УДК 512.543

Н. И. Яцкин

К ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ТРАКТОВКЕ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ГРУПП, СВЯЗАННЫХ С ВЕРБАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Настоящая работа посвящена изучению свойств групп, более слабых, нежели хорошо известные свойства (и адекватно выражаемые в терминах *топологии конечных индексов*), такие как *финитная аппроксимируемость* группы или *финитная отделимость* подгруппы. "Ослабление", по сути, сводится к *ограничению* известных свойств с рассматриваемой группы на ее *вербальную подгруппу*. Последняя рассматривается, однако, не самостоятельно, но — с топологией, *индуцированной* из объемлющей группы.

Краткое изложение результатов работы опубликовано в [4].

1. Топология конечных индексов на группе. Для произвольной группы G рассматривается совокупность $\mathcal{N}_G$ всех нормальных подгрупп конечного индекса, принимая которую за базис окрестностей нейтрального элемента, мы превращаем группу G в топологическую, с топологией τ_G, именуемой топологией конечных индексов (ТКИ); используется также термин *проконечная топология* (см., например, [11]). Всякий гомоморфизм групп $f : G \to H$ непрерывен (в смысле τ_G, τ_H), так что возникает ковариантный функтор (тождественный на гомоморфизмах) из категории групп в категорию топологических групп, сопоставляющий группе G топологическую группу (G, τ_G).

Подгруппы конечного индекса $H \leqslant_f G$ (и только они) открыты (и одновременно замкнуты) в G. ТКИ является слипшейся в случае отсутствия собственных нормальных подгрупп конечного индекса и дискретной — в случае конечности G. Хаусдорфовость τ_G равносильна финитной аппроксимируемости (ФА) группы G. Замыкание $\mathbf{cl}_G(M)$ произвольного подмножества $M \subseteq G$ определяется формулой

$$\mathbf{cl}_G(M) = \cap\{\, MN \,:\, N \in \mathcal{N}_G \,\}. \tag{1}$$

Замыкание (нормальной) подгруппы снова является (нормальной) подгруппой. Замкнутость подгруппы равносильна ее финитной отделимости (ФО). Особую роль играет замыкание тривиальной подгруппы $E = \{1\}$

$$\sigma(G) = \mathbf{cl}_G(E) = \cap\mathcal{N}_G. \tag{2}$$

Будем называть нормальную подгруппу (2) *аппроксимантом* группы G. (Термин представляет собой кальку английского *residual*; см. [9, p. 24]. При необходимости следует давать уточнения, например: $\mathcal{F}$-*аппроксимант*, с явным указанием на то, что рассматривается аппроксимация в классе $\mathcal{F}$ всех конечных групп.) Здесь для аппроксиманта мы принимаем обозначение Д. И. Молдаванского (см. [1, 2]); в [4] использовалось другое обозначение: A_G. Группа ФА тогда и только тогда, когда ее аппроксимант тривиален.

© Яцкин Н. И., 2010

На произвольной подгруппе $H \leqslant G$ топология τ_G индуцирует некоторую подгрупповую топологию τ_H^G, которая мажорируется (вообще говоря, строго) топологией τ_H. Замыкание в индуцированной топологии определяется формулой

$$\mathbf{cl}_H^G(M) = \mathbf{cl}_G(M) \cap H; M \subseteq H. \tag{3}$$

Для аппроксимантов получается включение

$$\sigma(H) = \mathbf{cl}_H(E) \subseteq \mathbf{cl}_H^G(E) = \mathbf{cl}_G(E) \cap H = \sigma(G) \cap H. \tag{4}$$

Важную роль в исследовании подгрупп играет условие совпадения топологий

$$\tau_H^G = \tau_H, \tag{5}$$

которое равносильно тому, что для любой нормальной подгруппы конечного индекса $K \trianglelefteq_f H$ найдется нормальная подгруппа конечного индекса $L \trianglelefteq_f G$ такая, что $L \cap H \subseteq K$. (В этом утверждении эпитет “нормальная” можно всюду опустить.)

Условие (5) рассматривалось в [11] и ряде работ (см., например, [6, 10]). Мы предлагаем называть подгруппы, удовлетворяющие (5), *финитно индуцируемыми* (ФИ).

Известны некоторые достаточные условия финитной индуцируемости; например, всякий *ретракт* является ФИ подгруппой. Следующее утверждение представляет собой критерий финитной индуцируемости *замкнутой* подгруппы.

Предложение 1 (Е. В. Соколов). *ФО подгруппа $H \leqslant G$ является ФИ тогда и только тогда, когда всякая подгруппа конечного индекса $K \trianglelefteq_f H$ ФО в G.*

Доказательство. Пусть H — ФО и ФИ в G. Рассмотрим подгруппу конечного индекса $K \leqslant_f H$, которая, как выше отмечалось, является открыто-замкнутой в H. В силу предположения (5), K открыто-замкнута в индуцированной топологии τ_H^G. Следовательно, в силу замкнутости H, подгруппа K замкнута в G.

Обратно, пусть подгруппа H является ФО в G вместе со всеми своими подгруппами конечного индекса. Возьмем любую из собственных подгрупп $K \in \mathcal{N}_H$ (пусть ее индекс $[H : K] = m$; $m > 1$) и выберем какую-либо систему $\{x_1 = 1, x_2, ..., x_m\}$ представителей левых смежных классов H по K. Для каждого из элементов x_j $(j = 2, ..., m)$ найдется (в силу финитной отделимости подгруппы K в G) нормальная подгруппа $N_j \in \mathcal{N}_G$ такая, что $x_j \notin KN_j = N_jK$. Рассмотрим пересечение $L = \cap_{j=2}^m N_j$, которое также имеет конечный индекс в G; получим, что $x_j \notin KL = LK$ $(j = 2, ..., m)$.

Для доказательства включения $L \cap H \subseteq K$ предположим противное и рассмотрим произвольный элемент $y \in (L \cap H) \setminus K$. Элемент $y \in H$ не принадлежит K и, следовательно, по модулю K сравним слева с одним (и только одним) из элементов x_j $(j = 2, ..., m)$, т. е. $y = x_jk_j$ для некоторого $k_j \in K$, откуда следует: $x_j = yk_j^{-1} \in LK$, в противоречие с заключением, полученным в конце предыдущего абзаца.

Значит, предположение противного не верно и требуемое включение доказано.

Рассмотрим теперь фактор-группу $\widehat{G} = G/H$ группы G по нормальной подгруппе H. Перечислим для дальнейшего ряд (в основном хорошо известных) фактов, касающихся ТКИ на фактор-группе.

Предложение 2. 1. *Фактор-топология* $\widehat{\tau_G}$, *т. е. образ* ТКИ τ_G *при отображении* $\pi : G \longrightarrow \widehat{G}$, *совпадает с* ТКИ $\tau_{\widehat{G}}$.

2. *Образом при проектировании* π *для замыкания подгруппы* K, *промежуточной между* H *и* G, *служит замыкание ее образа* $\pi(K) = K/H \leqslant \widehat{G}$:

$$\mathbf{cl}_G(K)/H = \mathbf{cl}_{\widehat{G}}(K/H). \tag{6}$$

3. *Аппроксимантом для фактор-группы* $\widehat{G}$ *служит*

$$\sigma(\widehat{G}) = \mathbf{cl}_G(H)/H. \tag{7}$$

4. *Подгруппа* $L \leqslant \widehat{G}$ *является замкнутой тогда и только тогда, когда ее прообраз* $\overset{-1}{\pi}(L)$ *замкнут в* G.

5. *Финитная аппроксимируемость* $\widehat{G}$ *равносильна замкнутости* H.

6. *Аппроксимант* $\sigma(G)$ *является наименьшей из нормальных подгрупп в* G, *фактор-группы по которым ФА*.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из теоремы о соответствии подгрупп

$$\mathcal{N}_{\widehat{G}} = \{HN/H \,:\, N \in \mathcal{N}_G\}. \tag{8}$$

Чтобы доказать второе, достаточно заметить, что π-образ пересечения семейства π-насыщенных подмножеств в G равен пересечению π-образов этих подмножеств, и провести следующую выкладку, доказывающую равенство (6):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{cl}_G(K)/H = \pi(\mathbf{cl}_G(K)) = \\
&\quad = \pi(\cap\{KN \,:\, N \in \mathcal{N}_G\}) = \cap\{\pi(KN) \,:\, N \in \mathcal{N}_G\} = \\
&\quad\quad = \cap\{KN/H \,:\, N \in \mathcal{N}_G\} = \cap\{K/H \cdot NH/H \,:\, N \in \mathcal{N}_G\} = \\
&\quad\quad\quad = \cap\{\pi(K) \cdot \widehat{N} \,:\, \widehat{N} \in \mathcal{N}_{\widehat{G}}\} = \mathbf{cl}_{\widehat{G}}(\pi(K)) = \mathbf{cl}_{\widehat{G}}(K/H).
\end{aligned}$$

Третье утверждение получается из второго, если в нем положить $K = H$, а четвертое — если обозначить $K/H = L$. Пятое утверждение вытекает из четвертого в предположении, что $L = \widehat{E}$ (тривиальная подгруппа в $\widehat{G}$), и — в свою очередь — влечет шестое.

2. Многообразия групп, вербальные и маргинальные подгруппы. Обозначения данного пункта в основном согласуются с обозначениями в классической монографии Х. Нейман [3].

Пусть W — *эндоморфно допустимая* подгруппа в свободной группе со счетным числом порождающих $F_\infty = F(x_1, x_2, ...)$; $\mathbf{W}$ — соответствующее *многообразие групп*. Во всякой группе G определена *вербальная подгруппа* $W(G)$, являющаяся эндоморфно допустимой и состоящая из всевозможных значений на элементах группы G произвольных слов $w = w(x_1, ..., x_r) \in W$. Для любого подмножества $\mathbf{w} \subseteq F_\infty$ определен *вербальный образ* $\mathbf{w}G \subseteq G$ (подмножество всех значений всех слов из $\mathbf{w}$); если подгруппа W группы F_∞ является *эндоморфно допустимым замыканием* подмножества $\mathbf{w}$, то $W(G)$ совпадает с групповой оболочкой $\langle \mathbf{w}G \rangle$, обозначаемой также $\mathbf{w}(G)$.

Помимо вербальной подгруппы, для подмножества $\mathbf{w} \subseteq F_\infty$ определяется (см. работу Ф. Холла [7]) *маргинальная подгруппа*, состоящая из таких и только таких элементов $a \in G$, что для любого слова $w = w(x_1, \ldots, x_r) \in \mathbf{w}$, для любых элементов $g_1, ..., g_r \in G$ и для любого номера $k = 1, ..., r$ справедливо равенство

$$w(g_1, ..., g_k a, ..., g_r) = w(g_1, ..., g_k, ..., g_r). \tag{9}$$

Маргинальная подгруппа $\mathbf{w}^*(G)$ является автоморфно допустимой. Можно доказать (см., например, [1]), что $\mathbf{w}^*(G) = W^*(G)$, где W — подгруппа, являющаяся эндоморфно допустимым замыканием подмножества $\mathbf{w}$.

В следующем предложении собраны некоторые свойства вербальных и маргинальных подгрупп, в основном почерпнутые из [8].

Предложение 3 (N. S. Hekster). *Для произвольной группы G, произвольной нормальной подгруппы $N \trianglelefteq G$ и произвольной эндоморфно допустимой подгруппы $W \leqslant F_\infty$ справедливы следующие утверждения:*

(i) $[\,W(W^*(G)) = E\,] \ \wedge \ [\,W^*(G/W(G)) = G/W(G)\,]$;
(ii) $[\,W(G) = E\,] \iff [\,W^*(G) = G\,] \iff [\,G \in \mathbf{W}\,]$;
(iii) $[\,W(G/N) = W(G)N/N\,] \ \wedge \ [\,W^*(G/N) \geq W^*(G)N/N\,]$;
(iv) $[\,N \cap W(G) = E\,] \implies [\,N \leq W^*(G)\,] \wedge [\,W^*(G/N) = W^*(G)/N\,]$;
(v) $W^*(G) \cap W(G) \leq \Phi(G)$, *где* $\Phi(G)$ *— подгруппа Фраттини.*

Доказательство см. в [8].

Существенную роль в доказательстве предложения 3 играют элементы вида

$$\mu(w;\, g_1, ..., g_r;\, k;\, a) = \\ = w(g_1, ..., g_k a, ..., g_r)(w(g_1, ..., g_k, ..., g_r))^{-1}, \tag{10}$$

где $w = w(x_1, ..., x_r) \in W$; $g_1, ..., g_r, a \in G$; $k = 1, ..., r$. Они обладают следующим простым свойством: если элемент a принадлежит некоторой нормальной подгруппе $N \trianglelefteq G$, то (для любого слова w, любого набора $g_1, ..., g_r$ и любого номера k) соответствующий элемент вида (10) также принадлежит N.

Замечание 1. При условии, что элемент a пробегает всю нормальную подгруппу N и что слово w и выбираемые из G элементы $g_1, ..., g_r$ также произвольны, элементы вида (10) порождают некоторую (нормальную в G) подгруппу в N; введем для нее обозначение $M_W(N, G)$. (В [8] и в ряде последующих работ использовалось другое обозначение: $[\,NW^*G\,]$.) Очевидно, что подгруппа $M_W(N, G)$ тривиальна в том и только том случае, когда N содержится в маргинальной подгруппе $W^*(G)$. Кроме того (см.

[8]), $M_W(N, G)$ содержит вербальную подгруппу $W(N)$ и содержится в вербальной подгруппе $W(G)$.

3. Вербально финитно аппроксимируемые группы. Зафиксируем многообразие групп $\mathbf{W}$ и введем следующее

Определение 1. Группа G называется *вербально финитно аппроксимируемой* (ВФА), или, точнее, $\mathbf{W}$-финитно аппроксимируемой ($\mathbf{W}$-ФА), если для любого слова $w = w(x_1, \ldots, x_r) \in W$ из факта нарушения тождества $w = 1$ в группе G (т. е. из существования таких элементов $g_1, \ldots, g_r \in G$, что $w(g_1, \ldots, g_r) \neq 1$) вытекает нарушение этого тождества для образов указанных элементов в некотором конечном гомоморфном образе группы G (т. е. существование такой нормальной подгруппы $N \in \mathcal{N}_G$, что $w(g_1N, \ldots, g_rN) \neq N$ в фактор-группе G/N).

Непосредственно из определения выводится

Теорема 1. *Следующие три утверждения равносильны:*

(a) *группа G является $\mathbf{W}$-ФА;*

(b) *пересечение вербальной подгруппы $W(G)$ с аппроксимантом $\sigma(G)$ тривиально:*

$$W(G) \cap \sigma(G) = E; \tag{11}$$

(c) *подгруппа $W(G)$ хаусдорфова в индуцированной топологии $\tau^G_{W(G)}$.*

Доказательство. Наборам $g_1, ..., g_r \in G$, нарушающим тождество

$$w(x_1, ..., x_r) = 1, \ w \in W,$$

отвечают нетривиальные элементы вербальной подгруппы

$$w(g_1, ..., g_r) \in W(G) \setminus \{1\}.$$

С другой стороны, аппроксимант $\sigma(G)$ состоит из тех и только тех элементов, которые отображаются в единицу при проектировании на любой конечный фактор G/N ($N \in \mathcal{N}_G$). Из этого немедленно усматривается равносильность утверждений **(a)** и **(b)**.

Далее, очевидно, что левая часть формулы (11) может быть переписана как пересечение пересечений всех подгрупп $N \in \mathcal{N}_G$ с фиксированной подгруппой $W(G)$; так получается равенство

$$\cap\{N \cap W(G) \, : \, N \in \mathcal{N}_G\} = E, \tag{12}$$

выражающее факт тривиальности пересечения базисных окрестностей единицы в индуцированной топологии $\tau^G_{W(G)}$, который, в свою очередь, равносилен утверждению **(c)**.

Замечание 2. Из теоремы 1 немедленно вытекают следующие простые утверждения:

— тривиальным образом являются $\mathbf{W}$-финитно аппроксимируемыми группы, финитно аппроксимируемые (в обычном смысле), а также группы, принадлежащие многообразию $\mathbf{W}$;

— любая подгруппа $\mathbf{W}$-ФА группы сама является таковой;

— если группа G является $\mathbf{W}$-ФА, то вербальная подгруппа $W(G)$ является ФА (в обычном смысле, поскольку топология $\tau_{W(G)}$ не слабее $\tau^G_{W(G)}$);

— если же подгруппа $W(G)$ финитно индуцируема, то ее финитная аппроксимируемость равносильна вербальной финитной аппроксимируемости объемлющей группы G;

— всякая $\mathbf{W}$-ФА группа является расширением ФА группы с помощью группы, принадлежащей $\mathbf{W}$;

— расширение $\mathbf{W}$-ФА группы с помощью конечной группы, принадлежащей многообразию $\mathbf{W}$, само является $\mathbf{W}$-ФА группой (при таком расширении не меняются ни аппроксимант, ни $\mathbf{W}$-вербальная подгруппа).

4. Вербально финитно отделимые подгруппы. В условиях предыдущего пункта естественным является следующее

Определение 2. Подгруппа $H \leqslant G$ называется *вербально финитно отделимой* (ВФО), или, точнее, $\mathbf{W}$-финитно отделимой ($\mathbf{W}$-ФО), если для любого элемента x вербальной подгруппы $W(G)$, не принадлежащего подгруппе H, найдется нормальная подгруппа конечного индекса $N \in \mathcal{N}_G$ такая, что $x \notin HN$ (или, что равносильно, образ xN элемента x не принадлежит образу HN/N подгруппы H в конечном факторе G/N).

Из определения 2 немедленно выводится

Теорема 2. *Следующие два утверждения равносильны:*

(d) *подгруппа $H \leqslant G$ является $\mathbf{W}$-ФО;*

(e) *подгруппа H замкнута в подгруппе $W(G)H$ в смысле индуцированной топологии $\tau^G_{W(G)H}$, т. е.*

$$\mathbf{cl}^{\,G}_{W(G)H}(H) = H. \tag{13}$$

При дополнительном предположении нормальности подгруппы H каждому из утверждений **(d)** — **(e)** *равносильно утверждение*

(f) *фактор-группа G/H является $\mathbf{W}$-ФА.*

Доказательство. Утверждение **(d)** можно пересказать следующим образом: для любого элемента $x \in W(G)$ справедлива импликация

$$[\,x \notin H\,] \Longrightarrow [\,x \notin \cap\{HN \,:\, N \in \mathcal{N}_G\}\,],$$

или, что равносильно и учитывает формулу (1) для замыкания:

$$(\,\forall\, x \in W(G)\,)\ (\,[\,x \in \mathbf{cl}_G(H)\,] \Longrightarrow [\,x \in H\,]\,).$$

Так получается включение

$$\mathbf{cl}_G(H) \cap W(G) \subseteq H, \tag{14}$$

которое можно модифицировать следующим образом:

$$\mathbf{cl}_G(H) \cap W(G)H \subseteq H. \tag{15}$$

(В самом деле, если x принадлежит левой части (15), т. е., в частности, представляется в виде $x = yh$, где $y \in W(G)$ и $h \in H$, то

$y = xh^{-1} \in \mathbf{cl}_G(H)$ и, следовательно, в силу (14), $y \in H$, а значит, и $x \in H$, что и доказывает включение (15).)

Далее замечаем, что, согласно формуле (3), левая часть (15) есть не что иное, как замыкание $\mathbf{cl}\,^G_{W(G)H}(H)$. Кроме того, это включение на самом деле является равенством (поскольку обратное включение выполняется автоматически):

$$\mathbf{cl}_G(H) \cap W(G)H = H. \tag{16}$$

Так мы приходим к равенству (13), т. е. убеждаемся в справедливости импликации **(d)**$\Rightarrow$**(e)**.

Доказательство обратной импликации очевидно, поскольку левая часть (14) не шире левой части (15), так что включение (15) влечет (14).

Докажем теперь, что **(e)**$\Leftrightarrow$**(f)**. В силу теоремы о соответствии подгрупп равенству (16) можно придать следующий вид:

$$\mathbf{cl}_G(H)/H \,\cap\, W(G)H/H = \widehat{E}, \tag{17}$$

где $\widehat{E}$ — тривиальная подгруппа в $\widehat{G} = G/H$. Но в левой части (17) мы можем опознать пересечение аппроксиманта и вербальной подгруппы для $\widehat{G}$ (см. формулу (7) и свойство (*iii*) из предложения 3):

$$\sigma(G/H) \cap W(G/H) = \widehat{E}. \tag{18}$$

И наконец, соотношение (18) является, по теореме 1, критерием ВФА для группы G/H.

Замечание 3. Из теоремы 2 вытекают следующие простые утверждения:

— тривиальная подгруппа $E \leqslant G$ является **W**-ФО тогда и только тогда, когда группа G является **W**-ФА (в самом деле, критерий (13) **W**-финитной отделимости для подгруппы в данном случае приобретает вид $\mathbf{cl}\,^G_{W(G)}(E) = E$, или $\mathbf{cl}\,_G(E) \cap W(G) = E$, что, с учетом формулы (2) для аппроксиманта, совпадает с критерием (12) **W**-финитной аппроксимируемости для группы G);

— подгруппа, ФО в обычном смысле, является **W**-ФО (просто, по определению индуцированной топологии, любое замкнутое подмножество оставляет замкнутый след в любом подпространстве).

5. Связь маргинальных подгрупп с вербально-аппроксимационными свойствами. Маргинальная подгруппа $W^*(G)$, будучи объектом, двойственным вербальной подгруппе $W(G)$, естественным образом связана со свойством ВФА. Самым простым и существенным фактом здесь является следующая

Теорема 3. 1. *Аппроксимант* **W**-*ФА группы G содержится в маргинальной подгруппе $W^*(G)$:*

$$\sigma(G) \leqslant W^*(G). \tag{19}$$

2. *Если для группы G выполнено условие (19) и, кроме того, вербальная и маргинальная подгруппы имеют тривиальное пересечение:*

$$W(G) \cap W^*(G) = E, \tag{20}$$

то группа G является $\mathbf{W}$*-ФА.*

Доказательство. 1. Пусть группа G является $\mathbf{W}$-ФА. Возьмем произвольный элемент из аппроксиманта, $a \in \sigma(G)$, и докажем, что $a \in W^*(G)$. Предположим противное, т. е. предположим, что существуют слово $w = w(x_1, ..., x_r) \in W$, элементы $g_1, ..., g_r \in G$ и номер $k = 1, ..., r$ такие, что

$$w(g_1, ..., g_k a, ..., g_r) \neq w(g_1, ..., g_k, ..., g_r), \tag{21}$$

и рассмотрим следующий (отличный от 1) элемент вида (10):

$$b = w(g_1, ..., g_k a, ..., g_r)(w(g_1, ..., g_k, ..., g_r))^{-1} \in W(G). \tag{22}$$

Согласно критерию ВФА (теорема 1, формула (11)), $b \notin \sigma(G)$.

Однако, с другой стороны, в силу свойства элементов вида (10), элемент (22) должен принадлежать $\sigma(G)$. Противоречие.

2. Доказательство второго утверждения теоремы совершенно очевидно в силу критерия (11).

В следующей теореме будет фигурировать другое необходимое условие для ВФА, которое также становится достаточным, если к нему добавить предположение (20).

Теорема 4. 1. *Если группа G является* $\mathbf{W}$*-ФА, то маргинальная подгруппа $W^*(G)$ является ФО.*

2. *Если подгруппа $W^*(G)$ ФО и выполнено условие (20), то группа G является* $\mathbf{W}$*-ФА.*

Доказательство. 1. Пусть группа G является $\mathbf{W}$-ФА. Докажем, что маргинальная подгруппа $W^*(G)$ является ФО (в обычном смысле, т. е. замкнута в топологии конечных индексов τ_G). Этот факт можно выразить следующим включением (встречное включение выполняется автоматически):

$$\mathbf{cl}_G(W^*(G)) \subseteq W^*(G). \tag{23}$$

Предположим, что элемент $a \notin W^*(G)$. Рассуждая так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, мы рассмотрим нетривиальный элемент $b \in W(G)$ вида (22), который не принадлежит аппроксиманту: $b \notin \sigma(G)$, и, следовательно, найдется не содержащая b нормальная подгруппа $N_0 \in \mathcal{N}_G$.

Убедимся в том, что тогда элемент $a \notin W^*(G)N_0 = N_0 W^*(G)$. Предположив противное, мы будем иметь представление $a = nc$, где $c \in W^*(G)$, $n \in N_0$.

По определению маргинальной подгруппы для элемента c мы получим соотношение

$$w(g_1, ..., g_k c, ..., g_r) = w(g_1, ..., g_k, ..., g_r), \tag{24}$$

справедливое для любого слова $w \in W$, любых элементов $g_1, \ldots, g_r \in G$ и любого номера $k = 1, ..., r$.

Вернемся теперь к элементу b, заданному формулой (22). С учетом (24) его выражение (в котором упомянутые выше слово, элементы и номер будут теперь фиксированными: теми, которые участвовали в построении b) может быть преобразовано следующим образом:

$$
\begin{aligned}
b = w(g_1, ..., g_k a, ..., g_r)(w(g_1, ..., g_k, ..., g_r))^{-1} = \\
= w(g_1, ..., g_k nc, ..., g_r)(w(g_1, ..., g_k, ..., g_r))^{-1} = \\
= w(g_1, ..., g_k n, \dots, g_r)(w(g_1, ..., g_k, ..., g_r))^{-1}.
\end{aligned}
$$

Последнее выражение для b позволяет (снова с помощью свойства элементов вида (10)) сделать вывод: $b \in N_0$. Противоречие.

Итак, доказано, что элемент a не принадлежит произведению $W^*(G)N_0$. Значит, a не принадлежит пересечению всех произведений вида $W^*(G)N$, $N \in \mathcal{N}_G$ (т. е. не принадлежит замыканию подгруппы $W(G)$; см. формулу (1)):

$$a \notin \cap\{W^*(G)N \,:\, N \in \mathcal{N}_G\} = \mathbf{cl}_G(W^*(G)).$$

Тем самым включение (23) доказано.

2. Второе утверждение теоремы устанавливается совсем просто: замкнутость подгруппы $W^*(G) \trianglelefteq G$ влечет тот факт, что аппроксимант $\sigma(G)$, будучи наименьшей замкнутой подгруппой в G, содержится в $W^*(G)$, что, с учетом предположения (20), влечет (в силу теоремы 3) вербальную финитную аппроксимируемость группы G.

6. Случай многообразия абелевых групп. Рассмотрим в качестве примера многообразие абелевых групп $\mathbf{W} = \mathbf{Ab}$, отвечающее подгруппе тождеств $W = F'_\infty$ — коммутанту свободной группы со счетным множеством порождающих. Как хорошо известно, вербальной подгруппой в группе G служит в данном случае коммутант: $W(G) = G'$, а маргинальной подгруппой — центр: $W^*(G) = Z_G$.

Конкретизация определения 1 дает следующее: группа G является **Ab**-ФА, если из нарушения (на некоторых элементах G) некоторого коммутаторного тождества всякий раз вытекает нарушение этого тождества для образов этих элементов в некотором конечном гомоморфном образе группы G.

Перескажем в описанной ситуации содержание теорем 1, 3 и 4.

Предложение 4. 1. *Группа является* **Ab**-*ФА тогда и только тогда, когда ее аппроксимант имеет тривиальное пересечение с коммутантом.*

2. *Аппроксимант* **Ab**-*ФА группы содержится в ее центре. В обратную сторону: если центр имеет тривиальное пересечение с коммутантом, то из того факта, что аппроксимант содержится в центре, вытекает, что группа является* **Ab**-*ФА.*

3. *Центр* **Ab**-*ФА группы является ФО. В обратную сторону: если центр ФО и имеет тривиальное пересечение с коммутантом, то группа является* **Ab**-*ФА.*

Пример. Из полученного в [1] описания аппроксиманта для групп Баумслага — Солитэра вытекает, что ни одна из них, не являющаяся ФА (в обычном смысле), не является и **Ab**-ФА. Причина этого состоит в том, что аппроксимант (в случае своей нетривиальности) порождается некоторым счетным семейством коммутаторов; так что аппроксимант и коммутант заведомо имеют нетривиальное пересечение.

7. Заключительные замечания, проблемы. 1. Автору не удалось выяснить, следует ли вербальная финитная аппроксимируемость относительно некоторого многообразия **W** из (аналогично определяемой) финитной аппроксимируемости относительно некоторого множества слов (эндоморфно допустимым замыканием которого является группа W).

2. В частности, для случая многообразия **Ab** представляется интересным вопрос, вытекает ли **Ab**-ФА из финитной аппроксимируемости относительно (единственного) тождества $[x_1, x_2] = 1$.

Последний вид аппроксимируемости допускает следующее простое описание: из наличия в группе некоммутирующих элементов вытекает, что образы этих элементов в некотором конечном факторе также не коммутируют. Можно назвать это свойство *финитной аппроксимируемостью относительно коммутирования элементов*. Оно равносильно тому, что аппроксимант не содержит нетривиальных коммутаторов.

Библиографический список

1. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в группах Баумслага — Солитэра // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 1. С. 92—100.
2. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в некоторых обобщенных свободных произведениях групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. : Естеств., обществ. науки. 2008. Вып. 2. С. 114—122.
3. *Нейман Х.* Многообразия групп. М. : Мир, 1969. 264 с.
4. *Яцкин Н. И.* Некоторые аппроксимационные свойства групп, связанные с вербальными подгруппами // Науч.-исслед. деятельность в классич. ун-те : ИвГУ — 2008. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2008. Ч. 1. : Естеств. и технич. науки. С. 21—25.
5. *Beyl F. R., Tappe J.* Group extensions, representations, and the Schur multiplicators // Lect. Notes in Math. Berlin, etc. : Springer Verlag, 1973. Vol. 959. 278 p.
6. *Coulbois T., Sapir M., Weil P.* A note on the continuous extensions of injective morphisms between free groups to relatively free profinite groups // Publ. Mat. 2003. Vol. 47, № 2. P. 477—487.
7. *Hall P.* Verbal and marginal subgroups // J. reine angew. Math. 1940. Vol. 182. P. 156—157.
8. *Hekster N. S.* Varieties of groups and isologisms // J. Austral. Math. Soc. (Ser. A). 1989. Vol. 46. P. 22—60.
9. *Lennox J. C., Robinson D. J. S.* The Theory of Infinite Soluble Groups. Oxford : Clarendon Press, 2004. 342 p.
10. *Margolis S., Sapir M., Weil P.* Closed subgroups in pro-V topologies and the extensions problem for inverse automata // Intern. J. Algebra and Computation. 2001. Vol. 11, № 4. P. 405—445.
11. *Ribes L., Zalesskii P.* Profinite Groups. Berlin, etc. : Springer Verlag, 2000. 436 p.