**Научные труды ИвГУ. Математика. Вып. 4 (2001)**

УДК 515.12

**Н. И. Яцкин**

# ПРАТОПОЛОГИИ И ПРАРАВНОМЕРНОСТИ

## I. "ДИСКРЕТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ" И ОПЕРАТОРЫ ПРАЗАМЫКАНИЯ

Работа посвящена построению теории праравномерных пространств, в частности вопросам их полноты. Особое внимание уделяется вновь вводимому классу конгломерированных праравномерностей, типичными примерами которых являются праметрические пространства с операторами раздутия. В первой части работы приводятся необходимые сведения и излагаются некоторые используемые в дальнейшем результаты теории пратопологических пространств и их отображений.

### 1. "Дискретно-непрерывные" функции из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$

Внутренне противоречивым термином "дискретно-непрерывные" иногда именуются (см., напр.: [3, с. 220][1]) функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, принадлежащие классу

$$\Phi = \left\{ f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} : (\forall z \in \mathbb{Z}) \ \left( \, |f(z+1) - f(z)| \leqslant 1 \, \right) \right\}. \qquad (1)$$

На естественно возникающий вопрос о существовании такой топологии $\tau$ в $\mathbb{Z}$, что класс (1) совпадает с классом всех непрерывных отображений $\mathcal{C}(\mathbb{Z},\tau;\ \mathbb{Z},\tau)$, ответ дает следующее

**Предложение 1.** *Включение $\Phi \subset \mathcal{C}(\mathbb{Z},\tau;\ \mathbb{Z},\tau)$ имеет место лишь для дискретной топологии $\tau^0$ и для слабейшей (слипшейся) топологии $\tau_0$ в $\mathbb{Z}$. В равенство оно обратиться не может.*

Таким образом, класс "дискретно-непрерывных" функций (1) не допускает трактовки в качестве класса всех непрерывных отображений $\mathbb{Z}$ в себя в смысле какой-либо топологии в $\mathbb{Z}$. Относительно чего же являются непрерыными "дискретно-непрерывные" функции?

Подходящим понятием является, как мы увидим, понятие пратопологического пространства.



[1] Автор обязан Е. В. Власову знакомством с проблематикой дискретной непрерывности в олимпиадных задачах, а также приведенной здесь ссылкой.

## 2. Операторы празамыкания и пратопологические пространства

**Определение 1** (см.: [1, с. 34]). Оператором *празамыкания* на множестве $X$ называется отображение $\mathbf{c} : 2^X \to 2^X$, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{cl.1}) \quad \mathbf{c}(\emptyset) = \emptyset;\\
&(\mathrm{cl.2}) \quad (\forall A \subset X) \ \ (A \subset \mathbf{c}(A)\ );\\
&(\mathrm{cl.3}) \quad (\forall A, B \subset X)\ (\ \mathbf{c}(A \cup B) = \mathbf{c}(A) \cup \mathbf{c}(B)\ ).
\end{aligned}$$

Множество $X$, снабженное некоторым оператором празамыкания $\mathbf{c}$, называется *пратопологическим пространством.*

Выдающимся сочинением энциклопедического характера, специально посвященным операторам празамыкания и пратопологическим пространствам, является монография Э. Чеха [6]. (В этой книге используется иная терминология: “операторы замыкания” и “пространства с замыканием”.) Большинство приводимых в настоящей работе определений, а также ряд (сообщаемых без выделения в форме предложений) результатов, относящихся к общим пратопологическим пространствам, могут быть найдены в указанном трактате.

Обычный оператор *замыкания* $\mathbf{c} = \mathbf{c}_\tau$ ($\mathbf{c}_\tau(A) = \overline{A}$; $A \subset X$) в топологическом пространстве $(X, \tau)$, помимо свойств (cl.1) — (cl.3), обладает еще свойством

$$(\mathrm{cl.4}) \qquad (\forall A \subset X)\ (\ \mathbf{c}(\mathbf{c}(A)) = \mathbf{c}(A)\ ),$$

причем свойства (cl.1) — (cl.4) оператора $\mathbf{c}$ однозначно определяют топологию $\tau = \tau_{\mathbf{c}}$ в множестве $X$ так, что построенный по этой топологии оператор замыкания $\mathbf{c}_\tau$ совпадает с исходным оператором $\mathbf{c}$. Класс замкнутых множеств, соответствующий топологии $\tau$, определяется формулой

$$\varphi = \varphi_{\mathbf{c}} = \{A \in 2^X : \mathbf{c}(A) = A\}. \tag{2}$$

Оператор $\mathbf{c}$, удовлетворяющий лишь свойствам (cl.1) — (cl.3), с помощью той же формулы (2) также определяет некоторую топологию $\tau = \tau_{\mathbf{c}}$. Однако соответствующий этой топологии оператор замыкания $\mathbf{c}_\tau$ уже не обязан совпадать с исходным оператором $\mathbf{c}$. Имеет место лишь (возможно, строгое) включение $\mathbf{c}(A) \subset \mathbf{c}_\tau(A)$ для любого $A \subset X$.

Для пратопологического пространства $(X, \mathbf{c})$ представляют интерес итерации $\mathbf{c}^k$ оператора $\mathbf{c}$ (в том числе и трансфинитные, которыми исчерпывается топологическое замыкание $\mathbf{c}_\tau$; см.: [1, с. 35]). Итерации оператора празамыкания сами являются операторами празамыкания.

С помощью оператора празамыкания $\mathbf{c}$ определяются операторы *правнутренности* и *праграницы*:

$$\mathbf{i}(A) = X \setminus \mathbf{c}(X \setminus A); \;\; \mathbf{b}(A) = \mathbf{c}(A) \cap \mathbf{c}(X \setminus A),$$

а также фильтры *окрестностей* точек

$$\mathfrak{N}_x = \{V \subset X : x \in \mathbf{i}(V)\}.$$

Совокупность фильтров окрестностей $\{\mathfrak{N}_x\}_{x \in X}$ однозначно определяет пратопологическую структуру с оператором празамыкания

$$\mathbf{c}(A) = \{ \; x \in X : (\forall U \in \mathfrak{N}_x) \; (A \cap X \neq \emptyset) \; \}. \tag{3}$$

Фильтр окрестностей для подмножества $A \subset X$ определяется формулой $\mathfrak{N}_A = \{V \subset X : A \subset \mathbf{i}(V)\}$.

**Определение 2.** Пратопологическое пространство $(X, \mathbf{c})$ называется *конгломерированным*, если для любой точки $x \in X$ существует минимальная окрестность

$$U_x^0 = \bigcap \mathfrak{N}_x \in \mathfrak{N}_x.$$

(Другими словами, каждый из фильтров $\mathfrak{N}_x$ является *главным* фильтром, т.е. (см.: [8]) имеет базис, состоящий из единственного множества; будем применять обозначение: $\mathfrak{N}_x = \langle U_x^0 \rangle$.)

Для второй итерации оператора празамыкания окрестности точек могут быть описаны следующим предложением.

**Предложение 2.** *1) Подмножество $W \subset X$ принадлежит фильтру $\mathfrak{N}_x^{(2)}$ окрестностей точки $x$ в смысле пратопологической структуры $(X, \mathbf{c}^2)$ тогда и только тогда, когда $W$ является окрестностью некоторой окрестности точки $x$ в смысле $(X, \mathbf{c})$.*

*2) Если* $\{\mathfrak{B}_x\}_{x\in X}$ *— семейство базисов фильтров* $\{\mathfrak{N}_x\}_{x\in X}$*, то для любого* $x \in X$ *множество*

$$\mathfrak{B}_x^{(2)} = \left\{ \bigcup_{y\in U} V_y \ : \ U \in \mathfrak{B}_x,\ y \in U,\ V_y \in \mathfrak{B}_y \right\} \tag{4}$$

*является базисом фильтра* $\mathfrak{N}_x^{(2)}$.

*3) Для конгломерированного оператора* $\mathbf{c}$ *вторая итерация* $\mathbf{c}^2$ *также является конгломерированным оператором празамыкания, причем соответствующая минимальная окрестность имеет вид*

$$W_x^0 = \bigcup_{y\in U_x^0} U_y^0. \tag{4'}$$

Еще один (эквивалентный) подход к описанию (пра)топологических структур основан на аксиоматизации отношения “фильтр сходится к точке” (см.: [8]). Точка $x$ в пратопологическом пространстве $(X,\mathbf{c})$ называется *пределом* фильтра $\mathfrak{F}$, заданного на $X$, если $\mathfrak{F}$ содержит фильтр окрестностей этой точки $\mathfrak{N}_x$. Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* фильтра (базиса фильтра) $\mathfrak{F}$, если

$$x \in \bigcap \{\mathbf{c}(F) : F \in \mathfrak{F}\}.$$

Сравнение пратопологических структур определяется следующим образом: пратопологическая структура $(X,\mathbf{c}_1)$ *мажорирует* пратопологическую структуру $(X,\mathbf{c}_2)$, если

$$(\ \forall A \subset X\ )\ (\ \mathbf{c}_1(A) \subset \mathbf{c}_2(A)\ ).$$

Заметим, что пратопологическая структура $(X,\mathbf{c})$ мажорирует соответствующую ей топологическую структуру $(X,\mathbf{c}_\tau)$, где $\tau = \tau_{\mathbf{c}}$; а для итерированных структур $(X,\mathbf{c}^k)$ мажорирует $(X,\mathbf{c}^l)$, если $k \leqslant l$.

Пратопологические структуры образуют полную решетку, в которой инфимум семейства пратопологических структур $\{(X,\mathbf{c}_i)\}_{i\in I}$ задается оператором празамыкания

$$\mathbf{c}_* = \inf_{i\in I} \mathbf{c}_i; \quad \mathbf{c}_*(A) = \bigcup_{i\in I} \mathbf{c}_i(A); \quad A \subset X. \tag{5}$$

Для топологических структур определенный таким образом инфимум не является, вообще говоря, топологической структурой. Супремум семейства пратопологических структур может быть задан оператором празамыкания

$$\mathbf{c}^* = \sup_{i\in I} \mathbf{c}_i; \quad \mathbf{c}^*(A) = \bigcap_{\mathcal{M}\in \mathrm{Covf}_X(A)} \ \bigcup_{M\in\mathcal{M}} \ \bigcap_{i\in I} \mathbf{c}_i(M)\,, \tag{6}$$

где $A \subset X$, а $\mathrm{Covf}_X(A)$ — совокупность всевозможных конечных покрытий множества $A$ в пространстве $X$. В противоположность ситуации с $\mathbf{c}_* = \inf \mathbf{c}_i$, для семейства (топологических) операторов замыкания, оператор $\mathbf{c}^* = \sup \mathbf{c}_i$ (супремум берется в классе операторов празамыкания) является оператором замыкания.

Для подмножества $X' \subset X$ *индуцированный* оператор празамыкания $\mathbf{c}'$ определяется формулой

$$\mathbf{c}'(A) = \mathbf{c}(A) \cap X'; \ A \subset X'.$$

Топология $\tau_{\mathbf{c}'}$, определяемая оператором $\mathbf{c}'$, мажорирует (возможно, строго) топологию $(\tau_{\mathbf{c}})'$, индуцированную на $X'$ топологией $\tau_{\mathbf{c}}$.

**Пример 1.** В случае конечного множества $X$ достаточно задавать замыкания одноточечных множеств, и структура пратопологического пространства $(X, \mathbf{c})$ определяется рефлексивным ориентированным графом $(X, \Gamma)$, в котором точки $x, y \in X$ соединяются дугой от $x$ к $y$ тогда и только тогда, когда $y \in \mathbf{c}(\{x\})$. “Настоящие” топологии выделяются из числа пратопологий условием транзитивности описанного графа ([7]; см. также: [5]). Топология, соответствующая оператору празамыкания $\mathbf{c}$ в конечном множестве $X$, определяется транзитивным замыканием графа $(X, \Gamma)$ (см.: [4, с. 199]). Тривиальным образом конечное пратопологическое пространство является конгломерированным.

**Пример 2.** Рассмотрим множество $X$ и пару вложенных подмножеств $\mathcal{B} = (B_0, B_1)$, $B_0 \subset B_1 \subset X$. Элементарным оператором празамыкания, соответствующим паре $\mathcal{B}$, назовем оператор, заданный формулой

$$\mathbf{c}_{\mathcal{B}}(A) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } A = \emptyset, \\ B_1, & \text{если } (A \subset B_0) \wedge (A \neq \emptyset), \\ X, & \text{если } A \not\subset B_0. \end{cases} \tag{7}$$

В случае $B_0 = B_1 (= B)$ получается элементарный оператор замыкания, обозначаемый $\mathbf{c}_B$. Элементарный оператор празамыкания является конгломерированным, причем минимальной окрестностью для точек $x \in X \setminus B_1$ будет являться множество $X \setminus B_0$, а для остальных точек — все пространство $X$. Если $B_0 \neq B_1$, то квадрат $\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^2$ является тривиальным оператором замыкания, соответствующим слипшейся топологии.

**Предложение 3.** *Всякая пратопологическая структура есть супремум семейства элементарных пратопологических структур с операторами празамыкания, соответствующими всевозможным парам подмножеств вида* $\mathcal{B} = (B, \mathbf{c}(B))$, *где* $B \subset X$.

**Пример 3.** В множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел рассмотрим индуцированную из $\mathbb{R}$ метрику $\rho$ и определим оператор 1-раздутия

$$\mathbf{c}_{\rho,1}(A) = \{\, y \in \mathbb{Z} : \rho(A, y) \leqslant 1 \,\}; \;\; A \subset \mathbb{Z}, \tag{8}$$

являющийся, очевидно, оператором празамыкания. Примем для пратопологического пространства $(\mathbb{Z}, c_{\rho,1})$ краткое обозначение $\check{\mathbb{Z}}$.

Именно это пратопологическое пространство реализует идею описания “дискретной непрерывности” (см. п. 1). В дальнейшем данная коструикция будет обобщена.

Далее приводятся определения некоторых специальных классов операторов празамыкания и пратопологических пространств.

Оператор празамыкания $\mathbf{c}$ называется *совершенно аддитивным*, а пратопологическое пространство $(X, \mathbf{c})$ называется *квазидискретным*, если для любого семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ подмножеств в $X$ справедливо

$$\mathbf{c}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \mathbf{c}(A_i).$$

Введем следующие три аксиомы для пратопологического пространства $(X, \mathbf{c})$ :

$$(\forall x, y \in X) \; (x \in \mathbf{c}(\{y\}) \;\Rightarrow\; y \in \mathbf{c}(\{x\})); \tag{PU}$$

$$(\forall x, y \in X) \; [(x \in \mathbf{c}(\{y\}) \;\wedge\; y \in \mathbf{c}(\{x\})) \Rightarrow (x = y)] \; ; \tag{$\mathrm{T}_0$}$$

$$(\forall x \in X) \; (\mathbf{c}(\{x\}) = \{x\}). \tag{$\mathrm{T}_1$}$$

Очевидно, имеет место эквивалентность: $(\mathrm{PU}) \wedge (\mathrm{T}_0) \Leftrightarrow (\mathrm{T}_1)$. Пратопологическое пространство $(X, \mathbf{c})$ называется *прауниформизуемым* (или соответственно *колмогоровским*, *достижимым*), если выполнена аксиома (PU) (или соответственно $(\mathrm{T}_0)$, $(\mathrm{T}_1)$ ). Заметим, что если топология $\tau_{\mathbf{c}}$ является колмогоровской (достижимой), то и порождающий ее оператор празамыкания $\mathbf{c}$ удовлетворяет соответствующей аксиоме.

**Предложение 4.** *Для прауниформизуемых пратопологических пространств квазидискретность и конгломерированность эквивалентны. В прауниформизуемом конгломерированном пространстве минимальной окрестностью точки $x \in X$ служит $U_x^0 = \mathbf{c}(\{x\})$.*

Пратопологическое пространство $(X, \mathbf{c})$ называется *связным*, если кроме $\emptyset$ и $X$ не существует других подмножеств в $X$ с пустой праграницей. Пратопологическое пространство $(X, \mathbf{c})$ связно тогда и только тогда, когда является связным соответствующее топологическое пространство $(X, \tau_{\mathbf{c}})$. Подмножество $X'$ в пратопологическом пространстве $(X, \mathbf{c})$ называется связным, если, будучи наделенным индуцированным оператором празамыкания $\mathbf{c}'$, оно является связным пратопологическим пространством. Заметим, что свойство связности есть характеристика не собственно оператора празамыкания, а скорее соответствующей ему топологии. (Однако при переходе к подпространствам следует иметь в виду, что топология $\tau_{\mathbf{c}'}$ может быть сильнее, чем $(\tau_{\mathbf{c}})'$.)

Пратопологическое пространство $(X, \mathbf{c})$ называется *компактным*, если из любого семейства $\{A_j\}_{j \in J}$ подмножеств в $X$, такого, что внутренности $\mathbf{i}(A_j)$ покрывают $X$, можно выбрать конечное подсемейство, покрывающее $X$. Подмножество в пратопологическом пространстве называется компактным, если оно компактно как пратопологическое пространство с индуцированной пратопологией. (Подчеркнем, что множества из подсемейства покрывают пространство $X$ “сами”, их внутренности не обязаны этого делать.) В терминах фильтров: пространство $(X, \mathbf{c})$ компактно тогда и только тогда, когда всякий фильтр на $X$ имеет точку прикосновения.

Конечное пратопологическое пространство из примера 1 тривиальным образом является квазидискретным и компактным. Оно является прауниформизуемым в случае, когда в соответствующем орграфе вместе с каждой дугой наличествует и встречная дуга (такой орграф естественно считать неориентированным). Колмогоровским оно является в случае отсутствия в орграфе встречных дуг, а достижимым — лишь в случае отсутствия дуг, отличных от петель (что соответствует дискретной топологии). Связным конечное пратопологическое пространство является тогда и только тогда, когда соответствующий орграф слабо связен (т. е. является связным неориентированный граф, определяемый по данному орграфу).

Рассмотрим теперь элементарный оператор празамыкания из примера 2 в предположении, что подмножества $B_0$ и $B_1$ нетривиальны. Соответствующее пратопологическое пространство будет квазидискретным, связным и компактным. Колмогоровским оно будет лишь в вырожденном случае связного топологического двоеточия.

Пратопологическое пространство $\check{\mathbb{Z}}$ из примера 3 является прауниформизуемым, квазидискретным и, следовательно, — конгломерированным. Минимальной окрестностью точки $x \in \check{\mathbb{Z}}$ служит трехточие $U_x^0 = \{x-1,\ x,\ x+1\}$. Пространство $\check{\mathbb{Z}}$ является связным, но не компактным и не колмогоровским. Подмножество в нем является связным тогда и только тогда, когда оно является “выпуклым в $\mathbb{Z}$” (в очевидном смысле).

## 3. Непрерывные отображения пратопологических пространств. Инициальные и финальные пратопологические структуры

**Определение 3.** Отображение $f : X_1 \to X_2$ пратопологического пространства $(X_1, \mathbf{c}_1)$ в пратопологическое пространство $(X_2, \mathbf{c}_2)$ называется *непрерывным*, если

$$( \ \forall A \subset X_1 \ ) \ ( \ f(\mathbf{c}_1(A)) \subset \mathbf{c}_2(f(A)) \ ). \qquad (9)$$

Класс непрерывных отображений из пратопологического пространства $(X_1, \mathbf{c}_1)$ в прататопологическое пространство $(X_2, \mathbf{c}_2)$ обозначается $\mathcal{C}(X_1, \mathbf{c}_1; X_2, \mathbf{c}_2)$.

Условие непрерывности (9) может быть (обычным образом) представлено в терминах фильтров окрестностей. Отображение, непрерывное относительно пратопологических структур, является также непрерывным относительно топологий, порожденных этими структурами. Заметим, что если оператор $\mathbf{c}_1$ является совершенно аддитивным, то условие непрерывности (9) достаточно проверять для одноточечных подмножеств $A = \{a\}$. Непрерывный образ связного (компактного) пратопологического пространства является связным (компактным) пространством.

Непрерывные отображения конечных пратопологических пространств (см. пример 1) суть гомоморфизмы соответствующих орграфов. Класс непрерывных отображений из пратопологического пространства $\check{\mathbb{Z}}$ (см. пример 3) в себя совпадает с классом "дискретно-непрерывных" функций Ф.

Обычным образом (см.: [2]) определяются *инициальные* (*финальные*) пратопологические структуры. (Э. Чех в [6] говорит о проективно (индуктивно) порожденных структурах соответственно.)

Инициальная пратопологическая структура, порожденная семейством отображений $\{f_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$ — из множества $X$ в пратопологические пространства $(Y_i, \mathbf{c}_i)$, может быть задана оператором празамыкания

$$\mathbf{c}(A) = \bigcap_{\mathcal{M} \in \mathrm{Covf}_X(A)} \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(\mathbf{c}_i(f_i(M))) \ , \ A \subset X. \tag{10}$$

В случае, когда все операторы $\mathbf{c}_i$ являются топологическими операторами замыкания, оператор (10) также определяет топологическую структуру. Примером инициальной пратопологической структуры является индуцированная пратопология.

Финальная пратопологическая структура, порожденная семейством отображений $\{f_i : X_i \to Y\}_{i \in I}$ из пратопологических пространств $(X_i, \mathbf{c}_i)$ в множество $Y$, может быть задана оператором празамыкания

$$\mathbf{c}(B) = B \cup \bigcup_{i \in I} f_i(\mathbf{c}_i(f_i^{-1}(B))), \ B \subset Y. \tag{11}$$

Финальная пратопологическая структура не обязана быть топологической в том случае, когда все операторы $\mathbf{c}_i$ являются топологическими операторами замыкания. Примером финальной пратопологической структуры является пратопологическая структура на фактормножестве $\hat{X} = X/\sigma$ пратопологического пространства $(X, \mathbf{c})$ (по некоторому отношению эквивалентности $\sigma$), определяемая оператором празамыкания

$$\hat{\mathbf{c}}(B) = \pi(\mathbf{c}(\pi^{-1}(B))),\ B \subset \hat{X}, \tag{12}$$

где $\pi : X \to \hat{X}$ — естественная проекция. Оператор (12), как и в общем случае, не обязан быть топологическим в случае топологического оператора $\mathbf{c}$.

Опишем далее две пратопологические структуры на произведении $X = \prod_{i\in I} X_i$ пратопологических пространств $(X_i, \mathbf{c}_i)$ : инициальную структуру — аналог обычного (тихоновского) произведения, и структуру тензорного произведения (финальную — служащую для описания отображений, заданных на $X$ и раздельно непрерывных по каждой из координат; эту структуру Э. Чех назывет индуктивным произведением).

**Определение 4.** Пратопологической структурой *произведения* в множестве $X = \prod_{i\in I} X_i$ называется инициальная пратопологическая структура, определяемая проекциями $\pi_i : X \to X_i$ множества $X$ на пратопологические пространства $(X_i, \mathbf{c}_i)$. Соответствующий оператор празамыкания обозначается символом $\prod_{i\in I} \mathbf{c}_i$.

Оператор празамыкания в произведении может быть задан формулой

$$\left(\prod_{i\in I} \mathbf{c}_i\right)(A) = \bigcap_{\mathcal{M}\in \mathrm{Covf}_X(A)} \ \bigcup_{M\in\mathcal{M}} \ \prod_{i\in I} \mathbf{c}_i(\pi_i(M)),\ A \subset X\,. \tag{13}$$

Если исходные пространства являются топологическими, то и в произведении оператор (13) определяет топологическую структуру. Из связности (компактности) каждого из пространств $(X_i, \mathbf{c}_i)$ следует связность (компактность) их произведения.

Чтобы дать определение тензорного произведения пратопологических пространств, введем в рассмотрение семейство вложений

$$\alpha_{x,i} : X_i \to X;\ (\alpha_{x,i}(\xi))_j = \begin{cases} x_j, & j \neq i, \\ \xi, & j = i, \end{cases} \tag{14}$$

где $x \in X$; $i, j \in I$; $\xi \in X_i$.

**Определение 5.** Структурой *тензорного произведения* пратопологических пространств $(X_i, \mathbf{c}_i)$ называется финальная пратопологическая структура на множестве $X = \prod_{i \in I} X_i$, заданная отображениями семейства (14). Пространство $X$, наделенное структурой тензорного произведения, будем обозначать символом $\bigotimes_{i \in I} X_i$, а соответствующий оператор празамыкания — символом $\bigotimes_{i \in I} \mathbf{c}_i$.

Оператор празамыкания в тензорном произведении может быть задан формулой

$$\left(\bigotimes_{i \in I} \mathbf{c}_i\right)(A) = \bigcup_{x \in A} \bigcup_{i \in I} \alpha_{x,i}(\mathbf{c}_i(A_{x,i})), \tag{15}$$

где $A_{x,i} = \alpha_{x,i}^{-1}(A)$ — “ срез множества $A \subset X$, вдоль $i$-ой оси через точку $x \in A$”.

Пратопологическая структура тензорного произведения мажорирует структуру произведения. Отображение $f : \bigotimes_{i \in I} X_i \to Y$ тензорного произведения пратопологических пространств в пратопологическое пространство $Y$ является непрерывным тогда и только тогда, когда оно раздельно непрерывно по всем координатам (т.е. когда непрерывны все композиции $f \circ \alpha_{x,i}$, $x \in X$, $i \in I$). В случае, когда исходные пространства $X_i$ являются топологическими, пространство $X = \bigotimes_{i \in I} X_i$ топологическим быть не обязано. (Можно, разумеется, определить топологическое тензорное произведение топологических пространств, что и делается в работе [9].)

При изучении праравномерных пространств нам понадобится описание окрестностей точек в произведении $X \times X$ (и в тензорном произведении $X \otimes X$) пратопологического пространства на себя. Базис окрестностей точки $(x, y) \in X \times X$ в смысле $\mathbf{c} \times \mathbf{c}$ составляют “ящики” $U \times V$, а базис окрестностей той же точки в смысле $\mathbf{c} \otimes \mathbf{c}$ составляют “кресты” $(U \times \{y\}) \cup (\{x\} \times V)$, где $U \in \mathfrak{N}_x$, $V \in \mathfrak{N}_y$.

**Предложение 5.** *Имеет место следующая диаграмма мажорирований операторов празамыкания в произведении $X \times X$ (стрелки ведут от более сильного оператора к более слабому).*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{c} \otimes \mathbf{c} \arrow[r] \arrow[drr] & \mathbf{c}^2 \otimes \mathbf{c}^2 \arrow[r] & (\mathbf{c} \otimes \mathbf{c})^2 \arrow[r] & (\mathbf{c} \times \mathbf{c})^2 \arrow[r] & \mathbf{c}^2 \times \mathbf{c}^2 \\
& & \mathbf{c} \times \mathbf{c} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

*Оператор* $\mathbf{c} \times \mathbf{c}$, *вообще говоря, несравним с операторами* $\mathbf{c}^2 \otimes \mathbf{c}^2$ *и* $(\mathbf{c} \otimes \mathbf{c})^2$.

## Список использованной литературы

1. *Архангельский А. В., Федорчук В. В.* Основные понятия и конструкции общей топологии // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления: Т. 17. (Итоги науки и техники.) М., 1998. С. 9 – 110.
2. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. М., 1968.
3. *Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки. Киров, 1994.
4. *Оре О.* Теория графов. М., 1968.
5. *Федорова Е. Э., Яцкин Н. И.* Гомотопические свойства конечных топологических пространств // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 1 (1997). С. 135 – 141.
6. *Čech E.* Topological spaces. Prague; L.; N. Y.; Sydney, 1966.
7. *Evans J. W., Harary F., Lynn M. S.* On the computer enumeration of finite topologies // Comm. ASM. 1967. Vol. 10. P. 295 – 298.
8. *Gähler W.* Grundstrukturen der Analysis. Berlin, 1977. Vol. 1.
9. *Knight C. J., Moran W., Pym J. S.* The topologies of separate continuity // Proc. Camb. Phil. Soc. 1970. Vol. 68. P. 663 – 671.