## ЛИТЕРАТУРА

1. Edrei A. Sums of deficiencies of meromorphic functions // J. Anal. math.— 1965.— V. 14.— P. 79—107.
2. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.— 592 с.
3. Baernstein A. Proof of Edrei's conjecture // Proc. London Math. Soc.— 1973.— V. 26.— № 3.— P. 418—434.
4. Гольдберг А. А. К вопросу о связи между дефектом и отклонением мероморфной функции // Теория функций, функц. анализ и их прилож.—1978.—Т. 29.—С. 31—35.
5. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.—М.: Наука, 1966.—628 с.
6. Baernstein A. Integral means, univalent functions and circular symmetrization // Acta math.—1974.—V. 133.—№ 3—4.—P. 139—169.
7. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции.—М.: Наука, 1979.—320 с.
8. Крутинь В. И. О величинах дефектов Р. Неванлинны для мероморфных при $|z|<1$ функций // Изв. АН АрмССР. Сер. матем.—1973.—Т. 8.—№ 5.—С. 347—358.
9. Hayman W. K. On the characteristic of functions meromorphic in the plane and of their integrals // Proc. London Math. Soc.—1965.—V. 14 A.—P. 93—128.


г. Черкассы

Поступила
06.12.1988

*Н. И. Яцкин*

УДК 514.763

# ПОЧТИ ПРИВОДИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ

## § 1. Введение. Почти приводимость обыкновенных дифференциальных уравнений

Определение 1.1. Линейное дифференциальное уравнение (л.д.у.)

$$\dot{x} = \alpha(t)\, x, \tag{1.1}$$

где $x: I \to \boldsymbol{R}^n$, $\alpha: I \to \boldsymbol{gl}(n, \boldsymbol{R})$, $I \subset \boldsymbol{R}$, называется (см., напр., [1], с. 272) почти приводимым к уравнению

$$\dot{y} = \beta(t)\, y,$$

где $y: I \to \boldsymbol{R}^n$, $\beta: I \to \boldsymbol{gl}(n, \boldsymbol{R})$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется ляпуновское преобразование $y = Q_\varepsilon(t)\, x$, $t \in I$, переводящее уравнение (1.1) в уравнение

$$\dot{y} = \alpha_\varepsilon(t)\, y,$$

где $\alpha_\varepsilon = \dot{Q}_\varepsilon Q^{-1} + Q_\varepsilon \alpha Q_\varepsilon^{-1}$, $\|\beta - \alpha_\varepsilon\|_C = \sup\limits_t \|\beta(t) - \alpha_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$.

Будем обозначать факт почти приводимости символом $\alpha \overset{\to}{\sim} \beta$. Отношение $\overset{\to}{\sim}$ рефлексивно и транзитивно, но не симметрично [1] (с. 273—274).

Определение 1.1 можно переформулировать следующим образом (см. [2]—[4]):

$$\beta \in \overline{\operatorname{orb} \alpha},$$

т.е. функция $\beta$ принадлежит замыканию в пространстве $C(I, \boldsymbol{gl}(n, \boldsymbol{R}))$ ограниченных непрерывных матрично-значных функций на интервале $I \subset \boldsymbol{R}$ орбиты функции $\alpha$ относительно действия $\alpha \to \dot{L}L^{-1} + L\alpha L^{-1}$ группы ляпуновских замен (т.е. обратимо-значных матриц-функций $L(t)$, непрерывно дифференцируемых и ограниченных вместе с $L^{-1}(t)$ и $\dot{L}(t)$ на $I$).

Можно рассматривать другие классы функций $\alpha(t)$ и замен $L(t)$, напр., периодические функции и периодические замены (что соответствует рассмотрению л.д.у. на окружности). Нас будет интересовать понятие почти приводимости для л.д.у. на многообразиях.

## § 2. Абстрактная модель понятия почти приводимости

Рассмотрим топологическое пространство $\mathbf{X}$ и отношение эквивалентности $\overset{R}{\sim}$ на $\mathbf{X}$, соответствующее подмножеству $R \subset \mathbf{X} \times \mathbf{X}$, классы эквивалентности будем обозначать символом $\mathrm{cl}_R(x) = \{y \in \mathbf{X} : x \overset{R}{\sim} y\}$.

Определение 2.1. Назовем элемент $x \in \mathbf{X}$ почти приводимым к $y \in \mathbf{X}$ (что будем обозначать через $x \overset{R}{\gtrsim} y$), если

$$y \in \overline{\mathrm{cl}_R x}. \tag{2.1}$$

В случае открытого отношения эквивалентности (см. [5], с. 73) (2.1) влечет

$$\overline{\mathrm{cl}_R y} \subset \overline{\mathrm{cl}_R x}. \tag{2.2}$$

Из включения (2.2) следует транзитивность отношения $\overset{R}{\gtrsim}$. Так получается отношение предпорядка на $\mathbf{X}$, которое можно опустить до отношения предпорядка на фактор-пространстве $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}/\overset{R}{\sim}$:

$$[\hat{y} \leqslant \hat{x}] \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} [\hat{y} \in \overline{\{\hat{x}\}}] \Longleftrightarrow [\overline{\mathrm{cl}_R y} \subset \overline{\mathrm{cl}_R x}], \tag{2.3}$$

где $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{\mathbf{X}}$.

Попутно возникает вопрос о том, когда отношение (2.3) является отношением порядка. Введем отношение симметризованной почти приводимости на $\mathbf{X}$.

Определение 2.2. Для $x, y \in \mathbf{X}$ будем писать $x \overset{R}{\rightleftarrows} y$, если $x \overset{R}{\gtrsim} y$ и одновременно $y \overset{R}{\gtrsim} x$.

Отношение $\overset{R}{\rightleftarrows}$ представляет собой новое отношение эквивалентности на $\mathbf{X}$. Справедливо

Предложение 2.1. *Пусть $\overset{R}{\sim}$ — открытое отношение эквивалентности на топологическом пространстве $\mathbf{X}$. Следующие четыре условия эквивалентны:*

(i) *отношение $\overset{R}{\rightleftarrows}$ совпадает с отношением $\overset{R}{\sim}$;*

(ii) *из совпадения замыканий классов эквивалентности $\overline{\mathrm{cl}_R y} = \overline{\mathrm{cl}_R x}$ следует совпадение самих классов $\mathrm{cl}_R y = \mathrm{cl}_R x$;*

(iii) *отношение (2.3) является отношением порядка на фактор-пространстве $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}/\overset{R}{\sim}$;*

(iv) *фактор-пространство удовлетворяет аксиоме Хаусдорфа $T_0$.*

Условие открытости отношения эквивалентности $\overset{R}{\sim}$ выполнено, в частности, для отношения, определенного действием $\rho$ произвольной группы $\mathbf{G}$ на $\mathbf{X}$, если каждое отображение $\rho(g) : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, $g \in \mathbf{G}$, непрерывно (и, следовательно, гомеоморфизм). В этом случае классы эквивалентности именуются орбитами и обозначаются через $\mathrm{orb}_{\mathbf{G}} x$; факт почти приводимости обозначается через $x \overset{\mathbf{G}, \tau}{\gtrsim} y$ (в случае необходимости, кроме группы $\mathbf{G}$, указывается топология $\tau$ в $\mathbf{X}$).

Пример 2.1. Рассмотрим группу матриц $\mathrm{GL}(n, C)$ и ее действие на себе сопряжениями. Матрица $A$ почти сопрягаема к матрице $B$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует матрица $S_\varepsilon \in \mathrm{GL}(n, C)$ такая, что $\|B - S_\varepsilon A S_\varepsilon^{-1}\| < \varepsilon$. Известно (см. [6], с. 251), что пространство орбит (т.е. пространство классов подобных матриц) является $T_0$-пространством. Таким образом, если $A$ почти сопрягаема к $B$ и $B$ почти сопрягаема к $A$, то $A$ и $B$ подобны. Этот факт можно, конечно, доказать и непосредственно.

Рассмотрим теперь абстрактную схему характеризации отношения почти приводимости в одном пространстве с помощью аналогичного отношения в другом (в приложениях — более простом) пространстве.

Рассмотрим множества $\mathbf{X}_i$ с заданными на них действиями $\rho_i$ групп $\mathbf{G}_i$ ($i=1, 2$), а также гомоморфизм групп $f:\mathbf{G}_1\to\mathbf{G}_2$ и отображение $F:\mathbf{X}_1\to\mathbf{X}_2$ такие, что при любом $g_1\in\mathbf{G}_1$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_1 & \xrightarrow{F} & \mathbf{X}_2 \\ \rho_1(g_1)\downarrow & & \downarrow\rho_2(f(g_1)) \\ \mathbf{X}_1 & \xrightarrow{F} & \mathbf{X}_2 \end{array} \qquad (2.4)$$

коммутативна. Тогда определено фактор-отображение $\hat{F}:\hat{\mathbf{X}}_1\to\hat{\mathbf{X}}_2$:

$$\hat{F}(\mathrm{orb}_{\mathbf{G}_1}x_1)=\mathrm{orb}_{\mathbf{G}_2}F(x_1),\ x_1\in\mathbf{X}_1. \qquad (2.5)$$

Непосредственно устанавливается (ср. [7])

Предложение 2.2. *Если гомоморфизм $f$ является эпиморфизмом, то*

$$\mathrm{orb}_{\mathbf{G}_2}F(x_1)=F(\mathrm{orb}_{\mathbf{G}_1}x_1),\ x_1\in\mathbf{X}_1,$$

*а если, кроме того, фактор-отображение* (2.5) *инъективно, то*

$$\mathrm{orb}_{\mathbf{G}_1}x_1=F^{-1}(\mathrm{orb}_{\mathbf{G}_2}F(x_1)),\ x_1\in\mathbf{X}_1.$$

Замечание 2.1. Предположение инъективности $\hat{F}$ означает (для $x,\ y\in\mathbf{X}_1$)

$$[x\overset{\mathbf{G}_1}{\sim}y]\Leftrightarrow[F(x)\overset{\mathbf{G}_2}{\sim}F(y)]. \qquad (2.6)$$

Пусть теперь множества $\mathbf{X}_i$ ($i=1, 2$) снабжены топологиями $\tau_i$. Справедливо

Предложение 2.3. *Если (в дополнение к предположениям предложения 2.2) отображение $F$ непрерывно и открыто относительно топологий $\tau_i$ ($i=1, 2$), то*

$$\overline{\mathrm{orb}_{\mathbf{G}_1}x_1}=F^{-1}(\overline{\mathrm{orb}_{\mathbf{G}_2}F(x_1)}),\ x_1\in\mathbf{X}_1.$$

Из последнего предложения вытекает описание отношения почти приводимости, аналогичное по форме (2.6).

Следствие 2.1. В предположениях предложения 2.3 справедливо

$$[x\overset{\mathbf{G}_1,\ \tau_1}{\simeq}y]\Leftrightarrow[F(x)\overset{\mathbf{G}_2,\ \tau_2}{\simeq}F(y)],\ x,\ y\in\mathbf{X}_1.$$

Данное следствие можно затем применять и к симметризованной почти приводимости.

## § 3. Вполне интегрируемые л. д. у. на многообразиях и их характеризация гомоморфизмами монодромии

В изложении данного круга вопросов мы в основном следуем [7], [8]. Линейное дифференциальное уравнение на многообразии $M$—это уравнение вида

$$dX\cdot X^{-1}=\alpha, \qquad (3.1)$$

где $X:M\to A$ — неизвестная функция на $M$ со значениями в некоторой (для простоты матричной) группе Ли $A$; $\alpha\in\Lambda^1(M,\ \mathfrak{a})$ — заданная 1-форма на $M$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{a}$ группы Ли $A$.

В локальных координатах ($t^1$, ..., $t^m$) на $M$ уравнение (3.1) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial X}{\partial t^i}=\alpha_i(t)X,\quad i=1,\ \dots,\ m,\ \alpha=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)\,dt^i.$$

Условия полной интегрируемости уравнения (3.1) имеют вид (см. [7], [8]):

$$d\alpha = \frac{1}{2}[\alpha, \alpha],$$

или в локальных координатах:

$$\frac{\partial\alpha_j}{\partial t^i} - \frac{\partial\alpha_i}{\partial t^j} = [\alpha_i, \alpha_j], \quad 1 \leqslant i < j \leqslant m.$$

В качестве множества $\mathbf{X}_1$ из § 2 будет фигурировать множество вполне интегрируемых 1-форм $\mathcal{L}^1(M, \mathrm{a})$.

Уравнение (3.1) поднимается на универсальное накрывающее многообразие $\pi: \widetilde{M} \to M$ (с отмеченной точкой $\widetilde{p}_0 \in \widetilde{M}$) и решается задача

$$dX_\alpha \cdot X_\alpha^{-1} = \widetilde{\alpha}, \quad X_\alpha(\widetilde{p}_0) = 1,$$

где $\widetilde{\alpha} = \pi^*\alpha$, 1 — единица группы $A$, $X_\alpha$ называется фундаментальным решением, оно удовлетворяет условию

$$X_\alpha(t\gamma) = X_\alpha(t)\, X_\alpha(\widetilde{p}_0\gamma), \quad t \in \widetilde{M}, \quad \gamma \in \pi_1(M),$$

которое позволяет определить формулой $\alpha^{\#}(\gamma) = X_\alpha(\widetilde{p}_0\gamma)$ гомоморфизм $\alpha^{\#}: \pi_1(M) \to A$ фундаментальной группы многообразия $M$ (действующей справа на $\widetilde{M}$) в группу Ли $A$.

В качестве множества $\mathbf{X}_2$ из § 2 будет фигурировать множество гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), A)$, а в качестве отображения $F$ будет выступать отображение монодромии

$$\# : \mathcal{L}^1(M, \mathrm{a}) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M), A).$$

На множестве $\mathbf{X}_1 = \mathcal{L}^1(M, \mathrm{a})$ действует группа $\mathbf{G}_1 = C^\infty(M, A)$:

$$\rho_1(Q)\,\alpha = dQ \cdot Q^{-1} + Q\alpha Q^{-1}, \quad Q \in \mathbf{G}_1, \quad \alpha \in \mathbf{X}_1.$$

На множестве $\mathbf{X}_2 = \mathrm{Hom}(\pi_1(M), A)$ действует (сопряжениями) группа $A$:

$$(\rho_2(Q_0)\,h)(\gamma) = Q_0 h(\gamma) Q_0^{-1}, \quad Q_0 \in A, \quad h \in \mathbf{X}_2, \quad \gamma \in \pi_1(M).$$

Имеется эпиморфизм $f: \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$, заданный формулой $f(Q) = Q(p_0)$, где $p_0 = \pi(\widetilde{p}_0)$ — отмеченная точка в $M$. Описанные действия и отображения согласованы так, что диаграмма (2.4) коммутативна. Более того, отображение $\hat{F}$ инъективно, что является содержанием следующего утверждения.

Предложение 3.1 [7]. *Два вполне интегрируемых л. д. у. с формами $\alpha$, $\beta$ приводимы одно к другому тогда и только тогда, когда их гомоморфизмы монодромии $\alpha^{\#}$, $\beta^{\#}$ сопряжены.*

Таким образом, мы оказываемся в условиях предложения 2.2.

## § 4. Почти приводимость л. д. у. на многообразиях

Определение 4.1. Топологии $\tau_i$ $(i = 1, 2)$ в множествах $\mathbf{X}_1 = \mathcal{L}^1(M, \mathrm{a})$ $\mathbf{X}_2 = \mathrm{Hom}(\pi_1(M), A)$ называются допустимыми, если отображение $F = \#$ непрерывно и открыто (т.е. выполнены условия предложения 2.3).

Из следствия 2.1 вытекает

Предложение 4.1. *Если в множестве вполне интегрируемых 1-форм $\mathcal{L}^1(M, \mathrm{a})$ и в множестве гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), A)$ введены допустимые топологии, то форма $\alpha$ почти приводима к форме $\beta$ тогда и только тогда, когда ее гомоморфизм монодромии $\alpha^{\#}$ почти приводим (т.е. почти сопрягаем) к гомоморфизму $\beta^{\#}$.*

Остается подобрать допустимые топологии. В работе [9] утверждается выполнение условий допустимости в следующей ситуации: 1) $M$ — компактное многообразие и, следовательно, группа $\pi_1(M)$ имеет конечное число образующих $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ и конечное число определяющих соотношений, что позволяет вложить $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), A)$ в качестве аналитического подмножества в $A^r$ и навести таким образом топологию $\tau_2$; 2) в $\mathcal{L}^1(M, \mathrm{a})$ вводится топология $\tau_1$, определяемая соболевской нормой достаточно высокого порядка. Получаем

Предложение 4.2. *В описанных выше предположениях форма $\alpha$ почти приводима к форме $\beta$ тогда и только тогда, когда набор матриц $\{\alpha^{\#}(\gamma_i)\}_{i=1}^r$ почти сопрягаем к $\{\beta^{\#}(\gamma_i)\}_{i=1}^r$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $Q_\varepsilon \in A$ такой, что*

$$\|\beta^{\#}(\gamma_i) - Q_\varepsilon \alpha^{\#}(\gamma_i) Q_\varepsilon^{-1}\| < \varepsilon, \ i = 1, \ldots, r.$$

Пример 4.1. В простейшем случае $M = S^1 = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ (уравнение на окружности): $\pi_1(M) = \boldsymbol{Z}$, $\alpha^{\#}(1)$ — матрица монодромии, соответствующая форме $\alpha$. Форма $\alpha$ почти приводима к форме $\beta$ тогда и только тогда, когда матрица $\alpha^{\#}(1)$ почти сопрягаема к матрице $\beta^{\#}(1)$, т.е. $\beta^{\#}(1) \in \overline{\mathrm{orb}\,\alpha^{\#}(1)}$. Описание классов подобных матриц и их замыканий см. в [10]. С учетом примера 2.1 можно сделать также вывод о том, что симметризованная почти приводимость $\alpha \overset{\approx}{\leftrightarrow} \beta$ влечет в данном случае приводимость $\alpha \sim \beta$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.— М.: Наука, 1966.— 576 с.
2. Lillo J. Continuous matrices and the stability theory of differential systems // Math. Z.— 1960.— Bd. 73.— № 1.— S. 45—58.
3. Lillo J. Approximate similarity and almost periodic matrices // Proc. Amer. Math. Soc.— 1961.— V. 12.— № 3.— P. 400—407.
4. Lillo J. Continuous matrices and approximate similarity // Trans. Amer. Math. Soc.— 1962.— V. 104.— № 3.— P. 412—419.
5. Бурбаки Н. Теория множеств.— М.: Мир, 1965.—456 с.
6. Кириллов А. А. Элементы теории представлений.— М.: Наука, 1972.— 336 с.
7. Онищик А. Л. Некоторые понятия и применения теории неабелевых когомологий // Тр. Моск. матем. об-ва.— 1967.— Т. 17.— С. 45—88.
8. Крейн С. Г., Яцкин Н. И. Линейные дифференциальные уравнения на многообразиях // Воронеж, 1980.— 131 с.
9. Онищик А. Л. О вполне интегрируемых уравнениях на однородных пространствах // Матем. заметки.— 1970.— Т. 9.— № 4.— С. 365—373.
10. Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов.— М.: Мир, 1987.— 312 с.


г. Иваново

Поступила
18.07.1988

# КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

***Г. В. Давыдов, И. М. Давыдова***

УДК 519.854

## О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ $Ax = 0$, $x \geqslant 0$, С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть $A = A[1:m, 1:n]$ — матрица размерности $m \times n$ без нулевых строк и столбцов и $P_A = \{B[1:m, 1:n] \mid \mathrm{sgn}\, A[i, j] = \mathrm{sgn}\, B[i, j]$ при любых $i \in 1:m$, $j \in 1:n\}$.

Исследуем вопрос: при каких условиях система уравнений $Bx = 0$ имеет ненулевое неотрицательное решение для любой матрицы $B \in P_A$. Оказывается, для этого необходимо и достаточно, чтобы при любом умножении строк матрицы $A$ на 1 или —1 в получившейся