \in G$. Таким образом, (3.7) можно переписать в виде

$$(f \circ \hat{L}_{g_1})_{*,\,o} = (R_{f(g_0H)} \circ f)_{*,o}. \tag{3.8}$$

Слева и справа в равенстве (3.8) стоят дифференциалы в точке $o \in M$ аффинных отображений (отображение f аффинно по условию; правый сдвиг $R_{f(g_0H)}$ является аффинным отображением в смысле (A, Π_r)). Сами аффинные отображения также совпадают в точке o: $(f \circ \hat{L}_{g_1})(o) = f(g_1H) = f(g_0hH) = f(g_0H)$; $(R_{f(g_0H)} \circ f)(o) = R_{f(g_0H)} \cdot 1 = f(g_0H)$. Следовательно, они совпадают тождественно на многообразии M:

$$(f \circ \hat{L}_{g_1})(gH) = (R_{f(g_0H)} \circ f)(gH) \tag{3.9}$$

для любого $g \in G$, т. е.

$$f(g_1gH) = f(gH)\, f(g_0H). \tag{3.10}$$

Введем теперь в рассмотрение отображение $F = p^*f = f \circ p : F(g) = f(gH)$ и воспользуемся тем, что $g_1H = g_0H$, и поэтому $f(g_0H) = f(g_1H)$. Получим из (3.10)

$$F(g_1g) = F(g)\, F(g_1). \tag{3.11}$$

В равенстве (3.11) g — произвольный элемент группы G; меняя путь ψ, добиваемся того, что g_1 можно считать произвольным элементом $\mathfrak{H}$. И, наконец, в силу своего определения отображение F не замечает умножения справа на $h \in H$, учитывая это, можем придать (3.11) требуемый вид (3.3).

2) Обратно, пусть отображение $F: G \to A$ удовлетворяет условию (3.3). Взяв в (3.3) $g_1 = 1$, получим $F(gh) = F(g)$; $g \in G$, $h \in H$, откуда следует опускаемость отображения F до отображения $f \in C_0^\infty(M, A)$ такого, что $F = p^*f$. Обращая цепочку равенств (3.3); (3.11); (3.10); (3.9); (3.8), где вместо g_0H следует писать g_1H $(= g_0H)$, в итоге получаем (3.7) для любого пути ψ, начинающегося в точке $\psi(0) = o$. Рассмотрим теперь путь ψ', начинающийся в точке $g'H \in M$, $g' \in G$; можно добиться того, чтобы $g'H = g_2H$, $g_2 \in \mathfrak{H}$, и представить $\psi' = \hat{L}_{g_2} \circ \psi$, где ψ — путь, начинающийся в точке o. В силу инвариантности связности ∇ имеем

$$T_{\psi'}^{(\nabla)} \circ (\hat{L}_{g_2})_{*,\,o} = (\hat{L}_{g_2})_{*,\,\psi(1)} \circ T_{\psi}^{(\nabla)}, \tag{3.12}$$

откуда можно выразить $T_{\psi'}^{(\nabla)}$, что с учетом представления $T_{\psi}^{(\nabla)} = (\hat{L}_{g_1})_{*,\,o}$; $g_1 \in \mathfrak{H}$, приведет к равенству

$$T_{\psi'}^{(\nabla)} = (\hat{L}_{g_2g_1g_2^{-1}})_{*,\,\psi'(0)}; \ \psi'(0) = g_2H; \ g_1,\ g_2 \in \mathfrak{H}. \tag{3.13}$$

Следовательно,

$$f_{*,\,\psi'(1)} \circ T_{\psi'}^{(\nabla)} = (f \circ \hat{L}_{g_2g_1g_2^{-1}})_{*,\,\psi'(0)}. \tag{3.14}$$

С другой стороны,

$$T_{f \circ \psi'}^{(\Pi_r)} \circ f_{*,\,\psi'(0)} = (R_{(f(g_2H))^{-1}f(g_2g_1H)} \circ f)_{*,\,\psi'(0)}. \tag{3.15}$$

Теперь, чтобы доказать совпадение левых частей (3.14) и (3.15), докажем, что совпадают додифференциальные выражения в правых частях

$$f(g_2g_1g_2^{-1}gH) = f(gH)\,[f(g_2H)]^{-1} f(g_2g_1H); \ g \in G. \tag{3.16}$$

Чтобы доказать (3.16), перепишем это равенство в терминах отображения $F = p^*f$:

$$F(g_2g_1g_2^{-1}g) = F(g)\,[F(g_2)]^{-1}F(g_2g_1); \ g \in G; \ g_1,\ g_2 \in \mathfrak{H}. \tag{3.17}$$

Из (3.3) следует, во-первых, что $F(g_2g_1) = F(g_1)F(g_2)$, во-вторых,

$$F(g_2g_1g_2^{-1}g) = F(g_1g_2^{-1}g)F(g_2) = F(g_2^{-1}g)F(g_1)F(g_2).$$

Подставляя эти выражения в (3.17) и сокращая на $F(g_1)F(g_2)$, получим эквивалентное (3.17) равенство: $F(g_2^{-1}g) = F(g)[F(g_2)]^{-1}$, или же $F(g_2^{-1}g)F(g_2) = F(g)$, но, снова по свойству (3.3), левая часть последнего равенства: $F(g_2^{-1}g)F(g_2) = F(g_2g_2^{-1}g) = F(g)$, что и доказывает справедливость этого равенства. Доказательство теоремы 3.1 завершено.

Получив описание множества $\mathrm{Aff}_0(M, \nabla; A, \Pi_r)$, свяжем теперь это с результатами § 2. Согласно [6], с. 83, отображение $f: M \to A$ является аффинным тогда и только тогда, когда его правый дифференциал Df (см. [5], с. 306; [6]; [8]; для линейных групп $A: Df = df \cdot f^{-1}$) представляет собой постоянную в смысле ∇ 1-форму на M со значениями в алгебре Ли $\mathbf{a}$ группы A. В случае односвязного M получается взаимно однозначное соответствие (см. [6], с. 85):

$$D: \mathrm{Aff}_0(M, \nabla; A, \Pi_r) \xrightarrow{\approx} \mathfrak{L}^1_{\mathrm{const}}(M, \nabla; \mathbf{a}) \qquad (3.18)$$

множества аффинных отображений Aff_0 и множества вполне интегрируемых (т. е. удовлетворяющих условию (2.5)) постоянных (в смысле ∇) $\mathbf{a}$-значных 1-форм на M. Объединяя (3.18) с утверждениями предложения 2.1 и теоремы 3.1, получаем

Предложение 3.1. *Имеет место коммутативная диаграмма, составленная из взаимно однозначных отображений*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{L}^1_{\mathrm{const}}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; \mathbf{a}) \arrow[r, "\mathrm{ev}_0"] & \mathfrak{L}(\mathfrak{m}, \mathbf{a}) \\
\mathrm{Aff}_0(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; A, \Pi_r) \arrow[u, "D"] \arrow[ur, dashed, "{*, o}"] \arrow[r, "p_0^*"'] & a\,\mathrm{Hol}(G, H_0; A, 1) \arrow[u, "{*, 1|_{\mathfrak{m}}}"']
\end{tikzcd} \qquad , \qquad (3.19)$$

в которой $\mathfrak{L}^1_{\mathrm{const}}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; \mathbf{a})$ — *множество вполне интегрируемых постоянных 1-форм на* $\widetilde{M} = G/H_0$; $\mathfrak{L}(\mathfrak{m}, \mathbf{a})$ — *множество ковекторов из замечания* 2.1; $a\,\mathrm{Hol}(G, H_0; A, 1)$ — *множество антиголоморфизмов из замечания* 3.2; *отображения заданы формулами:* $\mathrm{ev}_0(\alpha) = \alpha(o)$ — *значение 1-формы в точке* $o \in \widetilde{M}$; $(*, o)f = f_{*,o}$; $(*, 1|_{\mathfrak{m}})F = F_{*,1}|_{\mathfrak{m}}$.

В множестве $\mathrm{Aff}_0(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; A, \Pi_r)$ выделяется подмножество $\widehat{\mathrm{Aff}}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; A, \Pi_r)$, состоящее из аффинных отображений, соответствующих $\pi_1(M)$-инвариантным (т. е. опускаемым на M) формам на $\widetilde{M}$: $f \in \widehat{\mathrm{Aff}}$, если $f(y \cdot \gamma) = f(y)f(\gamma)$; $y \in \widetilde{M}$; $\gamma \in \pi_1(M)$ (см. диаграмму (1.2)). Аналогично выделяется подмножество $a\widehat{\mathrm{Hol}}(G, H_0; A, 1)$, состоящее из отображений $F \in C^\infty(G, A)$, удовлетворяющих условиям

$$F(g_1gh_0) = F(g)F(g_1);\ g \in G;\ g_1 \in \mathfrak{H};\ h_0 \in H_0; \qquad (3.20)$$

$$F(gh) = F(g)F(h);\ g \in G;\ h \in H. \qquad (3.21)$$

Множества $\widehat{\mathrm{Aff}}$ и $a\widehat{\mathrm{Hol}}$ соответствуют друг другу при отображении p_0^*. Получаем

Предложение 3.2. *Имеет место коммутативная диаграмма, являющаяся сужением диаграммы* (3.19):

$$\begin{tikzcd}
{[\mathfrak{L}^1_{\mathrm{const}}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; \mathfrak{a})]^{\pi_1(M)}} \arrow[r, "\mathrm{ev}_0"] & {[\mathfrak{L}(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})]^{H/H_0}} \\
\widehat{\mathrm{Aff}}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; A, \Pi_r) \arrow[u, "D"] \arrow[r, "p_0^*"] \arrow[ur, dashed, "{*, b}"] & a\widehat{\mathrm{Hol}}(G, H_0; A, 1) \arrow[u, "{*, 1|_{\mathfrak{m}}}"']
\end{tikzcd}, \tag{3.22}$$

в которой $[\mathfrak{L}(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})]^{H/H_0}$ — *множество ковекторов из предложения* 2.1, *а множество* $[\mathfrak{L}^1_{\mathrm{const}}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; \mathfrak{a})]^{\pi_1(M)}$ *находится во взаимно однозначном соответствии с множеством* $\mathfrak{L}^1_{\mathrm{const}}(M, \nabla; \mathfrak{a})$.

Остановимся кратко на свойствах элементов множества $a\widehat{\mathrm{Hol}}(G, H_0; A, 1)$. Справедливо

Предложение 3.3. *Антиголоморфизм* $F \in a\widehat{\mathrm{Hol}}(G, H_0; A, 1)$ *обладает следующими свойствами*:

(i) F *постоянно на слоях расслоения* $p_0: G \to \widetilde{M}$;

(ii) F *однозначно определяется сужением* $F|_{\mathfrak{H}1}$;

(iii) *если* $g_1, g_1' \in \mathfrak{H}1$, *то* $F(g_1 g_1') = F(g_1') F(g_1)$;

(iv) *если* $g_1 \in \mathfrak{H}1$, $h \in H$, *то* $F(g_1) F(h) = F(h) F(g_1)$, *т. е. любой элемент образа* $F(\mathfrak{H}1)$ *коммутирует с любым элементом* $F(H)$.

Доказательство свойств (i) — (iii) непосредственно следует из (3.20); свойство (iv) выводится с использованием (3.21).

§ 4. Гомоморфизмы монодромии. Теорема Ляпунова — Флоке

Известна (см. [8]; [6], § 3.2) классификация вполне интегрируемых 1-форм относительно действия группы $C^\infty(M, A)$:

$$\rho(Q)\alpha = DQ + (\mathrm{Int}\, Q)\alpha; \quad \alpha \in \mathfrak{L}^1(M, \mathfrak{a}); \quad Q \in C^\infty(M, A), \tag{4.1}$$

с помощью гомоморфизмов монодромии

$$\alpha^{\#}: \pi_1(M) \to A. \tag{4.2}$$

Гоморфизм (4.2) определяется как сужение на орбиту $o.\, \pi_1(M)$ отмеченной точки $o \in \widetilde{M}$ фундаментального решения Φ_α, соответствующего форме α, т. е. решения на $\widetilde{M}$ уравнения

$$D\Phi = \widetilde{\alpha}; \quad \widetilde{\alpha} = \pi^*\alpha \tag{4.3}$$

с начальным условием $\Phi(o) = 1$. (Для линейных групп A: $D\Phi = d\Phi \cdot \Phi^{-1}$; $\rho(Q)\alpha = dQ \cdot Q^{-1} + Q\alpha Q^{-1}$; уравнение $D\Phi = \alpha$ можно переписать в виде $d\Phi = \alpha\Phi$.) Действие (4.1) соответствует замене $\Psi = Q\Phi$ в уравнении $D\Phi = \alpha$ и переходу к уравнению $D\Psi = \beta$, где $\beta = \rho(Q)\alpha$. Две вполне интегрируемые формы эквивалентны, т. е. принадлежат одной и той же орбите действия (4.1), тогда и только тогда, когда их гомоморфизмы монодромии сопряжены в группе A.

В [6], § 4.2, доказана обобщенная теорема Ляпунова — Флоке, утверждающая, что вполне интегрируемая 1-форма α эквивалентна постоянной форме (т. е. соответствующее дифференциальное уравнение приводимо к постоянным коэффициентам) тогда и только тогда, когда ее гомоморфизм монодромии $\alpha^{\#}$ продолжается с фундаментальной группы (вложенной в качестве орбиты $o.\, \pi_1(M) \subset \widetilde{M}$) до аффинного отображения $\hat{f} \in \mathrm{Aff}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; A, \Pi_r)$, т. е.

$$f(y \cdot \gamma) = f(y)\, \alpha^{\#}(\gamma); \quad y \in \widetilde{M}; \quad \gamma \in \pi_1(M). \tag{4.4}$$

В рассматриваемом примере $M = G/H$; $\widetilde{M} = G/H_0$; $\pi_1(M) = H/H_0$; и множество $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), A)$ можно отождествить с множеством $\mathrm{Hom}(H, H_0; A, 1)$ гомоморфизмов из H в A, равных $1 \in A$ на H_0. Из предложения 3.2 следует

Теорема 4.1 (обобщенная теорема Ляпунова — Флоке). *Вполне интегрируемая 1-форма α на редуктивном однородном пространстве $M = G/H$ (G односвязна) тогда и только тогда приводима к постоянной (в смысле канонической связности) форме, когда ее гомоморфизм монодромии $\alpha^{\#}$, рассматриваемый как элемент множества* $\mathrm{Hom}(H, H_0; A, 1)$, *продолжается до антиголоморфизма* $F \in a\widehat{\mathrm{Hol}}(G, H_0; A, 1)$, *т. е. до отображения* $F \in C^\infty(G, A)$, *удовлетворяющего условиям* (3.20), (3.21), *такого, что* $F|_H = \alpha^{\#}$.

§ 5. Случай дискретной подгруппы

Рассмотрим теперь случай, когда подгруппа H дискретна:

$$H_0 = \{1\};\ \widetilde{M} = G;\ \pi_1(M) = H;\ \mathbf{h} = 0;\ \mathbf{m} = \mathbf{g};\ \mathrm{HL}_0 = \{1\};$$
$$\mathrm{HL} = H;\ \mathfrak{Hl} = G;\ \mathrm{Curv}_0 = 0;\ \mathrm{Tor}_0(X, Y) = -[X, Y],\ X, Y \in \mathbf{g}.$$

Предложение 2.1 приобретает следующий вид.

Предложение 5.1. *Множество* **a***-значных ковекторов в точке $o \in M$, порождающих постоянные вполне интегрируемые 1-формы на $M = G/H$ (H дискретна), состоит из H-инвариантных, т. е. удовлетворяющих условию*

$$\langle \alpha_0, (\mathrm{Ad}\, h) X \rangle = \langle \alpha_0, X \rangle;\ X \in \mathbf{g};\ h \in H, \tag{5.1}$$

антигомоморфизмов алгебр Ли $\alpha_0 \in L(\mathbf{g}, \mathbf{a})$:

$$\langle \alpha_0, [X, Y] \rangle = -[\langle \alpha_0, X \rangle, \langle \alpha_0, Y \rangle];\ X, Y \in \mathbf{g}. \tag{5.2}$$

Теорема 3.1 выглядит следующим образом.

Предложение 5.2. *Множество* $\mathrm{Aff}_0(M, \nabla; A, \Pi_r)$ *находится во взаимно однозначном соответствии*

$$p^*: \mathrm{Aff}_0(M, \nabla; A, \Pi_r) \xrightarrow{\approx} a\,\mathrm{Hom}(G, H; A, 1) \tag{5.3}$$

с множеством $a\,\mathrm{Hom}(G, H; A, 1)$ *антигомоморфизмов из G в A, равных $1 \in A$ на H.*

Замечание 5.1. Антигомоморфизмы групп Ли в предложении 5.2 естественно соответствуют антигомоморфизмам алгебр Ли в предложении 5.1.

Предложению 5.2 будет соответствовать

Предложение 5.3. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
{[\mathfrak{L}^1_{\mathrm{const}}(G, \Pi_l; \mathbf{a})]^H} \arrow[r, "\mathrm{ev}_1"] & {[a\,\mathrm{Hom}(\mathbf{g}, \mathbf{a})]^H} \\
\widehat{\mathrm{Aff}}(G, \Pi_l; A, \Pi_r) \arrow[u, "D"] \arrow[r, "="', "\mathrm{id}"] & a\widehat{\mathrm{Hom}}(G, A) \arrow[u, "{*,1}"']
\end{tikzcd}, \tag{5.4}$$

где $[\mathfrak{L}^1_{\mathrm{const}}(G, \Pi_l; \mathbf{a})]^H$ *оказывается множеством лево-G и одновременно право-H-инвариантных вполне интегрируемых 1-форм на G;* $a\widehat{\mathrm{Hom}}(G, A)$ — *множество антигомоморфизмов групп Ли $F: G \to A$, удовлетворяющих условию*

$$F(gh) = F(g)F(h);\ g \in G;\ h \in H. \tag{5.5}$$

Замечание 5.2. Для антигомоморфизмов F условие (5.5) эквивалентно условию

$$F(hgh^{-1}) = (F \circ \mathrm{Int}\, h)(g) = F(g);\ g \in G;\ h \in H, \tag{5.6}$$

что соответствует инвариантности (в смысле действия Ad; см. (5.1)) антигомоморфизма алгебр Ли $\alpha_0 = F_{*,1}$.

Замечание 5.3. В соответствии со свойством (iv) предложения 3.3 получаем следующее свойство антигомоморфизмов $F \in a\widehat{\mathrm{Hom}}(G, A)$: любой элемент $F(H)$ коммутирует с любым элементом $F(G)$; в частности, подгруппа $F(H)$ группы A коммутативна.

Теорема 4.1 формулируется для рассматриваемого случая следующим образом.

Предложение 5.4. *Вполне интегрируемая 1-форма α на однородном пространстве $M = G/H$ (G односвязна, H дискретна) тогда и только тогда приводима к постоянной (в смысле канонической связности, т. е. в данном случае — левоинвариантной) форме, когда ее гомоморфизм монодромии $\alpha^{\#}: H \to A$ продолжается до антигомоморфизма $F: G \to A$, удовлетворяющего условию* (5.5).

Замечание 5.4. Из замечания 5.3 следует, что необходимым условием приводимости является коммутативность подгруппы $\alpha^{\#}(H) \subset A$.

Сопоставим, наконец, предложение 5.4 с результатом А. Л. Онищика из [9] (см. также [6], § 4.2).

Если подгруппа H дискретна, то на $M = G/H$ может быть опущен правый параллелизм Π_r группы G. Полученный параллелизм $\hat{\Pi}$ на M определяет связность $\hat{\nabla}$ нулевой кривизны, отличную от связности ∇. Постоянными в смысле $\hat{\nabla}$ 1-формами на M будут те формы, поднятия которых на G правоинвариантны. В [9] доказано, что вполне интегрируемая 1-форма α на M тогда и только тогда приводима к постоянной в смысле $\hat{\nabla}$ форме, когда ее гомоморфизм монодромии $\alpha^{\#}: H \to A$ продолжается до гомоморфизма групп Ли $F: G \to A$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1. 344 с.; Т. 2. 416 с.
2. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces.— Amer. J. Math., 1954, v. 76, № 1, p. 33—65.
3. Егиазарян К. М. Об инвариантных связностях на редуктивных однородных пространствах.— Изв. вузов. Матем., 1979, № 1, с. 79—81.
4. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. М., 1975. 350 с.
5. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. (Гл. 1—3.) М., 1976. 496 с.
6. Крейн С. Г., Яцкин Н. И. Линейные дифференциальные уравнения на многообразиях. Воронеж, 1980. 132 с.
7. Волф Дж. Пространства постоянной кривизны М., 1982. 480 с.
8. Онищик А. Л. Некоторые понятия и применения теории неабелевых когомологий.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 17, с. 45—88.
9. Онищик А. Л. О вполне интегрируемых уравнениях на однородных пространствах.— Матем. заметки, 1971, т. 9, № 4, с. 365—373.

г. Иваново

Поступила
18.10.1983