Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Естественные, общественные науки»

Вып. 2 / 2009 С. 129 – 138

Н. И. Яцкин

ДЕФЕКТ-МЕТРИКА НА МНОЖЕСТВЕ КЛАССОВ ПОДОБИЯ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

На алгебре квадратных матриц заданного размера построена специальная целочисленная псевдометрика, называемая *дефект-псевдометрикой*. *Дефект-псевдорасстояние* между двумя матрицами может быть интерпретировано как *мера неподобия* этих матриц. В случае алгебраической замкнутости основного поля представлен алгоритм вычисления псевдорасстояния. Будучи инвариантной относительно подобий, дефект-псевдометрика опускается до *дефект-метрики* на множестве подобия квадратных матриц.

We constuct some special Z-valued pseudometric (*the defect-pseudometric*) on the algebra of $(n \times n)$-matrices over some field P. The *defect-pseudodistance* $\delta(A, B)$ between two matrices A and B may be interpreted as a *measure* of their *nonsimilarity*. Being similarity-invariant the pseudometric δ descends to the quotient set and generates a true metric (*the defect-metric*) on similarity classes. Assuming that P is algebraically closed we present an evaluation algorithm for the *defect-distance*.

Ключевые слова: линейное подпространство матриц, максимальный ранг элементов подпространства, степень подобия матриц.

Key words: linear subspace of matrices, maximal rank of elements of subspace, degree of similarity of matrices.

УДК 512.643.

1. Введение. Две квадратные матрицы A и B, одинакового размера $n \times n$, являются подобными тогда и только тогда, когда линейное однородное матричное уравнение $AX - XB = O$ имеет решение максимального ранга. В связи с этим представляется естественным рассматривать максимальное значение ранга $\mathrm{rank}(X)$ для решений указанного уравнения как некую *меру подобия* для матриц A и B.

В настоящей работе устанавливается, что минимальное значение дефекта $\mathrm{dfc}(X) = n - \mathrm{rank}(X)$, которое можно считать *мерой неподобия* для A и B, обладает свойствами псевдометрики, инвариантной при (независимых) подобиях данных матриц.

Практическое вычисление определенных выше *дефект-псевдорасстояний* включает следующие этапы:

— приведение данных матриц к жордановым нормальным формам (ж.н.ф.), J и G соответственно;

— явное решение уравнения $JY - YG = O$ с помощью классического алгоритма, описанного в [1];

— определение максимального ранга для решений Y последнего уравнения.

На заключительном этапе ключевую роль играют известные результаты, касающиеся следующей (более общей) проблемы: для линейного подпространства в линейном пространстве $(m \times n)$-матриц указать элемент (матрицу) максимального ранга. (Обзор исследований по этой тематике можно найти в [5].)

Свойство инвариантности дефект-псевдометрики позволяет *опустить* ее на фактор-множество *классов подобия* квадратных матриц заданного размера. При этом получается "настоящая" метрика (называемая дефект-метрикой). В силу своей целочисленности она (в отличие от "естественных" метрик) интересна не с топологической, но с *комбинаторной* точки зрения.

2. Сублогарифмическое неравенство для дефектов матриц. *Дефект* $(m \times n)$-матрицы A (с элементами из некоторого поля P) определяется формулой

$$\mathrm{dfc}(A) = n - \mathrm{rank}(A); \tag{1}$$

в случае квадратных матриц говорят о *коранге* $\mathrm{corank}(A)$; в англоязычных текстах используется термин "nullity". Дефект матрицы совпадает с размерностью ядра соответствующего линейного отображения (гомоморфизма).

Для матриц согласованных размеров имеет место *сублогарифмическое* свойство дефекта:

$$\mathrm{dfc}(AB) \leqslant \mathrm{dfc}(A) + \mathrm{dfc}(B) \tag{2}$$

(см., например, [2, с. 45], где изложение ведется на языке линейных гомоморфизмов).

3. Подпространство решений линейного однородного матричного уравнения. Рассмотрим mn-мерное линейное пространство $P^{m\times n}$, состоящее из $(m \times n)$-матриц с элементами из поля P. Зафиксируем две квадратные матрицы, $A \in P^{m\times m}$ и $B \in P^{n\times n}$, и определим $L_{A,B}$ как линейное подпространство решений $X \in P^{m\times n}$ линейного однородного матричного уравнения

$$AX - XB = O. \tag{3}$$

Введем также обозначение для размерности: $d_{A,B} = \dim(L_{A,B})$.

Очевидно, что при замене матриц A и B на подобные $A' = T^{-1}AT$ и $B' = S^{-1}BS$ подпространство $L_{A,B}$ заменится на изоморфное:

$$L_{A',B'} = T^{-1}L_{A,B}S. \tag{4}$$

Отметим, что при изоморфизме (4) *сохраняются ранги и дефекты* всех матриц.

В терминах ж.н.ф. матриц A и B (если таковая определена над полем P) может быть явно описано (см. [1, гл. 8, § 1]) общее решение уравнения (3). Для того чтобы сделать это описание пригодным для практических (программных) вычислений, приходится существенно усложнить систему обозначений. Далее, помимо требования приводимости данных матриц к ж.н.ф. (над полем P), необходима такая организация вычислений, при которой собственные значения, общие для матриц A и B, будут располагаться *в начале "спектральных списков"* $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ и будут *одинаково упорядочены.* Кроме того, алгоритм приведения матрицы к ж.н.ф. должен обеспечивать расположение жордановых ящиков (*ж.я.*), отвечающих одному и тому же собственному значению, *в порядке невозрастания размеров.*

(Алгоритмы, используемые популярными системами компьютерной алгебры, как правило, не обеспечивают соблюдения описанных выше требований. В связи с этим в вычислительных экспериментах применялись точно работающие "учебные" алгоритмы, описанные в книге автора [4, прил. 1]. Эти алгоритмы проще широко применяемых *универсальных* алгоритмов, они работают "тогда, когда работают" (например, над полем рациональных чисел, при условии существования ж.н.ф.), но зато результат их применения "почти однозначен" (определяется упорядочением спектра). Разумеется, они имеют (экспериментально выявляемые) ограничения, связанные с реальным быстродействием и объемом оперативной памяти, и совершенно непригодны в приближенных вычислениях.)

Итак, пусть спектры матриц A и B представлены в виде списков с общей начальной частью:

$$\sigma(A) = [\lambda_1, ..., \lambda_f;\, \mu_1, ..., \mu_g];\ \sigma(B) = [\lambda_1, ..., \lambda_f;\, \nu_1, ..., \nu_h], \tag{5}$$

где f, g и h — неотрицательные целые числа. Предполагается, что сумма алгебраических кратностей всех собственных значений для матрицы A (соответственно для B) равна m (соответственно n); этим обеспечивается приводимость данных матриц к ж.н.ф.

Для каждого λ_i $(i = 1, ..., f)$ рассмотрим невозрастающие последовательности натуральных чисел $\{p_k^{(i)}\}_{k=1}^{s_i}$ и $\{q_l^{(i)}\}_{l=1}^{t_i}$, задающие размеры ж.я., отвечающих λ_i в ж.н.ф. для A и B соответственно. Натуральные числа s_i и t_i являются не чем иным, как *геометрическими кратностями* λ_i для A и B. Рассмотрим также суммы $p^{(i)}$ и $q^{(i)}$ указанных последовательностей, являющиеся *алгебраическими кратностями* для λ_i. И, наконец, рассмотрим суммы m' и n' алгебраических кратностей всех общих собственных значений для A и B.

Рассмотрим далее ж.н.ф. J и G для матриц A и B соответственно, а также преобразующие матрицы T и S такие, что $J = T^{-1}AT$ (соответственно $G = S^{-1}BS$).

(Благодаря надлежащей организации нашей работы, матрицы J и G определены однозначно. Заметим, что если "стандартизовать" работу, начиная с алгоритма гауссова исключения (требовать сохранения исходного порядка при выборе ключевых столбцов), то матрицы перехода T и S будут выдаваться алгоритмом также однозначно.)

В силу (4) общее решение X уравнения (3) оказывается связанным формулой

$$X = TYS^{-1} \tag{6}$$

с общим решением Y уравнения

$$JY - YG = O. \tag{7}$$

Для Y же получается, прежде всего, блочно-диагональное представление (с, вообще говоря, прямоугольными блоками)

$$Y = \mathrm{diag}(Y', O), \tag{8}$$

где Y' — $(m' \times n')$-матрица, являющаяся общим решением уравнения

$$J'\,Y' - Y'G' = O, \tag{9}$$

в котором $(m' \times m')$-матрица J' и $(n' \times n')$-матрица G' являются подматрицами северо-западного угла в матрицах J и G соответственно, отвечающими общей части спектров (4).

Каждая из матриц J' и G' имеет блочно-диагональный вид, с "крупными" диагональными блоками J_i и G_i порядка $p^{(i)}$ и $q^{(i)}$, соответствующими общим собственным значениям λ_i $(i = 1, ..., f)$. Матрица Y' также имеет блочно-диагональный вид, с (вообще говоря, прямоугольными) "крупными" диагональными блоками Y_i размера $p^{(i)} \times q^{(i)}$.

Матрицы Y_i имеют блочную структуру, параметры которой определяются размерами ж.я. $J_k^{(i)}$ $(k = 1, ..., s_i)$ и $G_l^{(i)}$ $(l = 1, ..., t_i)$, входящих в матрицы J_i и G_i соответственно. Строки Y_i разбиваются на s_i зон, длины которых равны $p_k^{(i)}$, а столбцы — на t_i зон с длинами $q_l^{(i)}$. Так образуются $s_i t_i$ "малых" блоков $Y_{k\,l}^{(i)}$, каждый из которых является общим решением матричного уравнения

$$J_k^{(i)} Y_{k\,l}^{(i)} = Y_{k\,l}^{(i)} G_l^{(i)}. \tag{10}$$

Блоки $Y_{k\,l}^{(i)}$ имеют следующую специфическую структуру: в каждом из них выделяется, начиная с *северо-восточного* угла,

$$\mu_{k\,l}^{(i)} = \min(p_k^{(i)}, q_l^{(i)}) \tag{11}$$

диагоналей, параллельных главной диагонали; каждая из выделенных диагоналей (сплошь) заполняется определенным *именем* некоторой *свободной неизвестной.*

Таким образом, формула (11) дает число (различных) свободных неизвестных в общем решении уравнения (10).

Общее *количество свободных неизвестных* в общем решении Y (или же — в общем решении X) может быть вычислено по формуле

$$\mu_{A,B} = \sum_{i=1}^{f} \sum_{k=1}^{s_i} \sum_{l=1}^{t_i} \mu_{k\,l}^{(i)}. \tag{12}$$

Формула (12) выражает *размерность* подпространства решений матричного уравнения (3):

$$\dim(L_{A,B}) = \mu_{A,B}; \tag{13}$$

она является не чем иным, как адаптацией к реальным вычислительным процедурам изложенного в [2] метода решения этого уравнения.

Покажем для наглядности пример блока Z типа $Y_{k\,l}^{(i)}$, размера 3×5, с именами свободных неизвестных ξ_1, ξ_2, ξ_3 :

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 \end{bmatrix}.$$

4. О максимальном ранге для матриц, удовлетворяющих линейному однородному уравнению. Как будет показано ниже, представляет определенный интерес вопрос о максимальном возможном значении ранга для матрицы $X \in L_{A,B}$. Более общий вопрос о максимальном ранге для элемента произвольного линейного подпространства $W \leqslant P^{m\times n}$ поднимался уже неоднократно (см., например, [5]). Подход, развиваемый в указанной статье (для случая *бесконечного* поля P), таков: в подпространстве W выбирается базис; общий элемент $X \in W$, будучи линейной комбинацией $d = \dim(W)$ базисных матриц

$$X = \sum_{j=1}^{d} \xi_j M_j, \tag{14}$$

может рассматриваться как матрица над полем $\mathcal{R} = P(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_d)$ рациональных функций от d переменных. Оказывается, что *ранг подпространства* W, т. е. максимальное значение P-ранга для матриц из W

$$\mathrm{rank}_P(W) = \max\{\mathrm{rank}_P(X) : X \in W\}, \tag{15}$$

равняется рангу матрицы X над полем рациональных функций:

$$\mathrm{rank}_P(W) = \mathrm{rank}_{\mathcal{R}}(X). \tag{16}$$

(Заметим, что этим косвенно устанавливается тот факт, что $\mathcal{R}$-ранг матрицы X зависит лишь от заданного подпространства W, но не от выбора базиса в нем.)

Применяя этот результат к подпространству решений, расмотренному в предыдущем пункте, получаем следующее

Предложение 1. *Пусть основное поле P бесконечно и матрицы $A \in P^{m\times m}$ и $B \in P^{n\times n}$ приводимы к ж.н.ф. над P.*

(*Предположим, что спектральные характеристики данных матриц организованы по принципу, изложенному в п. 3, и будем использовать обозначения этого пункта.*)

Тогда ранг

$$r_{A,B} = \mathrm{rank}_P(L_{A,B}) \tag{17}$$

может быть определен по формуле

$$r_{A,B} = \sum_{i=1}^{f} \sum_{k=1}^{\min(s_i,t_i)} \mu_{k\,k}^{(i)}. \tag{18}$$

Доказательство. В силу изоморфизма (4) вычисление ранга (17) можно свести к вычислению $r_{J,G}$. Полученное в п. 3 представление для общего элемента $Y \in L_{J,G}$, хотя оно и не было (в силу своей громоздкости) расписано во всех подробностях, имеет как раз необходимый вид: матрица Y является линейной по свободным неизвестным

$$Y = \sum_{j=1}^{d} \xi_j M_j, \tag{19}$$

количество которых равно размерности $d = d_{A,B}$.

В качестве базисных фигурируют $(m \times n)$-матрицы M_j, имеющие ту же блочную структуру, что и Y : “крупные” блоки, нумеруемые индексом i, “малые” блоки, нумеруемые индексами k, l; причем все “малые” блоки являются нулевыми, кроме одного, в котором выделена и заполнена единицами одна из диагоналей (заполнявшаяся в общем виде X именем одной из свободных неизвестных).

Скажем, в “наглядном” примере в конце п. 3 один из “малых” блоков представляется в виде линейной комбинации

$$Z = \xi_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \xi_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Формула (18) должна доказываться поблочно: для всякого фиксированного $i = 1, ..., f$ следует проверить равенство

$$\operatorname{rank}_{\mathcal{R}}(Y_i) = \sum_{k=1}^{\min(s_i,t_i)} \mu^{(i)}_{k\,k}. \tag{20}$$

Приступим к просмотру диагональных “малых” блоков $Y^{(i)}_{k\,k}$, начиная с северо-западного углового блока $Y^{(i)}_{1\,1}$. Если $p^{(i)}_1 < q^{(i)}_1$, то один или несколько первых столбцов (в этом “малом” блоке и во всем “крупном” блоке Y_i) будут нулевыми и их можно будет вычеркнуть (в блоке Y_i), не уменьшая его $\mathcal{R}$-ранга. Если $p^{(i)}_1 > q^{(i)}_1$, то аналогичным образом удаляются одна или несколько нижних строк. Таким образом начальный блок блочной диагонали станет квадратным (верхним треугольным) и невырожденным. Столбцы (возможно, модифицированного) “крупного” блока Y'_i будут линейно независимыми (арифметическими) векторами над полем $\mathcal{R}$, причем их линейная оболочка V_1 будет совпадать с линейной оболочкой соответствующего количества начальных векторов естественного базиса арифметического пространства размерности $\mu^{(i)}_{1\,1}$. Аналогичное утверждение будет справедливо для начальных строк и их линейной оболочки U_1.

Переходим теперь ко второму диагональному “малому” блоку $Y^{(i)}_{2\,2}$. В “крупном” блоке Y'_i следует оставить только те столбцы и строки, пересекающие “малый” блок $Y^{(i)}_{2\,2}$, для которых это пересечение является ненулевым. Несколько строк снизу или несколько столбцов слева могут быть удалены. К ранее “сохраненным” добавятся $\mu^{(i)}_{2\,2}$ столбцов и столько же строк. Модифицированный второй “малый” блок станет квадратным (верхним треугольным) невырожденным. Убедимся в том, что квадратная подматрица северо-западного угла порядка $\mu^{(i)}_{1\,1} + \mu^{(i)}_{2\,2}$ во вторично модифицированном “крупном” блоке Y''_i также является невырожденной (над $\mathcal{R}$). Для этого достаточно подобрать значения свободных неизвестных, входящих в этот блок, так, чтобы он стал невырожденным (над P). Сделать это легко: диагональные неизвестные положим равными единице, остальные — нулю. Выброшенные на данном шаге столбцы (строки) не увеличили бы $\mathcal{R}$-ранг, поскольку они являются нулевыми в пределах второго “малого” диагонального блока и ниже его (соответственно в пределах и правее) и, следовательно, входят в линейную оболочку V_1 (соответственно U_1).

Далее рассматриваются (более широкие, чем V_1 и U_1) линейные оболочки V_2 и U_2, порожденные столбцами и строками, инцидентными (в блоке Y_i'') с первым или вторым "малыми" диагональными блоками, и мы продвигаемся ниже по блочной диагонали. Так продолжается до выхода блочной диагонали на правый или нижний край матрицы, после чего остается отбросить (если они есть) все оказавшиеся "лишними" строки снизу или столбцы справа, что, очевидно, не отразится на значении ранга.

Формула доказана.

5. Мера подобия и дефект-псевдометрика на алгебре квадратных матриц. Рассмотрим теперь случай, когда квадратные матрицы A и B имеют одинаковый порядок n. В этом случае число $r_{A,B}$ может служить *мерой подобия* матриц A и B. Эта целочисленная характеристика заключена в пределах от 0 до n, и в случае, когда она достигает своего наибольшего значения, среди решений уравнения (1) найдется обратимое, вследствие чего данные матрицы будут подобны. Более удобной, однако, оказывается следующая "мера неподобия".

Определение 1. *Дефект-псевдорасстоянием* между квадратными матрицами $A, B \in P^{n\times n}$ называется наименьшее значение дефекта для решений матричного уравнения (3). Будем использовать обозначение:

$$\delta(A,B) = \min\{\mathrm{dfc}(X) : X \in L_{A,B}\} = n - r_{A,B}. \tag{21}$$

Дефект-псевдорасстояние, как мы убедимся ниже, не является "настоящим" расстоянием. А именно справедливо следующее

Предложение 2. *1. Функция (21) является псевдометрикой на алгебре $P^{n\times n}$, обращающейся в нуль тогда и только тогда, когда матрицы A и B подобны.*

2. Псевдометрика (21) инвариантна при (независимом) действии подобиями группы обратимых матриц $GL_n(P)$ на два ее аргумента, т. е.

$$\delta(T^{-1}AT, S^{-1}BS) = \delta(A,B) \tag{22}$$

для любых $T, S \in GL_n(P)$.

Доказательство. Для того чтобы убедиться в справедливости первого утверждения, необходимо доказать неравенство треугольника и свойство симметрии. (Условие обращения псевдорасстояния в нуль установлено выше.)

Начнем с неравенства. Докажем, что для любых $A, B, C \in P^{n\times n}$ справедливо:

$$\delta(A,B) \leqslant \delta(A,C) + \delta(C,B). \tag{23}$$

Пусть X — решение уравнения $AX - XC = O$, имеющее наименьший дефект; тогда $\delta(A,C) = \mathrm{dfc}(X)$. Аналогичным образом, пусть $\delta(C,B) = \mathrm{dfc}(Y)$, где Y — решение уравнения $CY - YB = O$. Матрица $Z = XY$ будет, очевидно, решением уравнения $AZ - ZB = O$, причем, в соответствии с сублогарифмическим неравенством (2),

$$\mathrm{dfc}(Z) \leqslant \mathrm{dfc}(X) + \mathrm{dfc}(Y),$$

что и доказывает неравенство (23), поскольку $\delta(A,B) \leqslant \mathrm{dfc}(Z)$.

Для доказательства свойства симметричности нам придется воспользоваться известным фактом: над любым полем P произвольная квадратная матрица A подобна транспонированной к ней матрице ${}^t\!A$ (в частном случае числового поля см. доказательство в [3, с. 74]; в общем случае — в [6, с. 182]).

Указанный факт позволяет нам констатировать существование линейного изоморфизма (типа (4), сохраняющего раги и дефекты) между подпространствами $L_{B,A}$ и $L_{{}^tB,{}^tA}$. С другой стороны, существует очевидный линейный изоморфизм $X \mapsto {}^tX$ подпространства $L_{A,B}$ на подпространство $L_{{}^tB,{}^tA}$, также сохраняющий ранги и дефекты. Получаем сквозной изоморфизм между $L_{B,A}$ и $L_{A,B}$, при котором сохраняется наименьшее значение дефекта, что влечет равенство $\delta(B,A)=\delta(A,B)$.

Второе утверждение предложения вытекает из наличия (сохраняющего ранги и дефекты) изоморфизма (4).

Непосредственно из определения 1 вытекают следующие свойства дефект-псевдометрики на $P^{n\times n}$.

Предложение 3. *(1) Для любой ненулевой матрицы A псевдорасстояние до нулевой матрицы равно* $\operatorname{rank}(A)$.

(2) Псевдорасстояние между любыми двумя различными скалярными матрицами λE и μE равняется n.

(3) Псевдорасстояние $\delta(A,\lambda E)$ равняется рангу матрицы $A-\lambda E$, т. е. равняется n, если λ не является собственным значением для A, и равняется разности числа n и геометрической кратности λ в противном случае.

Если поле P *алгебраически замкнуто*, то предложение 1 позволяет вычислить дефект-псевдорасстояние между любыми двумя матрицами.

Предложение 4. *Над алгебраически замкнутым основным полем P дефект-псевдорасстояние между двумя любыми матрицами $A,B\in P^{n\times n}$ может (в обозначениях п. 3) быть вычислено по формуле*

$$\delta(A,B)=\delta(J,G)=n-\sum_{i=1}^{f}\sum_{k=1}^{\min(s_i,t_i)}\mu^{(i)}_{k\,k}. \tag{24}$$

6. Дефект-метрика на множестве классов подобия квадратных матриц. В силу второго утверждения предложения 2 дефект-псевдометрика δ на алгебре $P^{n\times n}$ может быть *опущена* на фактор-множество $\widehat{P^{n\times n}}$ классов подобия.

Определение 2. Дефект-расстоянием между классами подобия $[A]$ и $[B]$ матриц $A,B\in P^{n\times n}$ называется число

$$\widehat{\delta}\,([A],[B])=\delta(A,B). \tag{25}$$

Предложение 5. *Определение 2 корректно. Функция (25) задает метрику на множестве $\widehat{P^{n\times n}}$.*

Над алгебраически замкнутым полем множество классов подобия может быть достаточно явно описано с помощью *жордановых представителей* в классах подобия. После описанной в п. 3 “взаимной подгонки” ж.н.ф. расстояние между двумя классами явно вычисляется (см. предложение 4).

(Заметим, что, в силу конечности множества значений метрической функции (25), соответствующая ей топология дискретна. Так что рассматриваемые здесь вопросы имеют сугубо метрический, но не топологический характер.

Можно, по-видимому, говорить о *комбинаторном* характере дефект-метрики, поскольку ее значения определяются чисто комбинаторными свойствами спектральных списков.)

Пример 1. Пусть P — произвольное алгебраически замкнутое поле. Рассмотрим множество $\widehat{P^{2\times 2}}$ классов подобия квадратных матриц второго порядка. В качестве жордановых представителей будут фигурировать:

1) скалярные матрицы $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in P$;

2) диагональные матрицы $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda, \mu \in P$; $\lambda \neq \mu$, с отождествлением матриц, получаемых перестановкой диагональных элементов;

3) ж.я. второго порядка $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in P$.

Дефект-расстояние между любыми двумя классами такими, что их представители не имеют общих собственных значений, равно 2. Если два различных класса имеют общее собственное значение, то расстояние равно 1.

Пример 2. Рассмотрим следующие две матрицы десятого порядка, имеющие ж.н.ф., с единственным собственным значением λ_1 :

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{diag}(J_4(\lambda_1), J_4(\lambda_1), J_2(\lambda_1)); \\ B &= \operatorname{diag}(J_5(\lambda_1), J_3(\lambda_1), J_1(\lambda_1), J_1(\lambda_1)). \end{aligned}$$

Общее решение матричного уравнения $AX - XB = O$ имеет вид:

$$X = \left[\begin{array}{ccccc|ccc|c|c}
0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 & \xi_8 & \xi_9 \\
0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & \xi_5 & \xi_6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & \xi_{10} & \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} & \xi_{14} & \xi_{15} & \xi_{16} & \xi_{17} & \xi_{18} \\
0 & 0 & \xi_{10} & \xi_{11} & \xi_{12} & 0 & \xi_{14} & \xi_{15} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \xi_{10} & \xi_{11} & 0 & 0 & \xi_{14} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \xi_{19} & \xi_{20} & 0 & \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} & \xi_{24} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{19} & 0 & 0 & \xi_{21} & 0 & 0
\end{array}\right].$$

Дефект-псевдорасстояние

$$\delta(A, B) = n - r_{A,B} = n - (\mu_{1\,1}^{(1)} + \mu_{2\,2}^{(1)} + \mu_{3\,3}^{(1)}) = 10 - (4 + 3 + 1) = 2.$$

Библиографический список

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 576 с.
2. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969. 476 с.
3. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с.
4. *Яцкин Н. И.* Линейная алгебра: Теоремы и алгоритмы. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2008. 607 с.
5. *Fortin M., Reutenauer C.* Commutative/noncommutative rank of linear matrices and subspaces of matrices of low rank // Séminaire Lotharingien de Combinatoire. T. 52 (2004). Art. B52f. P. 1—12. http:/www.emis/journals/SLC/
6. *Roman S.* Advanced linear algebra. New York; Berlin; Heidelberg, etc.: Springer Verlag, 2007. 540 p.