Научные труды ИвГУ. Математика. Вып. 5 (2002)

УДК 515.12

Н. И. Яцкин

ПРАТОПОЛОГИИ И ПРАРАВНОМЕРНОСТИ

II. ПРАРАВНОМЕРНОСТИ И СИММЕТРИКИ

Работа продолжает серию статей, посвященных пратопологическим структурам. В ней содержится обзор необходимых сведений из теории праравномерных и праметрических пространств, начато изучение конгломерированных праравномерностей (и их итераций), а также операторов раздутия в праметрических пространствах.

Настоящая статья является непосредственным (вплоть до нумерации утверждений, формул и т.п.) продолжением работы [12].

4. Праравномерные структуры и их конгломерирование

Напомним (см., напр., [10]) основные обозначения, относящиеся к подмножествам квадрата $X \times X$ множества X :

1) $U \circ V = \{ \ (x,y) \ : \ (\exists z \in X) \ (\ (x,z) \in V \ \wedge \ (z,y) \in U \ ) \ \}$;

2) $U^{-1} = \{ \ (x,y) \ : \ (y,x) \in U \ \}$; множество U называется *симметрическим*, если $U^{-1} = U$;

3) $\Delta_X = \{ \ (x,x) \ : \ x \in X \ \}$;

4) $U[x] = \{ \ y \in X \ : \ (x,y) \in U \ \}$;

5) $U[A] = \cup_{x \in X} U[x]$; $A \subset X$, где $U, V \subset X \times X$.

Определение 6. 1) *Праравномерностью* (или, в терминологии [6], полуравномерностью) на множестве X называется фильтр $\mathfrak{U}$ на множестве $X \times X$, удовлетворяющий условиям

$$\text{(unif.1)} \quad (\ \forall U \in \mathfrak{U} \ ) \ (\ \Delta_X \subset U \ );$$
$$\text{(unif.2)} \quad (\ U \in \mathfrak{U} \ ) \ \Rightarrow \ (\ U^{-1} \in \mathfrak{U} \ ).$$

2) Базой праравномерности $\mathfrak{U}$ называется базис $\mathfrak{U}'$ фильтра $\mathfrak{U}$; применяется обозначение $\mathfrak{U} = \langle \mathfrak{U}' \rangle$.

3) *Равномерностью* называется праравномерность, удовлетворяющая дополнительному условию

$$\text{(unif.3)} \quad (\ \forall U \in \mathfrak{U}\ )\ (\ \exists V \in \mathfrak{U}\ )\ (\ V \circ V \subset U).$$

Для праравномерных структур можно развить теорию, во многом параллельную теории пратопологических структур. В частности, осуществляется сравнение праравномерностей, определяемое как сравнение соответствующих фильтров и превращающее совокупность всех праравномерностей, заданных на некотором множестве, в полную решетку. Всякая праравномерная структура $(X, \mathfrak{U})$ определяет (с сохранением операций в полных решетках) пратопологическую структуру $(X, \mathbf{c}_{\mathfrak{U}})$ с оператором празамыкания

$$\mathbf{c}_{\mathfrak{U}}(A) = \bigcap\nolimits_{U \in \mathfrak{U}} U[A] = \bigcap\nolimits_{U \in \mathfrak{U}'} U[A];\ \ A \subset X, \tag{16}$$

где $\mathfrak{U}'$ — произвольная база праравномерности $\mathfrak{U}$. Оператору празамыкания (16) соответствует семейство фильтров окрестностей точек $\{\mathfrak{N}_x\}_{x \in X}$, заданных своими базисами

$$\mathfrak{U}_x = \{U[x] : U \in \mathfrak{U}\}. \tag{17}$$

Пратопологическое пространство $(X, \mathbf{c})$ получается из некоторой праравномерности $\mathfrak{U}$ (т. е. $\mathbf{c} = \mathbf{c}_{\mathfrak{U}}$) тогда и только тогда, когда оно прауниформизуемо, однако праравномерность $\mathfrak{U}$ определяется по оператору $\mathbf{c}$ вообще говоря неоднозначно. Сильнейшая из таких праравномерностей (обозначаемая $\mathfrak{U}_{\mathbf{c}}$) может быть определена как совокупность всех окрестностей диагонали Δ_X в пратопологии тензорного произведения $\mathbf{c} \otimes \mathbf{c}$. Праравномерность $\mathfrak{U}_{\mathbf{c}}$ может быть восстановлена по следующей базе

$$\mathfrak{U}'_{\mathbf{c}} = \{U \subset X \times X\ :\ (U = U^{-1})\ \wedge\ (\forall A \subset X)(\mathbf{c}(A) \subset U[A])\}. \tag{18}$$

Определение 7. Праравномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ называется *конгломерированным*, если $\mathfrak{U}$ имеет базу, состоящую из единственного (автоматически — симметрического) окружения U_0.

Любое праравномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ можно "конгломерировать", выбрав какое-либо симметрическое окружение $U_0 \in \mathfrak{U}$ и объявив $\{U_0\}$ базой новой праравномерности $\mathfrak{U}_0$. Очевидно, конгломерированной праравномерности соответствует конгломерированное пратопологическое пространство. Пратопологическое пространство $\check{\mathbb{Z}}$. из примера 3 можно рассматривать как конгломерированное праравномерное пространство (минимальным окружением диагонали будет "полоса" $\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : |y-x|\leqslant 1\}$). В условиях примера 1 прауниформизуемому конечному пратопологическому пространству (описываемому неориентированным графом) отвечает когломерированная праравномерность; минимальным окружением диагонали в этом случае будет множество всех пар вершин (x,y) таких, что x и y связаны ребром графа.

Определение 8. Квадратом праравномерной структуры $\mathfrak{U}$ называется праравномерность (обозначаемая $\mathfrak{U}^2$), базой которой служат множества вида $U\circ V$, где U,V — симметрические окружения, принадлежащие $\mathfrak{U}$.

Последующие степени праравномерности определяются обычной трансфинитной рекурсией и образуют неубывающую (трансфинитную) последовательность, стабилизирующуюся на некоторой равномерности. Для праравномерности $\mathfrak{U}^2$ можно, очевидно, рассмотреть более узкую базу, составленную окружений вида $U^2 = U\circ U$, где U — симметрическое множество из $\mathfrak{U}$. Праравномерность $\mathfrak{U}^2$ мажорируется праравномерностью $\mathfrak{U}$. Равномерности характеризуются равенством $\mathfrak{U}^2=\mathfrak{U}$. С помощью формулы (16) и с учетом теоретико-множественных соотношений (см. [10], с. 90, 122) доказывается

Предложение 6. *1) Оператор празамыкания $\mathbf{c}_{\mathfrak{U}}^2$ определяет пратопологию, мажорирующую пратопологию, определяемую оператором $\mathbf{c}_{\mathfrak{U}^2}$. 2) Квадрат $\mathfrak{U}^2$ конгломерированной праравномерности $\mathfrak{U}$ есть конгломерированная праравномерность, причем $\mathbf{c}_{\mathfrak{U}}^2=\mathbf{c}_{\mathfrak{U}^2}$.*

Заметим, что в общем случае структура $(X,\mathbf{c}_{\mathfrak{U}}^2)$ может строго мажорировать $(X,\mathbf{c}_{\mathfrak{U}^2})$, как показывает следующий

Пример 4. Зададим праравномерность $\mathfrak{U}$ на $\mathbb{R}$ с помощью базы, составленной из множеств вида $U_n=\Delta_{\mathbb{R}}\cup\{(x,y) : |x-y|\geqslant n\}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда для $x\in\mathbb{R}$ будем иметь: $U_n[x]=\{x\}\cup[x+n,\infty)\cup(-\infty,x-n]$ и $\mathbf{c}_{\mathfrak{U}}(\{x\})=\cap_{n=1}^{\infty}U_n[x]=\{x\}$, т. е. $\mathbf{c}_{\mathfrak{U}}$ и, следовательно, $\mathbf{c}_{\mathfrak{U}}^2$ удовлетворяет аксиоме достижимости, в то время как $\mathfrak{U}^2$ состоит лишь из множества $\mathbb{R}^2$ и определяет слипшуюся (пра)топологию на $\mathbb{R}$.

Определение 9. Отображение $f : (X, \mathfrak{U}) \to (Y, \mathfrak{V})$ праравномерных пространств называется *равномерно непрерывным*, если

$$(V \in \mathfrak{V}) \ \Rightarrow \ (\ (f \times f)^{-1}(V) \in \mathfrak{U} \ ). \tag{19}$$

Для класса равномерно непрерывных отображений применяется обозначение $\mathcal{U}(X, \mathfrak{U}; Y, \mathfrak{V})$. Из равномерной непрерывности отображения следует его непрерывность относительно соответствующих пратопологических структур, т.е.

$$\mathcal{U}(X, \mathfrak{U}; Y, \mathfrak{V}) \subset \mathcal{C}(X, \mathbf{c}_{\mathfrak{U}}; Y, \mathbf{c}_{\mathfrak{V}}). \tag{20}$$

Предложение 7. *1) Если пространство $(X, \mathfrak{U})$ является конгломерированным (с минимальным окружением U_0), то включение (20) обращается в равенство, а условие (равномерной) непрерывности (19) эквивалентно условию*

$$(f \times f)(U_0) \subset \cap_{V \in \mathfrak{V}} V. \tag{21}$$

2) Если пространство $(Y, \mathfrak{V})$ также конгломерировано (с минимальным окружением V_0), то условие (21) равносильно условию

$$(f \times f)(U_0) \subset V_0. \tag{22}$$

Снова возвращаясь к примеру 3, можем заключить, что класс Φ [12, формула (1)] совпадает с классом равномерно непрерывных отображений праравномерного пространства $\check{\mathbb{Z}}$ в себя.

5. Симметрики и операторы раздутия

Определение 10 (см. [1, с. 31], [11])**.** 1) Праметрическим пространством называется множество X с заданной на нем функцией прарасстояния (*праметрикой*) $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, удовлетворяющей условию $(\forall x \in X)$ $(\rho(x, x) = 0)$. 2) Праметрика ρ называется *симметрикой* (или полупсевдометрикой в терминологии [6]), если $(\forall x, y \in X)$ $(\rho(x, y) = \rho(y, x))$.

Мы не будем в настоящей работе рассматривать несимметричные праметрики и термин "праметрическое пространство" будет использоваться в дальнейшем для обозначения множества с заданной на нем симметрикой. Любая симметрика ρ порождает праравномерную структуру $\mathfrak{U}_\rho$, базу которой образуют окружения вида

$$U_{\rho,r} = \{(x,y) \in X \times X : \rho(x,y) < r\}, \tag{23}$$

где $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Оператор празамыкания $\mathbf{c}_\rho$, соответствующий праравномерности $\mathfrak{U}_\rho$, задается формулой

$$\mathbf{c}_\rho(A) = \{y \in X : \rho(A,y) = 0\}, \tag{24}$$

где $\rho(A,y) = \inf_{x \in A} \rho(x,y)$.

Известно (см. [6]), что всякая праравномерная структура $(X,\mathfrak{U})$ порождается некоторым семейством симметрик $\mathcal{S}$ в том смысле, что множество $U \in \mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда найдутся конечный набор симметрик $\{\rho_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{S}$ и положительное число r такие, что из $\sum_{i=1}^n \rho_i(x,y) < r$ следует $(x,y) \in U$ (причем все симметрики из семейства $\mathcal{S}$ можно считать принимающими лишь два значения: 0 и 1). Оператор празамыкания $\mathbf{c}_\mathcal{S}$, соответствующий праравномерности $\mathfrak{U}$, может быть выражен с помощью формулы

$$\mathbf{c}_\mathcal{S}(A) = \{y \in X : (\forall \rho \in \mathcal{S}_1)\ (\rho(A,y) = 0)\}, \tag{25}$$

где $\mathcal{S}_1$ – семейство всевозможных конечных сумм симметрик из $\mathcal{S}$.

Псевдометрика (т. е. симметрика, удовлетворяющая неравенству треугольника) ρ порождает равномерную структуру $\mathfrak{U}_\rho$ и топологический оператор замыкания $\mathbf{c}_\rho$ (ср. [1, с. 33]).

Определение 11. Пусть (X,ρ) — праметрическое пространство. Операторами *слабого* и *сильного* r*-раздутия* называются операторы, заданные (соответственно) формулами:

$$\mathbf{c}^\circ_{\rho,r}(A) = \{\ y \in X :\ \rho(A,y) < r\ \};\ A \subset X;\ r > 0; \tag{26}$$

$$\mathbf{c}^\bullet_{\rho,r}(A) = \{\ y \in X :\ \rho(A,y) \leqslant r\ \};\ A \subset X;\ r \geqslant 0. \tag{27}$$

Заметим, что оператор (27) при $r = 0$ есть не что иное, как оператор праметрического празамыкания (см. [1, с. 32]).

Зафиксируем далее $r > 0$ и подвергнем праравномерность $\mathfrak{U}_\rho$ модификациям двух типов. Во-первых, конгломерируем $\mathfrak{U}_\rho$, взяв в качестве минимального окружения для новой праравномерности $\mathfrak{U}^\circ_{\rho,r}$ окружение (23). А во-вторых, рассмотрим окружение

$$V_{\rho,r} = \{(x,y) \in X \times X : \rho(x,y) \leqslant r\}, \tag{28}$$

принадлежащее $\mathfrak{U}_\rho$, и определим праравномерность $\mathfrak{U}^\bullet_{\rho,r}$ с помощью базы, составленной из окружений $U_{\rho,r+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ (каждое из которых содержит множество (28), однако это множество уже не обязано являться окружением для новой праравномерности $\mathfrak{U}^\bullet_{\rho,r}$).

Предложение 8. *1. Конгломерированная праравномерность $\mathfrak{U}^\circ_{\rho,r}$ порождает оператор празамыкания, совпадающий с оператором слабого раздутия (26), Каждая точка x обладает минимальной окрестностью — (так называемым слабым) шаром*

$$U^\circ_x = \mathbf{c}^\circ_{\rho,r}(\{x\}). \tag{29}$$

2. Праравномерность $\mathfrak{U}^\bullet_{\rho,r}$ порождает оператор празамыкания, совпадающий с оператором сильного раздутия (27). Базис окрестностей точки x составляют слабые шары $\mathbf{c}^\circ_{\rho,r+\varepsilon}(\{x\})$, $\varepsilon > 0$, каждый из которых содержит (так называемый сильный) шар

$$V^\bullet_x = \mathbf{c}^\bullet_{\rho,r}(\{x\}). \tag{30}$$

3. Праравномерность $\mathfrak{U}^\circ_{\rho,r}$ и оператор (26) можно задать [по типу формулы(25)] с помощью $\{0,1\}$-значной симметрики

$$d^\circ_r(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x,y) \in U_{\rho,r}, \\ 1, & \text{если } (x,y) \notin U_{\rho,r}. \end{cases} \tag{31}$$

Замечания. 1. Мы избегаем неадекватного (в данной пратопологической ситуации) словоупотребления и не именуем “слабый” шар “открытым”, а “сильный” — “замкнутым”.

2. Возможен случай совпадения окружения $V_{\rho,r}$ с каким-либо базовым окружением $U_{\rho,r'}$, что приводит к совпадению праравномерностей: $\mathfrak{U}^\bullet_{\rho,r} = \mathfrak{U}^\circ_{\rho,r'}$. Такая ситуация реализуется, например, в случае целочисленной симметрики ρ, когда прарасстояние от точки до множества всегда достигается, и различие между слабым и сильным раздутиями пропадает (в частности, оба оператора задают квазидискретную пратопологию).

Предложение 9. *1. Квадратом конгломерированной праравномерности $\mathfrak{U}^\circ_{\rho,r}$ служит также конгломерированная праравномерность с минимальным окружением $U^2_{\rho,r}$. 2. Квадрат праравномерности $\mathfrak{U}^\bullet_{\rho,r}$ определяется базой составленной из окружений $U^2_{\rho,r+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. 3. В случае, когда ρ является (псевдо)метрикой, $U^2_{\rho,r} \subset U_{\rho,2r}$, однако, это включение, вообще говоря, не обращается в равенство.*

Список использованной литературы

10. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М., 1965.
11. *Недев С.Й.* о-Метризуемые пространства // Тр. Моск. матем. об-ва. 1971. Т. 24. С. 201 – 236.
12. *Яцкин Н.И.* Пратопологии и праравномерности: I. “Дискретная непрерывность” и операторы празамыкания // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 4 (2001). С. 123 – 134.