Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2003 С. 141 – 148

Н. И. Яцкин

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТАТИКИ

В работе развивается теория систем скользящих векторов на модулях над коммутативными кольцами. Классы эквивалентности систем скользящих векторов описываются с помощью слайдеров — специально конструируемых объектов во внешней алгебре модуля.

In this article the theory of systems of sliding vectors on modules over commutative rings is developed. Equivalence classes of such systems are described by means of sliders (spicially constructed objects in the exteior algebra of the module).

УДК 519.49.

1. Системы скользящих векторов на модулях. Пусть R — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Будем работать в категории R-модулей, терминологически следуя [1]: элементы кольца R будем именовать *скалярами*, элементы R-модулей — *векторами*, а гомоморфизмы модулей — *линейными отображениями.*

Далее, в духе терминологии теоретической механики, элементы модулей будут трактоваться как *свободные векторы*, а предметом нашего интереса будут *скользящие векторы (с.в.)* на R-модуле V, понимаемые как классы эквивалентности *закрепленных векторов*, т. е. пар $(x, f) \in V^2$ с отождествлением

$$(x, f) \sim (x + \alpha g, f)$$

для любого $\alpha \in R$ и любого вектора $g \in V$, делящего $(g|f)$ вектор $f \in V$, т. е. такого, что существует скаляр $\beta \in R$ такой, что $\beta g = f$. Здесь первый вектор x трактуется как *точка приложения* собственно скользящего вектора f, который, таким образом, разрешается *переносить* в любую точку $x' = x + \alpha g$, $g|f$ на так называемой *линии действия* с.в.

Точнее говоря, изучению подлежат не одиночные с.в., а конечные *системы скользящих векторов (с.с.в.)*, т. е. наборы вида

$$\mathcal{F} = \{(x_i, f_i) : i = 1, \dots, k\} \tag{1}$$

(повторение элементов не исключается). Две с.с.в. $\mathcal{F}$ и

$$\mathcal{G} = \{(x_j, g_j) : i = 1, \dots, l\}$$

называются *эквивалентными*, если от одной из них можно перейти к другой (за конечное число шагов) с помощью элементарных преобразований одного из трех типов: (i) *сдвиг* с.в. вдоль его линии действия (описанный выше); (ii) *сложение* двух с.в., приложенных в одной точке, или *разложение* одного с.в. на два *составляющих*: $\{(x,f),(x,g)\}\sim\{(x,f+g)\}$; (iii) исключение (вставка) нулевого с.в. в любой точке: $\{(x,0)\}\sim\varnothing$. В частности, с.с.в. называется *уравновешенной*, если она эквивалентна пустой системе. Класс эквивалентности с.с.в. (1) будем обозначать символом $[\mathcal{F}]$.

Основными задачами *алгебраической статики* мы считаем: 1) выяснение критериев эквивалентности двух с.с.в.; 2) отыскание простейших (в каком-либо смысле) видов, к которым может быть *приведена* произвольная с.с.в. на данном модуле, и в частности, 3) вычисление *статической характеристики* R-модуля V, понимаемой как наименьшее из целых неотрицательных чисел m таких, что любая с.с.в. на V может быть приведена к с.с.в., содержащей не более m векторов (если такое наименьшее число существует, в противном случае статическая характеристика считается бесконечной).

В теоретической механике скользящие векторы изучаются в статике (силы) и в кинематике абсолютно твердого тела (угловые скорости). Мы привносим здесь в чисто алгебраическую задачу лаконичную и выразительную терминологию из статики.

С механической проблематикой можно познакомиься, например, по книге [3]. Классическая трехмерная статика ($V=\mathbb{R}^3$) обобщалась (геометрами: А. П. Котельниковым, Б. А. Розенфельдом и другими; см. [4]) на многомерные (евклидовы, псевдоевклидовы и т. п.) пространства. На возможный интерес алгебраического подхода к изучению скользящих векторов автору настоящей работы было указано (в начале 70-х годов прошлого века) С. Г. Крейном; при этом особое внимание уделялось связям с теорией алгебр Ли. Некоторые из высказанных в то время соображений были реализованы в работе автора [5].

Здесь нас интересуют несколько иные задачи. Так, побудительным мотивом к изучению статики в категории модулей послужил следующий частный вопрос: насколько *целочисленная* статика в $\mathbb{Z}^n$ отличается от статики в $\mathbb{R}^n$?

2. Системы скользящих векторов и слайдеры. Множество классов эквивалентности конечных с.с.в. на R-модуле V можно превратить в R-модуль следующим естественным образом. Рассмотрим свободный R-модуль $F(V^2)$ с базисом V^2 и подмодуль $N\leqslant F(V^2)$, порожденный всеми элементами вида $(x,f+g)-(x,f)-(x,g)$; $(x,\alpha f)-\alpha(x,f)$; $(x+\alpha f,f)-(x,f)$, где $x,f,g\in V$; $\alpha\in R$. Нетрудно заметить, что тогда подмодуль N будет содержать, в частности, и элементы вида

$$\begin{aligned}(x+\alpha g,\beta g)-(x,\beta g)=(\,(x+\alpha g,\beta g)-\beta(x+\alpha g,g)\,)+\\ \beta(\,(x+\alpha g,g)-(x,g)\,)+(\,\beta(x,g)-(x,\beta g)\,).\end{aligned}$$

Образуем фактор-модуль

$$V\overset{\leftrightarrow}{\ }V=F(V^2)/N. \tag{2}$$

Для элементов модуля (2) введем термин *слайдеры* и обозначение

$$x\overset{\leftrightarrow}{\ }f=(x,f)+N \tag{3}$$

для *разложимых* слайдеров. Произвольный слайдер $s \in V \mathbin{(\!\!\to\!\!)} V$ может быть представлен в виде

$$s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_i \mathbin{(\!\!\to\!\!)} f_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbin{(\!\!\to\!\!)} (\alpha_i f_i), \tag{4}$$

где $x_i, f_i \in V$; $\alpha_i \in R$; $i = 1, \ldots, k$; $k \in N$.

Сопоставим теперь конечной с.с.в. (1) слайдер

$$\sigma(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbin{(\!\!\to\!\!)} f_i. \tag{5}$$

Из формулы (4) ясно, что всякий слайдер соответствует некоторой с.с.в. Легко также понять, что две с.с.в. будут эквивалентны ($\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$) тогда и только тогда, когда $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{G})$. Таким образом, справедливо

Предложение 1. *Между множеством классов эквивалентности конечных с.с.в. на R-модуле V и R-модулем слайдеров $V \mathbin{(\!\!\to\!\!)} V$ существует биекция, сопоставляющая классу эквивалентности $[\mathcal{F}]$ с.с.в. (1) слайдер (5). В частности, с.с.в. $\mathcal{F}$ уравновешена тогда и только тогда, когда $\sigma(\mathcal{F}) = 0$.* $\square$

3. Слайдеры и скольжения. Отображение $\varphi : V^2 \longrightarrow U$ из квадрата R-модуля V в произвольный R-модуль U, являющееся R-линейным по второму аргументу и обладающее свойством

$$\varphi(x + \alpha f, f) = \varphi(x, f);\;\; x, f \in V;\;\; \alpha \in R, \tag{6}$$

будем называть *скольжением* на V со значениями в U.

Предложение 2. *Отображение*

$$\rho : V^2 \longrightarrow V \mathbin{(\!\!\to\!\!)} V;\;\; \rho(x, f) = x \mathbin{(\!\!\to\!\!)} f \tag{7}$$

является универсальным скольжением на V, т. е. для любого скольжения $\varphi : V^2 \longrightarrow U$ существует однозначно определенное R-линейное отображение $\psi : V \mathbin{(\!\!\to\!\!)} V \longrightarrow U$ такое, что $\varphi = \psi \circ \rho$. На слайдере (4) это отображение задается формулой

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_i \mathbin{(\!\!\to\!\!)} f_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi(x_i, f_i). \tag{8}$$

4. Свойства скольжений. Пусть V, U — R-модули; $\varphi : V^2 \to U$ — скольжение.

Предложение 3. *Имеют место следующие свойства*

$$\varphi(b, a) = -\varphi(a, b) + \varphi(0, a + b); \tag{9а}$$

$$\varphi(a + a', b) = \varphi(a, b) + \varphi(a', b) - \varphi(0, b); \tag{9б}$$

$$\varphi(\alpha a, b) = \alpha\varphi(a, b) + (1-\alpha)\varphi(0, b) \tag{9в}$$

при любых $a, a', b \in V$; $\lambda \in R$.

Замечание 1. Из формул (9а) – (9в) и того факта, что отображение ρ является скольжением, следуют похожие по форме свойства слайдеров

$$b(\!\!\rightarrow\!\!)a = -a(\!\!\rightarrow\!\!)b + 0(\!\!\rightarrow\!\!)(a+b);$$

$$(a+a')(\!\!\rightarrow\!\!)b = a(\!\!\rightarrow\!\!)b + a'(\!\!\rightarrow\!\!)b - 0(\!\!\rightarrow\!\!)b;$$

$$(\alpha a)(\!\!\rightarrow\!\!)b = \alpha(a(\!\!\rightarrow\!\!)b) + (1-\alpha)(0(\!\!\rightarrow\!\!)b).$$

Из предложения 3 вытекает также следующая характеризация скольжений.

Предложение 4. *Отображение* $\varphi : V^2 \longrightarrow U$ *является скольжением тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

1) φ *является* R*-линейным по второму аргументу;*

2) φ *является* R*-аффинным по первому аргументу, т. е. для любых* $x, y, f \in V$; $\alpha, \beta \in R$ $(\alpha + \beta = 1)$ *справедливо:*

$$\varphi(\alpha x + \beta y, f) = \alpha\varphi(x, f) + \beta\varphi(y, f);$$

3) билинейная часть $\Phi(x, f) = \varphi(x, f) - \varphi(0, f)$ *отображения* φ *является кососимметрической, т. е.* $\Phi(a, a) = 0$ *для любого* $a \in V$.

5. Скольжения и аффинные бивекторы. Как хорошо известно (см., например, [1]), универсальным отображением в классе всех R-билинейных кососимметрических отображений $\varphi : V^2 \longrightarrow U$ является отображение

$$\nu : V^2 \longrightarrow V \wedge V;\ \nu(a, b) = a \wedge b \tag{10}$$

квадрата V^2 во внешний квадрат $V \wedge V$; значениями ν являются (разложимые) бивекторы. Чтобы приспособить эту конструкцию к изучению скольжений (т. е. аффинно-линейных отображений с кососимметрической билинейной частью), рассмотрим R-модуль $M(V) = V + V \wedge V$, являющийся (прямой) суммой подмодулей векторов и бивекторов во внешней алгебре модуля V, и отображение

$$\mu : V^2 \longrightarrow M(V);\ \mu(x, f) = f + x \wedge f. \tag{11}$$

Элементы R-модуля $M(V)$, общим видом которых является

$$m = f + \sum_{i=1}^{k} x_i \wedge f_i, \tag{12}$$

где $x_i, f_i, f \in V$; $i = 1, \ldots, k$; $k \in \mathbb{N}$, будем называть *аффинными бивекторами (а.б.)*.

Предложение 5. *Отображение (11) [как и отображение (7)] является универсальным скольжением, причем для произвольного скольжения* $\varphi : V^2 \longrightarrow U$ *однозначно определенное* R*-линейное отображение* $\psi : M(V) \longrightarrow U$ *такое, что* $\varphi = \psi \circ \mu$*, задается на а.б. (12) формулой*

$$\psi\left(f + \sum_{i=1}^{k} x_i \wedge f_i\right) = \varphi(0, f) + \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_i, f_i). \tag{13}$$

6. Слайдеры и аффинные бивекторы. Общекатегорный факт однозначной (с точностью до изоморфизма) определенности универсального объекта приводит к заключению, что R-модули слайдеров и аффинных бивекторов изоморфны между собой. Точнее, справедливо следующее

Предложение 6. *Отображения* χ *из* $V (\!\rightarrow\!) V$ *в* $M(V)$ *и встречное отображение* $\varkappa$*, заданные формулами*

$$\chi(s) = \sum_{i=1}^{k} f_i + \sum_{i=1}^{k} x_i \wedge f_i; \tag{14}$$

$$\varkappa(m) = 0 (\!\rightarrow\!) \left(f - \sum_{i=1}^{k} f_i\right) + \sum_{i=1}^{k} x_i (\!\rightarrow\!) f_i, \tag{15}$$

[где слайдер s *и а.б.* m *заданы формулами (4) и (12) соответственно] являются взаимно обратными изоморфизмами.*

7. Системы скользящих векторов и аффинные бивекторы. Основная теорема статики на модулях. По предложению 1 класс эквивалентности с.с.в. (1) на R-модуле V однозначно определяется слайдером (6). В силу предложения 6 равноправным средством описания с.с.в. могут служить аффинные бивекторы (12).

Обозначим $\chi_1(s)$ и $\chi_2(s)$ две компоненты [в прямой сумме $M(V)$] а.б. $\chi(s)$, определенного формулой (14). С.с.в. $\mathcal{F}$ можно сопоставить теперь вектор

$$\mathrm{vec}(\mathcal{F}) = \chi_1(s) = \sum_{i=1}^{k} f_i, \tag{16}$$

называемый *главным вектором* с.с.в., и бивектор

$$\mathrm{mom}_0(\mathcal{F}) = \chi_2(s) = \sum_{i=1}^{k} x_i \wedge f_i, \tag{17}$$

называемый *главным моментом.* Получаем следующий критерий эквивалентности двух с.с.в. (основную теорему статики на модулях).

Теорема 1. *Две с.с.в. эквивалентны тогда и только тогда, когда их главные векторы и главные моменты одинаковы.*

Замечание 2. Главный момент (17) берется относительно точки 0. Можно определить главный момент относительно произвольной точки $x_0 \in V$:

$$\mathrm{mom}_{x_0}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{k}(x_i - x_0) \wedge f_i.$$

В силу очевидного соотношения

$$\mathrm{mom}_{x_0}(\mathcal{F}) = \mathrm{mom}_0(\mathcal{F}) - x_0 \wedge \mathrm{vec}(\mathcal{F})$$

момент относительно x_0 также является *инвариантом* с.с.в. $\mathcal{F}$.

8. Статика на свободных модулях. Как известно (см. [1]), для *свободного* R-модуля V свободными модулями являются все его внешние степени. Следовательно, свободным является R-модуль $M(V)$ и изоморфный ему R-модуль слайдеров $V(\!\rightarrow\!)V$. Для *конечнопорожденного* свободного модуля V получаем

Предложение 7. *Пусть V — свободный R-модуль ранга n с базисом $\{e_i : i = 1, \ldots, n\}$. Тогда R-модуль слайдеров $V(\!\rightarrow\!)V$ является свободным ранга $n(n+1)/2$. В качестве базиса в этом модуле можно выбрать набор слайдеров*

$$\{0(\!\rightarrow\!)e_i : i = 1, \ldots, n\} \cup \{e_i(\!\rightarrow\!)e_j : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}.$$

Разлагая произвольный слайдер $s \in V(\!\rightarrow\!)V$ по описанному в предложении 7 базису и используя свойства слайдеров, приведенные в замечании 1, мы получим $(s_i, s_{ij} \in R)$:

$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i(0(\!\rightarrow\!)e_i) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} s_{ij}(e_i(\!\rightarrow\!)e_j) =$$
$$= 0(\!\rightarrow\!)\left(\sum_{i=1}^{n} s_i e_i\right) + \sum_{i=1}^{n-1} e_i(\!\rightarrow\!)\left(\sum_{j=i+1}^{n} s_{ij} e_j\right),$$

что представляет из себя сумму n разложимых слайдеров. Таким образом, любая с.с.в. приводима к системе с числом векторов, не превышающим n, т. е. доказано

Предложение 8. *Статическая характеристика свободного модуля конечного ранга не превышает этого ранга.*

9. Статика на свободных модулях конечного ранга над кольцами главных идеалов. В случае когда коммутативное кольцо R является *кольцом главных идеалов*, результат предложения 7 может быть доведен до точного вычисления статической характеристики с помощью следующей теоремы из полилинейной алгебры.

Пусть V — свободный модуль конечного ранга n над коммутативным кольцом главных идеалов R; t — бивектор на V. Тогда существуют базис $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$ модуля V, четное число $2l \leqslant n$ и набор $\{\tau_j : j = 1, \dots, l\}$ ненулевых элементов кольца R, обладающих свойством $\tau_j | \tau_{j+1}$ для любого $j = 1, \dots, l-1$, такие, что имеет место представление:

$$t = \sum_{j=1}^{l} \tau_j e_{2j-1} \wedge e_{2j}, \tag{18}$$

причем элементы τ_j определены однозначно с точностью до ассоциированности.

Доказательство этого факта можно найти в [2, с. 405], где приведена *ковариантная* версия; нужная нам *контравариантная* версия вытекает из описанного в [1, с. 228] изоморфизма между свободным модулем конечного ранга и вторым сопряженным к нему модулем. Заметим дополнительно, что число $2l$ по данному бивектору t определено однозначно, поскольку если рассматривать t как билинейную форму на сопряженном модуле V^*, то $n - 2l$ будет рангом подмодуля в V^*, являющегося ортогональным дополнением (относительно t) ко всему модулю V^*.

Пусть теперь s — произвольный слайдер на V, $m = \chi(s)$ — соответствующий ему по формуле (14) аффинный бивектор. Тогда $m = f + t$, где [см. (16), (17)] $f = \chi_1(s)$ — главный вектор, а $t = \chi_2(s)$ — главный момент (бивектор), отвечающие слайдеру s. Бивектор t мы представим в виде (18), а затем вернемся к s по формуле (15). Получим

$$s = 0 \mathbin{(\rightarrow)} \left(f - \sum_{j=1}^{l} \tau_j e_{2j} \right) + \sum_{j=1}^{l} e_{2j-1} \mathbin{(\rightarrow)} (\tau_j e_{2j}).$$

Произвольный слайдер s представлен в виде суммы разложимых слайдеров в количестве $l+1$, а поскольку $l \leqslant [n/2]$, то статическая характеристика модуля V не превышает $[n/2]+1$. Но, как нетрудно доказать, полученное неравенство на самом деле является равенством (это выводится из отмеченной выше инвариантности числа $2l$).

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Статическая характеристика свободного модуля конечного ранга n над кольцом главных идеалов равна* $[n/2]+1$.

Замечание 3. Теоремы 1 и 2 позволяют утверждать, что статика на свободных модулях над кольцами главных идеалов (в частности, статика на свободных абелевых группах) во многом аналогична классической статике (которую можно назвать статикой на конечномерных линейных пространствах над полями). Однако эта аналогия не является полной. Скажем, слайдер $s = 0 \mathbin{(\rightarrow)} e_2 + e_1 \mathbin{(\rightarrow)} e_2$ в $\mathbb{Z}^2$ разложимым не является, тогда как в $\mathbb{R}^2$ он представляется в виде $s = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \mathbin{(\rightarrow)} (2e_2)$.

Библиографический список

1. *Бурбаки Н.* Алгебра: (Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра). М.: ГИФМЛ, 1962.

2. *Бурбаки Н.* Алгебра: (Модули, кольца, формы). М.: Наука, 1966.
3. *Диментенберг Ф. М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978.
4. *Розенфельд Б. А., Климанова Т. М., Пецко Н. Д.* Проективная теория векторов // Изв. вузов. Математика. 1962. № 2. С. 130—141.
5. *Яцкин Н. И.* О локальных алгебрах Ли статики // Изв. вузов. Математика. 1991. № 10. С. 86—88.