*Н. И. Яцкин*

УДК 512.554

# О ЛОКАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ СТАТИКИ

1. *Локальные алгебры Ли.* В соответствии с [1] (см. также [2]—[4]) структура локальной алгебры Ли в пространстве $C^\infty(M)$ гладких функций на многообразии $M$ определяется контравариантными векторным и бивекторным полями ($a$ и $c$ соответственно) с формулой для скобки

$$[u, v] = i(c)(du \wedge dv) + ui(a)dv - vi(a)du, \tag{1}$$

причем $a$ и $c$ должны удовлетворять условиям $[a, c] = 0$; $a \wedge c = -(1/2)[c, c]$, содержащим скобку Схоутена поливекторных полей.

В данной заметке мы рассматриваем пример скобки (1), порожденный „$n$-мерной статикой".

2. *Статика систем скользящих векторов.* Пусть $M = \boldsymbol{R}^n$, $F = \{(r_i, f_i)\}_{i=1}^N \subset \boldsymbol{R}^{2n}$ — система скользящих векторов в $\boldsymbol{R}^n$. Две системы называются эквивалентными, если одна из них получается из другой за конечное число шагов следующих типов:

1) сдвиг вектора $f_i$ по прямой, определяемой этим вектором;

2) сложение двух векторов, приложенных в одной и той же точке $r_i$, или же разложение вектора на два слагаемых, приложенных в той же точке;

3) добавление (исключение) нулевого вектора в произвольной точке.

Главным вектором системы $F$ называется (свободный) вектор

$$R(F) = \sum_{i=1}^N f_i. \tag{2}$$

Главным моментом $F$ относительно $x \in \boldsymbol{R}^n$ называется бивектор

$$M_x(F) = \sum_{i=1}^N (r_i - x) \wedge f_i = M_0(F) - x \wedge R(F). \tag{3}$$

„Основной теоремой статики" может быть названо следующее

Предложение 1. $[F \sim G] \Leftrightarrow [(R(F) = R(G)) \,\&\, (M_0(F) = M_0(G))]$.

Это утверждение фактически содержится в [5], однако может быть доказано иначе, на основе теоремы (см., напр., [6]) о каноническом виде бивектора. Одновременно получается аналог теоремы Пуансо (см., напр., [7]) о приведении произвольной системы скользящих векторов к одному вектору и нескольким парам.

3. *Локальная алгебра Ли $n$-мерной статики.* Формулы (2) и (3) определяют на $\boldsymbol{R}^n$ постоянное векторное и аффинное (линейное неоднородное) бивекторное поля

$$a(x) = a = R(F),\ c(x) = M_x(F) = c(0) - x \wedge a. \tag{4}$$

Предложение 2. *Векторное и бивекторное поля* (4) *определяют структуру локальной алгебры Ли в* $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$.

Полученная локальная алгебра Ли обладает следующими свойствами

Предложение 3. 1) *Подпространство* $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^n)$ *аффинных функций образует подалгебру Ли размерности* $n+1$ *в алгебре* $\mathfrak{g} = C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$.

2) *Одномерное подпространство констант образует идеал в алгебре Ли* $\mathfrak{g}_0$

3) *Всякое подпространство в* $\mathfrak{g}_0$, *содержащее этот идеал, является подалгеброй Ли в* $\mathfrak{g}_0$.

Все эти свойства выводятся из формул для скобки

$$[x^i, x^j] = c^{ij}(-x),\ [1, x^i] = a^i,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n. \tag{5}$$

Замечание. Обратим внимание на то, что момент в (5) вычисляется в точке $-x$, симметричной $x$ относительно начала координат.

4. *Орбиты локальной алгебры Ли статики.* Согласно [1] всякая локальная алгебра Ли на многообразии $M$ распадается на транзитивные локальные алгебры Ли на подмногообразиях (орбитах) $M_\sigma$. Последние являются интегральными многообразиями распределения $P(x) \subset T_x M$ (переменной размерности $\dim P(x)$). Это распределение порождается вектором $a(x)$ и всеми векторами вида $i(c(x))\beta$, где $\beta \in T_x^* M$.

В нашем примере тип стратификации $M = \boldsymbol{R}^n$ на орбиты алгебры $\mathfrak{g}$ определяется рангом $2r$ бивектора $c(0)$, пространством $E^{2r} \subset \boldsymbol{R}^n$ этого бивектора и расположением вектора $a$ относительно $E^{2r}$. Особую роль играет орбита минимальной размерности $L_0$, которая:

(i) совпадает с $E^{2r}$, если $a = 0$;

(ii) представляет собой $(2r+1)$-мерное подпространство $E^{2r+1}$, порожденное $E^{2r}$ и $a$, если $a \notin E^{2r}$;

(iii) представляет собой $(2r-1)$-мерную аффинную плоскость $H^{2r-1} \subset E^{2r}$, если $a \in E^{2r}$ (причем $a \notin E^{2r-1}$, где $E^{2r-1}$ — подпространство в $E^{2r}$, полученное сдвигом $H^{2r-1}$ в начало координат). Переносом начала координат в произвольную точку плоскости $H^{2r-1}$ ситуация (iii) сводится к ситуации (ii) с уменьшением ранга на две единицы.

Предложение 4. *Возможны следующие типы стратификаций пространства $\boldsymbol{R}^n$ на орбиты локальной алгебры Ли статики $\mathfrak{g}$:*

1) *если $a = 0$, то орбиты суть четномерные плоскости, параллельные пространству $L_0$ бивектора $c(0)$;*

2) *если $a \neq 0$, то существует орбита $L_0$ минимальной (нечетной) размерности, представляющая собой аффинную плоскость $H^k \subset \boldsymbol{R}^n$; все остальные орбиты представляют собой всевозможные открытые $(k+1)$-мерные полуплоскости с границей $L_0$.*

Замечание. Предложение 4 обобщает на $n$-мерную статику анализ Пуансо частных случаев приведения системы скользящих векторов в $\boldsymbol{R}^3$. Систему $F$ можно назвать приводимой: в случае 1) — к „$r$-паре"; в случае 2) — к „мотору с $r$ (или $r-1$) приводами". Термин „мотор" (для $n = 3$, $r = 1$) предложен А. П. Котельниковым (см. по этому поводу [7]). В случае $r = 0$ мотор вырождается в один „равнодействующий" вектор. Если еще и $a = 0$, то орбиты суть точки („уравновешенная" система).

5. *Алгебра аффинных функций.* Подпространство $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^n)$ не меняется при аффинной замене координат. Перенося начало координат в точку орбиты $L_0$ и вводя координаты так, что $c(0) = \sum_{i=1}^{r} \partial_i \wedge \partial_{i+r}$, $a = \partial_{2r+1}$ (если $a \neq 0$), где $\partial_i = \partial/\partial x^i$, получим

Предложение 5. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ разрешима, причем изоморфна полупрямой сумме нильпотентного идеала, изоморфного $(2r+1)$-мерной алгебре Гейзенберга $\mathfrak{h}^{2r+1}$, и одномерной подалгебры $R^1$ плюс прямое коммутативное слагаемое $\boldsymbol{R}^{n-2r-1}$.*

В предложении 5 алгебра $\mathfrak{h}^{2r+1}$ (см. [8]) порождена $1, x^1, x^2, \ldots, x^{2r}$; одномерная подалгебра $R^1$ порождена $x^{2r+1}$; действие $\mathrm{ad}(x^{2r+1})$ на $\mathfrak{h}^{2r+1}$ задается матрицей $\mathrm{diag}(-1, -1/2, \ldots, -1/2)$, если, конечно, $a \neq 0$ (в случае $a = 0$ $R^1$ добавляется к прямому коммутативному слагаемому). Непосредственно выводится также

Предложение 6. 1) *В случае $a \neq 0$ (в описанных выше координатах) центр алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ состоит из линейных функций от $x^{2r+2}, \ldots, x^n$. Таков же и центр всей алгебры $\mathfrak{g}$.*

2) *В случае $a = 0$ центр $\mathfrak{g}_0$ состоит из аффинных (а центр $\mathfrak{g}$ — из всех гладких) функций от $x^{2r+1}, \ldots, x^n$.*

6. *Гомоморфизм в алгебру векторных полей.* Согласно [4] определен гомоморфизм локальной алгебры Ли $\mathfrak{g} = C^\infty(M)$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{X}(M)$ векторных полей

$$u \to X_u = u \cdot a + [c, u], \; u \in \mathfrak{g}. \tag{6}$$

Ядром (6) является центр $\mathfrak{g}$. Вычисление (6) на координатных функциях дает ($a \neq 0$):

$$X_1 = \partial_{2r+1},\ X_{x^j} = 0,\ j = 2r+2, \ldots, n,$$

$$X_{x^i} = \partial_{r+i} + \frac{1}{2} x^i \partial_{2r+1},\ X_{x^{r+i}} = -\partial_i + \frac{1}{2} x^{r+i} \partial_{2r+1},\ i = 1, \ldots, r,$$

$$X_{x^{2r+1}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2r} x^i \partial_i + \sum_{j=2r+1}^{n} x^j \partial_j.$$

Приведем также формулу для скобки функций $u,\ v \in \mathfrak{g}$:

$$[u,\ v] = \sum_{i=1}^{r} (\partial_i u\, \partial_{i+r} v - \partial_{i+r} u\, \partial_i v) +$$

$$+ \partial_{2r+1} u \left\{\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2r} x^i \partial_i v - v\right) + \sum_{j=2r+2}^{n} x^j \partial_j v\right\} - \partial_{2r+1} v \left\{\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2r} x^i \partial_i u - u\right) + \sum_{j=2r+2}^{n} x^j \partial_j u\right\},$$

что является (вырожденным) вариантом контактной скобки Лагранжа (ср. [9], с. 12).

7. *Аффинные локальные алгебры Ли.* Назовем локальную алгебру Ли $\mathfrak{g} = C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ аффинной, если выполнено утверждение 1) предложения 3, т. е. если подпространство $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Aff}(\boldsymbol{R}^n)$ является подалгеброй. В этом случае функции $a^i(x)$ и $s^{ij}(x) = [x^i,\ x^j]$ являются аффинными функциями, однако компоненты бивектора $c^{ij}(x)$ могут оказаться квадратичными. Назовем $\mathfrak{g}$ идеально аффинной, если, дополнительно к утверждению 1), выполнено утверждение 2) предложения 3, т. е. константы образуют идеал в $\mathfrak{g}_0$. В этом случае $a^i = \mathrm{const}$ и компоненты бивектора $c^{ij}(x)$ — аффинные функции. И, наконец, назовем $\mathfrak{g}$ строго идеально аффинной, если, дополнительно к утверждениям 1) и 2), выполнено также и свойство 3) предложения 3. Совокупность свойств 1)—3) почти однозначно характеризует локальную алгебру Ли статики. Точнее, справедливо

Предложение 7. *Если локальная алгебра Ли $\mathfrak{g} = C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ является строго идеально аффинной, то компоненты бивектора $c$ имеют вид*

$$c^{ij}(x) = c_0^{ij} + \lambda (a^j x^i - a^i x^j),\ \lambda = \mathrm{const}, \tag{7}$$

*где при $\lambda = -1/2$ коэффициенты $a^i$ и $c_0^{ij}$ произвольны (и тогда формула (7) задает алгебру Ли статики), а при $\lambda \neq -1/2$ они должны удовлетворять дополнительному условию $\sum\limits_{\circlearrowleft} a^i c_0^{jk} = 0$ (циклическая сумма).*

## ЛИТЕРАТУРА


1. Кириллов А. А. Локальные алгебры Ли // УМН.—1976.—Т. 31, вып. 4.— С. 57—76.
2. Кириллов А. А. Поправка // УМН.—1977.—Т. 32, вып. 1.— С. 268.
3. Кириллов А. А. Об инвариантных дифференциальных операторах на геометрических величинах // Функц. анализ и его прилож.—1977.—Т. 11.— № 2.— С. 39—44.
4. Lichnerowicz A. Sur les algebres des Lie locales de Kirillov-Shiga // C. r. Acad. sci.—1983.—V. 296.— № 22.— P. 915—920.
5. Розенфельд Б. А., Климанова Т. Н., Пецко Н. Д. Проективная теория векторов // Изв. вузов. Математика.—1962.— № 2.— С. 130—141; № 3.— С. 122—130.
6. Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра.— М.: ГИФМЛ, 1962.— 456 с.
7. Диментенберг Ф. М. Теория винтов и ее приложения.— М.: Наука, 1978.— 327 с.
8. Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Онищик А. Л. Строение групп и алгебр Ли // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем.— 1989.— Т. 41.— С. 5—258.
9. Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли.— М.: Наука, 1984.— 272 с.


г. Иваново


Поступила
27.08.1990