УДК 515.12, 515.146.2

Е. Э. Федорова, Н. И. Яцкин

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНЕЧНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

1. Конечные топологические пространства и ориентированные графы. Пусть $X-$ конечное множество. Топология Ω в множестве X может быть задана (см. [1, с.12]) с помощью оператора замыкания

$$\mathrm{cl} : 2^X \to 2^X, \tag{1}$$

удовлетворяющего условиям

$$\mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset; \tag{2}$$

$$(\forall A \subset X) \ \ (A \subset \mathrm{cl}(A) \ ); \tag{3}$$

$$(\forall A, B \subset X) \ (\ \mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B) \ ); \tag{4}$$

$$(\forall A \subset X) \ (\ \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A) \ ). \tag{5}$$

В случае конечного множества X свойство (4) позволяет определять топологии, задавая замыкания одноточечных множеств $\{x\} \subset X$. Так возникает ориентированный граф (орграф) (X, Γ), где

$$\Gamma = \{ \ (x, y) \in X \times X : y \in \mathrm{cl}(\{x\}) \ \}, \tag{6}$$

который является рефлексивным, т.е. удовлетворяет условию

$$(\ \forall x \in X \ ) \ (\ (x, x) \in \Gamma \ ), \tag{7}$$

и транзитивным, т.е. удовлетворяет условию

$$(\ (x, y) \in \Gamma \ ) \wedge (\ (y, z) \in \Gamma \ ) \Rightarrow (\ (x, z) \in \Gamma \ ). \tag{8}$$

Это обстоятельство было использовано в работе [6] в задаче о перечислении (оценке количества) различных (с точностью до гомеоморфизма) топологий в множестве из n точек ($n-$точии).

На самом деле соответствие между топологическими многоточиями и орграфами представляет собой изоморфизм следующих категорий:

TOPF – категория конечных топологических пространств (полная подкатегория в категории **TOP**);

GROT – полная подкатегория рефлексивных транзитивных орграфов (в категории **GRO** всех орграфов, в которой морфизмами орграфа (X, Γ) в орграф (Y, Δ) служат такие отображения $f : X \to Y$, что $(x_1, x_2) \in \Gamma$ влечет $(f(x_1), f(x_2)) \in \Delta$, – см. [2, с.112]).

Точнее, справедлива следующая

Теорема 1 *Определен изоморфизм категорий*

$$F : \mathbf{TOPF} \to \mathbf{GROT}, \tag{9}$$

сопоставляющий:

– каждому топологическому многоточию (X, Ω) *– орграф* (X, Γ) *с множеством дуг* Γ, *заданным формулой (6),*

– каждому непрерывному отображению $f : (X_1, \Omega_1) \to (X_2, \Omega_2)$ *– это же самое отображение* f, *являющееся морфизмом орграфов.*

<u>Доказательство</u>. По каждому рефлексивному транзитивному орграфу (X, Γ) однозначно восстанавливается топология Ω в X с оператором замыкания

$$\mathrm{cl}(A) = \{\ y \in X : (\ \exists x \in A\ )\ (\ (x, y) \in \Gamma\ )\ \}, \tag{10}$$

причем свойства (2) – (5) проверяются непосредственно.

Отображение $f : X_1 \to X_2$ непрерывно (в смысле топологий Ω_1, Ω_2 в X_1, X_2 с операторами замыкания $\mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2$, соответственно) тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$(\ \forall A \subset X\ )\ (\ f(\mathrm{cl}_1(A)) \subset \mathrm{cl}_2(f(A))\ ). \tag{11}$$

В силу конечности множеств X_1, X_2 условие (11) достаточно проверять для одноточечных подмножеств $A = \{a\} \subset X_1$, и тогда оно становится эквивалентным определению морфизма орграфов. □

Пример 1. Три известных типа топологических двоеточий (слипшееся, связное и дискретное) приводят к орграфам, изображенным на рис. 1.

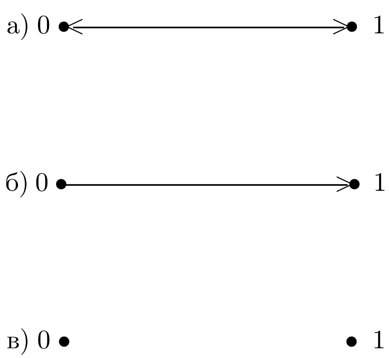

Рис. 1

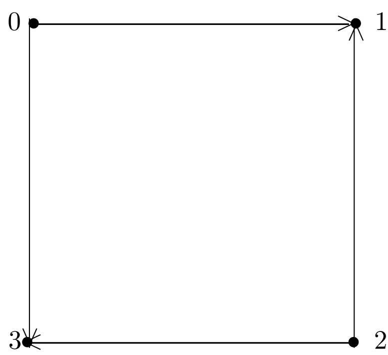

Рис. 2

Замечание 1. Здесь и далее нет нужды изображать петли, поскольку они имеются в каждой вершине.

Предложение 1. *Пусть (X, Ω)– топологическое многоточие. Вершины x, y в соответствующем орграфе (X, Γ)*

а) соединены парой встречных дуг, б) соединены одной дугой, в) не соединены тогда и только тогда, когда топология Ω индуцирует на двоеточии $D = \{x, y\}$

а) слипшуюся, б) связную, в) дискретную топологию соответственно.

Доказательство непосредственно следует из примера 1 и определения индуцированной топологии. $\square$

Пример 2. Рассмотрим 4-точие $D_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ с топологией

$$\Omega_4 = \{\ \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\ \}. \tag{12}$$

Ему соответствует орграф, изображенный на рис. 2.

2. Выражение топологических свойств многоточий на языке орграфов. Всякое топологическое свойство многоточия (X, Ω) может быть выражено с помощью соответствующего орграфа (X, Γ). Приведем результаты, относящиеся к свойствам связности (линейной связности) и отделимости.

Нам понадобится понятие слабо связного орграфа. Орграф называется [4, с.233]) слабо связным, если любые две его вершины могут быть соединены последовательностью дуг – безотносительно к ориентации последних.

Теорема 2 *Следующие три утверждения эквивалентны:*
1) многоточие (X, Ω) связно;
2) многоточие (X, Ω) линейно связно;
3) соответствующий орграф (X, Γ) слабо связен.

Доказательство.

1). Пусть пространство (X, Ω) связно. Возьмем какую-либо вершину $x_0 \in X$ и разобьем множество X на два подмножества: подмножество X_1 вершин, соединимых с x_0 последовательностью дуг в (X, Γ) (без учета ориентации последних), и – дополнительное подмножество X_2. Оба этих подмножества замкнуты в (X, Ω). В самом деле, если $x \in \mathrm{cl}(X_i)$, $i = 1, 2$, то вершина x соединима дугой с какой-либо вершиной из X_i и, следовательно, $x \in X_i$. В силу связности X должно выполняться $X_2 = \emptyset$, что влечет слабую связность (X, Γ).

2). Пусть орграф (X, Γ) слабо связен. Тогда для любых двух вершин $x, y \in X$ существует последовательность дуг и вершин

$$x = x_0;\ l_{01};\ x_1;\ l_{12};\ x_2;\ \ldots; l_{(N-1)N};\ x_N = y, \quad \text{где}$$

либо $l_{i(i+1)} = (x_i, x_{i+1}) \in \Gamma$, либо $l_{i(i+1)} = (x_{i+1}, x_i) \in \Gamma$ $(i = 0, 1, ..., N-1)$.

В обоих случаях по предложению 1 двоеточие $D_{(i-1)i} = \{x_{i-1}, x_i\}$ наследует недискретную топологию. Слипшееся двоеточие тривиальным образом линейно связно. Связное двоеточие также линейно связно (непрерывный путь φ, соединяющий открытую точку a связного двоеточия $\{a, b\}$ с замкнутой точкой b, может быть выбран, например, так: $\varphi(t) = a$, если $t \in [0, 1)$; $\varphi(1) = b$). Можно взять произведение путей описанного типа (и обратных к ним) так, чтобы получился непрерывный путь, соединяющий x и y. Таким образом, слабая связность (X, Γ) влечет линейную связность (и, следовательно, – связность) многоточия (X, Ω). $\square$

Замечание 2. С помощью таблиц из книги [4] устанавливается, что из 9 негомеоморфных 3-точий связными являются 6; из 33 негомеоморфных 4-точий связны 21.

Топологическое многоточие удовлетворяет аксиоме (T_1) лишь в случае дискретной топологии. Аксиома Колмогорова (T_0) эквивалентна [5, с.85] утверждению

$$(x \in \mathrm{cl}(\{y\})) \wedge (y \in \mathrm{cl}(\{x\})) \Rightarrow (x = y).$$

В силу этого справедливо следующее

Предложение 2 *Топологическое многоточие (X, Ω) удовлетворяет аксиоме (T_0) тогда и только тогда, когда соответствующий орграф (X, Γ) не имеет встречных дуг.* $\square$

Замечание 3. В работе [6] условие выполнения (T_0) сформулировано иначе: орграф (X, Γ) должен быть ацикличным. Для транзитивных орграфов ацикличность эквивалентна отсутствию встречных дуг.

<u>3. Топологические конструкции в категории **TOPF** и их соответствия в категории **GROT**</u>. Остановимся на конструкциях прямого произведения и букета топологических многоточий. Для их выражения на языке орграфов потребуется понятие прямого произведения орграфов, которое представляет собой орграф $(X \times Y, \Gamma \times \Delta)$, и понятие букета орграфов, который получается склейкой двух вершин $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ и склейкой двух петель в этих точках (если они были) в одну петлю. При умножении сохраняются свойства рефлексивности и транзитивности орграфов, при взятии букета транзитивность может нарушиться. Всякий орграф (X, Γ) можно вложить в минимальный транзитивный орграф $(X, \bar{\Gamma})$ с тем же множеством вершин [2, с.199]. Орграф $(X, \bar{\Gamma})$ называется транзитивным замыканием орграфа (X, Γ). Непосредственной проверкой устанавливается следующее

Предложение 3 *Прямому произведению топологических многоточий соответствует прямое произведение орграфов. Букету многоточий соответствует транзитивное замыкание букета орграфов.* □

С помощью предложения 3 и таблиц [4] доказывается следующее

Предложение 4 *Всякое 3-точие разлагается в букет двоеточий. Всякое 4-точие, кроме описанного в примере 2, разлагается в произведение двух двоеточий или в букет двоеточия и 3-точия.* □

4. Стягиваемость топологических многоточий. Рассмотрим вопрос о стягиваемости топологического $n-$точия. При $n = 2, 3, 4$ ответ дает следующая

Теорема 3 *Все связные $n-$точия при $n = 2, 3, 4$, кроме 4-точия D_4 из примера 2, стягиваемы, а это последнее 4-точие стягиваемым не является.*

Доказательство стягиваемости проводится с помощью явного построения стягивающей гомотопии, т.е. непрерывного отображения

$$F : X \times I \longrightarrow X, \tag{13}$$

удовлетворяющего условиям

$$F(x, 0) = x;\ F(x, 1) = x_0;\ x \in X,$$

где $I = [0, 1]-$единичный отрезок, x_0-одна из точек многоточия X. Так, например, для связного двоеточия $X = \{0, 1\}$ отображение (13) строится следующим образом: $F(0, t) = 0$ для любого $t \in I$; $F(1, t) = 0$ для любого $t \neq 0$; $F(1, 0) = 1$. (Заметим, что использовать для доказательства стягиваемости предложение 4 напрямую не удается, ибо точка склейки в букете не обязана быть замкнутой [3, с.288].

Для 4-точия с топологией (12) нестягиваемость может быть установлена непосредственно (сведением к противоречию предположения о существовании гомотопии (13)). Мы не будем проводить это рассуждение, поскольку *a posteriori* нестягиваемость D_4 будет вытекать из теоремы 4. □

5. Эрзац - окружность. Для нестягиваемого 4-точия $X = D_4$ с топологией $\Omega_X = \Omega_4$ построим универсальное накрывающее пространство Y. В качестве множества Y возьмем множество целых чисел $\mathbb{Z}$ с топологией Ω_Y, база $\mathcal{B}_Y$ которой задана следующим образом:

$$\mathcal{B}_Y = \{\ \{2k\}; \{2k, 2k + 1, 2k + 2\};\ k \in \mathbb{Z}\ \}. \tag{14}$$

На рис. 3 топологическое пространство (Y, Ω_Y) представлено с помощью орграфа (бесконечного).

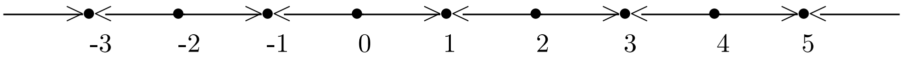

Рис.3

Определим действие группы $G = \mathbb{Z}$ на $Y = \mathbb{Z}$ сдвигами, кратными 4:

$$(y, n) \mapsto y + 4n;\ y \in Y = \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Теорема 4 *Пространство* (Y, Ω_Y) *является универсальным накрывающим пространством для* (X, Ω_X). *Фундаментальная группа* $\pi_1(X)$ *изоморфна группе целых чисел* $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Отображение проектирования $\pi : Y \to Y/G$, сопоставляющее каждому целому числу его вычет по модулю 4, является накрывающим отображением, поскольку, как нетрудно видеть, действие (15) вполне разрывно. Пространство Y стягиваемо (что может быть доказано явным предъявлением стягивающей гомотопии). Фактор-топология на 4-точии Y/G совпадает (это также устанавливается непосредственно) с топологией (12). Следовательно [3, с.260], $Y \approx \tilde{X}$ и фундаментальная группа пространства X оказывается такой же, как у окружности, т.е. $\pi_1(X) \cong G = \mathbb{Z}$. $\square$

Замечание 4. Полученный результат позволяет нам предложить термин "эрзац-окружность" для 4-точия (D_4, Ω_4) и термин "эрзац-прямая" – для накрывающего пространства.

Список использованной литературы

1. *Архангельский А.В., Федорчук В.В.* Основные понятия и конструкции общей топологии // Итоги науки и техники / ВИНИТИ АН СССР. М., 1988. С. 9 – 110. (Современные проблемы математики : Фундаментальные направления; Т. 17).
2. *Оре О.* Теория графов. М., 1968. 336 с.
3. *Постников М.М.* Лекции по алгебраической топологии : Основы теории гомотопий. М., 1984. 416 с.
4. *Харари Ф.* Теория графов. М., 1973. 302 с.
5. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М., 1986. 752 с.
6. *Evans J.W., Harary F., Lynn M.S.* On the computer enumeration of finite topologies // Comm. ASM. 1967. Vol. 10. P.295 – 298.