Научные труды ИвГУ. Математика. Вып. 2
Иваново, 1999

УДК 514.7

И. В. Шевченко, Н. И. Яцкин

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ НЕАБЕЛЕВЫХ КОГОМОЛОГИЙ ДЕ РАМА

Рассматриваются неабелевы когомологии де Рама гладкого многообразия с коэффициентами в группе Ли, а также соответствующие неабелевым коциклам абелевы когомологии и мультипликативные структуры в них.

1. Неабелевы когомологии де Рама. Пусть M – C^∞-гладкое многообразие, A – конечномерная (вещественная или комплексная) группа Ли (для простоты – матричная, т.е. подгруппа Ли в группе $GL(n,\mathbb{P})$, где $\mathbb{P}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$); $\mathfrak{a}$ – соответствующая алгебра Ли.

Неабелевы когомологии де Рама (НКдР) многообразия M с коэффициентами в группе A определяются ([3], см. также [2]) следующим образом:

$$H^1(M,A)=\mathcal{L}^1(M,\mathfrak{a})/\rho, \tag{1}$$

где $\mathcal{L}^1(M,\mathfrak{a})=\{\alpha\in\Lambda^1(M,\mathfrak{a}) : d\alpha=\frac{1}{2}[\alpha,\alpha]\}$ – множество неабелевых 1-коциклов (вполне интегрируемых $\mathfrak{a}$-значных 1-форм на M), ρ – действие группы $\mathcal{F}_A(M)=C^\infty(M,A)$ калибровочных преобразований:

$$\rho(Q)\alpha=dQ\cdot Q^{-1}+Q\alpha Q^{-1}; \alpha\in\mathcal{L}^1(M,\mathfrak{a}); Q\in\mathcal{F}_A(M).$$

НКдР представляют собой контравариантный функтор из категории многообразий **MAN** в категорию **SET•** пунктированных множеств (отмеченным элементом в $H^1(M,A)$ служит класс нулевой формы). Пусть $\pi:\widetilde{M}\to M$ – универсальное накрывающее многообразие для M и его естественная проекция на M. Фундаментальное решение, соответствующее коциклу α и отмеченной точке $y_0 \in \widetilde{M}$, определяется [2] как отображение $\Phi_\alpha : \widetilde{M} \to A$, являющееся решением задачи Коши $d\Phi_\alpha \cdot \Phi_\alpha^{-1} = \widetilde{\alpha}$, $\Phi_\alpha(y_0) = I$, где $\widetilde{\alpha} = \pi^*\alpha$, I – единица группы A. Гомоморфизм монодромии $\alpha^\sharp : \Gamma \to A$ фундаментальной группы $\Gamma = \pi_1(M, x_0)$ многообразия M (с отмеченной точкой $x_0 = \pi(y_0)$ определяется как сужение Φ_α на Γ – орбиту точки y_0. Если операцию в Γ определять так, чтобы Γ действовало на $\widetilde{M}$ справа, то будет иметь место формула [1, с. 66]: $\Phi_\alpha(y.\gamma) = \Phi_\alpha(y)\alpha^\sharp(\gamma)$; $y \in \widetilde{M}$; $\gamma \in \Gamma$. Возникает отображение $\sharp : \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{a}) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, A)$, $\sharp(\alpha) = \alpha^\sharp$, классифицирующее неабелевы коциклы: два коцикла эквивалентны (относительно действия ρ) тогда и только тогда, когда соответствующие гомоморфизмы монодромии сопряжены в A. Отображение $\sharp$ опускается [3] до инъекции (но не обязательно – биекции) пунктированных множеств $\widehat{\sharp} : H^1(M, A) \to \widehat{\mathrm{Hom}}(\Gamma, A)$, где $\widehat{\mathrm{Hom}}(\Gamma, A)$ – множество классов сопряженности гомоморфизмов.

2. Гомотопическая инвариантность НКдР и теорема Шорохова.. Гладкую гомотопию многообразий будем понимать, следуя [1, с. 44.]

Теорема 1 *Если гладкие отображения многообразий $f, g : M \to N$ гладко гомотопны, то они порождают одинаковые морфизмы $f^* = g^* : H^1(N, A) \to H^1(M, A)$.*

Доказательство может быть получено из имеющегося соответствия НКдР с неабелевыми когомологиями, определяемыми с помощью пучков [3]. Возможно, однако, прямое доказательство на языке дифференциальных форм. При этом сначала устанавливается изоморфизм: $H^1(M, A) \cong H^1(M \times \mathbb{R}, A)$, для чего с использованием представления $\alpha = \alpha_0(x,t)dt + \alpha'(x,t)$ (в котором: $x \in M$, $t \in \mathbb{R}$; $\alpha_0(x,t)$ – функция на $M \times \mathbb{R}$; $\alpha'(x,t)$ – 1-форма на $M \times \mathbb{R}$, не содержащая dt) доказывается эквивалентность формы α форме α'_0, определяемой равенством $\alpha'_0(x,t) = \alpha'(x,0)$. Для доказательства эквивалентности форм решается (на $M \times \mathbb{R}$) дифференциальное уравнение $dQ = \alpha Q - Q\alpha'_0$.

Из теоремы 1 следует, что многообразия одинакового (гладкого) гомотопического типа имеют изоморфные НКдР.

В работе [4] доказывается следующий результат.

Теорема 2 (С.В.Шорохов). *Если многообразие W односвязно, то $H^1(M \times W, A) \cong H^1(M, A)$.*

Доказательство С.В.Шорохова основано на упомянутом соотношении с пучковыми неабелевыми когомологиями. И снова можно предложить прямое вычисление, основным этапом которого является доказательство совпадения на $\widetilde{M} \times \{w_0\} \subset \widetilde{M} \times W$ (где w_0 – отмеченная точка в W) фундаментальных решений Φ_α и Φ_{α_0}, соответствующих формам α и $\alpha_0 = (i \circ p)^* \alpha$, где $i : M \to M \times W$ – вложение, а $p : M \times W \to M$ – проекция.

3. Неабелевы когомологии $H^1(\mathbb{R}P^2, \mathfrak{su}(2))$. Рассмотрим пример вычисления неабелевых когомологий: $M = \mathbb{R}P^2$; $\widetilde{M} = S^2$; $\Gamma \cong \mathbb{Z}^*$; элемент $-1 \in \mathbb{Z}^*$ действует на S^2 как инверсия; $A = SU(2)$; $\mathfrak{a} = \mathfrak{su}(2)$; классифицирующим отображением является: $\widehat{\sharp} : H^1(\mathbb{R}P^2, SU(2)) \to \widehat{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}^*, SU(2))$, где, как нетрудно показать, множество классов сопряженности гомоморфизмов изоморфно двухэлементному множеству $\{I, -I\}$.

Теорема 3. *Множество НКдР проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ с коэффициентами в группе $SU(2)$ изоморфно $\{I, -I\}$.*

Доказательство представляет собой явное построение коцикла $\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}P^2, \mathfrak{su}(2))$ такого, что $\alpha^\sharp(-1) = -I$. Форма α получается как результат опускания на $\mathbb{R}P^2$ (инвариантной относительно инверсии) формы β на S^2, заданной в координатах объемлющего $\mathbb{R}^3$ формулой $\beta(y) = \beta_1(y)dy^1 + \beta_2(y)dy^2 + \beta_3(y)dy^3$; $y \in S^2$, где

$$\beta_1(y) = -y_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \ \beta_2(y) = y_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - y_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$$
$$\beta_3(y) = -y_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

4. Абелевы когомологии, порождаемые неабелевыми коциклами, и мультипликативные структуры в них. В этом пункте мы рассмотрим случай полной линейной алгебры $\mathfrak{a} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{P})$ и будем использовать не только лиевскую, но и ассоциативную структуру алгебры $\mathfrak{a}$. Из условия полной интегрируемости формы α (в ассоциативных терминах оно выглядит так: $d\alpha = \alpha \wedge \alpha$) следуют свойства $d_\alpha^2 = 0$; $\delta_\alpha^2 = 0$ для операторов $d_\alpha^{(p)}, \delta_\alpha^{(p)} : \Lambda^p(M, \mathfrak{a}) \to \Lambda^{p+1}(M, \mathfrak{a})$, определяемых формулами: $d_\alpha^{(p)}\omega = d\omega - \alpha \wedge \omega$; $\delta_\alpha^{(p)}\omega = d\omega + (-1)^p \omega \wedge \alpha$, где $\omega \in \Lambda^p(M, \mathfrak{a})$; $p = 0, 1, \ldots, n-1$; $n = \dim(M)$.

Таким образом, возникают так называемые возмущенные комплексы де Рама [5] и определяются соответствующие когомологии – линейные пространства:

$$H^p_\alpha(M,\mathfrak{a}) = \mathrm{Ker}\ d^{(p)}_\alpha/\mathrm{Im}\ d^{(p-1)}_\alpha;\ {}'H^p_\alpha(M,\mathfrak{a}) = \mathrm{Ker}\ \delta^{(p)}_\alpha/\mathrm{Im}\ \delta^{(p-1)}_\alpha.$$

Для случая $\alpha = 0$ когомологии $H^p_0 = {}'H^p_0$ совпадают с обычными дерамовскими когомологиями. Легко проверяются следующие свойства дифференциалов d, d_α, δ_α :

$$d_\alpha(\xi\wedge\eta) = d_\alpha\xi\wedge\eta + (-1)^p\xi\wedge d\eta;\ \delta_\alpha(\xi\wedge\eta) = d\xi\wedge\eta + (-1)^p\xi\wedge\delta_\alpha\eta;$$

$$d(\xi\wedge\eta) = \delta_\alpha\xi\wedge\eta + (-1)^p\xi\wedge d_\alpha\eta, \tag{2}$$

где $\xi\in\Lambda^p(M,\mathfrak{a})$, $\eta\in\Lambda^q(M,\mathfrak{a})$. Свойства (2) позволяют корректным образом ввести некоторые мультипликативные структуры в “возмущенных когомологиях де Рама"

$$H^*_\alpha(M,\mathfrak{a}) = \bigoplus_{p=0}^{n} H^p_\alpha(M,\mathfrak{a});\ {}'H^*_\alpha(M,\mathfrak{a}) = \bigoplus_{p=0}^{n}{}'H^p_\alpha(M,\mathfrak{a}),$$

а именно:

1) пространство $H^*_\alpha(M,\mathfrak{a})$ превращается в правый модуль над кольцом $K = H^*_0(M,\mathfrak{a})$ (дерамовских когомологий многообразия M с коэффициентами в ассоциативной алгебре $\mathfrak{a}$) относительно умножения

$$m_1 : H^*_\alpha(M,\mathfrak{a})\times K \to H^*_\alpha(M,\mathfrak{a});\ m_1([\xi]_\alpha,[\eta]_0) = [\xi\wedge\eta]_\alpha; \tag{3}$$

2) пространство ${}'H^*_\alpha(M,\mathfrak{a})$ превращается в левый K-модуль относительно умножения

$$m_2 : K\times{}'H^*_\alpha(M,\mathfrak{a}) \to {}'H^*_\alpha(M,\mathfrak{a});\ m_2([\xi]_0,{}'[\eta]_\alpha) = {}'[\xi\wedge\eta]_\alpha; \tag{4}$$

3) определяется спаривание

$$m_3 : {}'H^*_\alpha(M,\mathfrak{a})\times H^*_\alpha(M,\mathfrak{a}) \to K;\ m_3({}'[\xi]_\alpha,[\eta]_\alpha) = [\xi\wedge\eta]_0. \tag{5}$$

Рассмотрим следующие категории:

– категорию **MANFORM**, объектами которой служат пары (M, α), где M – гладкое многообразие $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{a})$, а морфизмами $f : (N, \beta) \to (M, \alpha)$ служат гладкие отображения f, “согласованные с формами": $f^*\alpha = \beta$;

– категорию **LMOD**, объектами которой служат всевозможные пары (K, G), где K – кольцо, а G – левый K-модуль, а морфизмами из (K, G) в (K', G') служат пары (h_1, h_2), где $h_1 : K \to K'$ – гомоморфизм колец, а $h_2 : G \to G'$ – гомоморфизм абелевых групп, согласованный с модульными структурами, т.е. удовлетворяющий условию $h_2(k \cdot g) = h_1(k) \cdot h_2(g)$; $k \in K$, $g \in G$;

– аналогично определяемую категорию правых модулей **RMOD**.

Справедливы следующие две теоремы.

Теорема 4. *Когомологии $H^*_\alpha(M, \mathfrak{a})$ и $'H^*_\alpha(M, \mathfrak{a})$ представляют собой контравариантные функторы из категории* **MANFORM** *в категории* **RMOD** *и* **LMOD**, *причем морфизмы модулей (f^*, f^*), порожденные морфизмом $f : (N, \beta) \to (M, \alpha)$, согласованы с умножением (5).*

Теорема 5. *Калибровочное преобразование коциклов $\alpha' = \rho(Q)\alpha$, $Q \in \mathcal{F}_A(M)$, порождает изоморфизмы K-модулей*

$$L_Q : H^*_\alpha(M, \mathfrak{a}) \to H^*_{\alpha'}(M, \mathfrak{a});\ L_Q[\xi]_\alpha = [Q\xi]_{\alpha'};$$

$$R_{Q^{-1}} : {}'H^*_\alpha(M, \mathfrak{a}) \to {}'H^*_{\alpha'}(M, \mathfrak{a});\ R_{Q^{-1}}{}'[\xi]_\alpha = {}'[\xi Q^{-1}]_{\alpha'},$$

сохраняющие инвариантным результат умножения (5).

Список использованной литературы

1. *Ботт Р., Ту Л. В.* Дифференциальные формы в алгебраической топологии. М., 1989. 336 с.
2. *Крейн С. Г., Яцкин Н. И.* Линейные дифференциальные уравнения на многообразиях. Воронеж, 1980. 132 с.
3. *Онищик А. Л.* Некоторые понятия и применения теории неабелевых когомологий // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 17. С. 45 – 88.
4. *Шорохов С. Н.* О неабелевых когомологиях прямого произведения // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1991. С. 168 – 169.
5. *Яцкин Н. И.* Умножения в $(d - \alpha\wedge)-$когомологиях // Операторные методы в дифференциальных уравнениях. Воронеж, 1979. С. 138 – 141.