Министерство науки и высшего образования   
Российской Федерации

Ивановский государственный университет

Факультет математики и компьютерных наук

«Рекомендовать к защите»

Заведующий кафедрой прикладной   
математики и компьютерных наук

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Соколов Е. В.

протокол заседания кафедры № \_\_\_\_

от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 20\_\_\_ г.

Выпускная квалификационная работа   
(магистерская диссертация)

Аналитическое решение уравнений Бутчера порядка 6 и 7

|  |  |
| --- | --- |
| Направление подготовки: | 02.04.01 Математика и компьютерные науки |
| Направленность образовательной программы: | Математические методы в компьютерных науках |
| Выпускную квалификационную работу выполнил: | студентка 2 курса очной формы обучения  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Алеливи Алшантут Риман |
| Руководитель выпускной квалификационной работы: | доцент кафедры прикладной математики и компью­терных наук, кандидат физико-математических наук  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Хашин Сергей Иванович |

Иваново, 2020

**Содержание**

[1. Введение 3](#_Toc41208977)

[1.1. Актуальность 3](#_Toc41208978)

[1.2. Постановка задачи и цели исследования. 4](#_Toc41208979)

[2. Базис Грёбнера 5](#_Toc41208980)

[2.1. Основные понятия и определения. 5](#_Toc41208981)

[2.2. Лексикографическое упорядочение. 8](#_Toc41208982)

[2.3. Полиномиальная редукция 10](#_Toc41208983)

[2.4. Алгоритмы. 12](#_Toc41208984)

[2.5. Модифицированный алгоритм Бухбергера. 15](#_Toc41208985)

[2.6. Приложения базисов Грёбнера 16](#_Toc41208986)

[3. Базис Грёбнера в системе «Мапл». 19](#_Toc41208987)

[3.1. Обзор математического пакета Maple 19](#_Toc41208988)

[3.2. Пакет Грёбнера (Groebner) 21](#_Toc41208989)

[3.2.1. Вычисление многочлена: 21](#_Toc41208990)

[Вычисление базиса Грёбнера: 22](#_Toc41208991)

[3.2.3. Решение уравнения с помощью базиса Грёбнера: 23](#_Toc41208992)

[4. Применение Maple для поиска методов Рунге-Кутта. 24](#_Toc41208993)

[4.1. Условия порядка для методов Рунге-Кутта. 24](#_Toc41208994)

[4.2. Каркас методов Рунге-Кутта 30](#_Toc41208995)

[4.3. Уравнения каркаса РК(5,6) 34](#_Toc41208996)

[4.4. Уравнения каркаса РК(6,7) 36](#_Toc41208997)

[4.5. Уравнения каркаса РК(7,9) 41](#_Toc41208998)

[4. Заключение 52](#_Toc41208999)

[Список литературы 53](#_Toc41209000)

# Введение

Целью настоящей работы является применение математической системы «Maple» и пакета «Groebner» (базисы Грёбнера) для дальнейшего продвижения в построении методов Рунге-Кутта (РК) высокого порядка.

В параграфе 2 приводятся необходимые сведения из теории базисов Грёбнера. В параграфе 3 рассматриваются основные возможности математической системы «Maple» для нахождения базисов Грёбнера конкретных систем полиномиальных уравнений. В параграфе 4 мы описываем применение «Maple» и пакета «Groebner» для нахождения решений систем полиномиальных уравнений, возникающих при нахождении методов РК.

Система уравнений, задающая коэффициенты метода РК очень громоздка и лишь в простейших случаях может быть решена полностью. Поэтому в более сложных случаях из общей системы уравнений после определённой замены переменных мы выделяем некоторую более компактную подсистему – «уравнения каркаса». Если мы имеем некоторое решение этой каркасной системы уравнений, то решение полной системы будет гораздо проще. Однако и решение каркасной системы оказывается достаточно сложным (см. пп.4.3, 4.4, 4.5).

## Актуальность

Методы Рунге-Кутта являются одним из наиболее эффективным методов численного решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Чем выше порядок метода, тем более он эффективен, то есть тем меньшее количество вычислений требуется для получения результата с заданной точностью.

Однако, получение методов Рунге-Кутта высоких порядков сводится к решению большой системы полиномиальных уравнений (до сотен уравнений и переменных) сравнительно высокой степени (она равна порядку искомого метода). Например, получение метода Рунге-Кутта 9-го порядка сводится к решению системы (она называется «условия порядка») из 486 уравнений от 78 переменных, максимальная степень уравнений равно 9 (система избыточна, решения существуют). Не то, что решить, но даже явно выписать эту систему невозможно, она будет занимать многие гигабайты памяти.

Поэтому нахождение частных решений и отдельные шаги, ведущие к таким решениям очень важны для получения эффективных методов Рунге-Кутта.

## Постановка задачи и цели исследования.

В настоящей работе находится решение важной подсистемы условий порядка для методов Рунге-Кутта порядка 7, «уравнения каркаса». Эти уравнения получаются после некоторой замены переменных в исходных уравнениях. Каркасная система получается сравнительно компактной и допускает решение с помощью системы компьютерной алгебры иногда напрямую, иногда с помощью пакета, реализующего базисы Грёбнера.

Явное получение таких решений и является целью работы.

# Базис Грёбнера

Базис Грёбнера - это множество нелинейных многочленов от нескольких переменных, обладающих определенными свойствами, которые допускают простые алгоритмические решения для многих фундаментальных задач математики и естественных и технических наук. Метод оснований Грёбнера был введен Б. Бухбергером в 1965 г и назван в честь Вольфганга Грёбнера - научного руководителя Бухбергера. . Он был изучен, разработан, усовершенствован и реализован в большинстве систем компьютерной алгебры.

Примерами таких задач являются: решение алгебраических систем уравнений, представление многочленов в терминах других многочленов, анализ и построение нелинейных криптосистем, суммирование в замкнутой форме и интегрирование выражений с участием специальных функций, решение линейной замкнутой формы, решение краевых задач (дифференциальные уравнения). Удивительно, но и проблемы, которые кажутся далёкими от алгебры, такие как, например, автоматизированное доказательство и открытие геометрических теорем, построение раскрасок графов и решение игр Судоку, могут быть сведены к вычислениям базисов Грёбнера. Примерами проблем в естественных и технических науках, которые недавно были решены с помощью методологии оснований Грёбнера, являются: интеллектуальное управление нефтяными платформами, обратный инжиниринг программного обеспечения, поиск генетических взаимосвязей между видами и решение обратной кинематики роботов.

## Основные понятия и определения.

Теория базисов Грёбнера сосредоточена вокруг концепции идеалов, порожденных конечными множествами многомерных полиномов.

**Определение 1:** Коммутативное кольцо является непустым множеством R с двумя бинарными операциями сложение (+) и умножение (·), определенными на R, таких что абелева группа, умножение (·) коммутативно и ассоциативно, и закон дистрибутивности имеет место . Говорят, что кольцо с единицей если в существует элемент нейтральный по умножению.

**Определение 2:** Коммутативное кольцо с единицей называется «полем» если всякий его ненулевой элемент обратим.

**Определение 3:** Пусть кольцо. Непустое подмножество R называется идеалом (обозначение ), если выполнены следующие условия:

1. если , то ;
2. если , то .

Если существует такой элемент такой что , то называется главным, и элемент a называется порождающим (или образующим) для идеала Ι.

**Определение 4:** Пусть - произвольное поле. Многочлен от одной переменной с коэффициентами в поле это выражение вида:

Если , то называется старшим коэффициентом и старшим членом многочленом . -свободный член. Обозначим степень ненулевого многочлена через, где нулевой многочлен – это .

Через обозначим множество всех многочленов с коэффициентами из поля .

**Теорема 1**: Множество с операциями сложения и умножения многочленов образует коммутативное кольцо с единицей.

**Теорема 2:** Для любого многочлена ) и любого ненулевого многочлена ) существуют и единственны многочлены такие, что:

где или . Многочлен называется частным, а - остатком при делении на .

**Теорема 3 (**теорема Безу**):** Число является корнем многочлена ) тогда и только тогда, когда делится на без остатка.

**Определение** 5: Пусть ) наибольший общий делитель многочленов это многочлен (обозначение = если:

1. общий делитель многочленов ;
2. для любого общего делителя многочленов многочлен делится на .

**Теорема 4:** Пусть ) и Тогда существует многочлены ) такие, что .

**Определение 6:** Пусть N - неотрицательные целые числа. Пусть - степенной вектор в и пусть любые переменных. Тогда моном от определяется как произведение . Более того, полная степень монома

определяется как .

Например: являются мономами от . Они имеют полные степени 8,4,5,3 соответственно.

**Определение 7:** многочлен от нескольких переменных от с коэффициентами в поле является конечной линейной комбинацией, , мономов и коэффициентов . Полная степень многочлена определяется как максимальная, такой, что .

Например: многочлен от x, y, z . . Полная степень многочлена равна 9 , поскольку это максимум всех степенных векторов мономов с ненулевыми коэффициентами. Это вектор степень монома .

**Определение 8:** Обозначаем через множество всех многочленов от нескольких переменных от с коэффициентами в поле . образует коммутативное кольцо, называется кольцом многочленов.

**Определение 9:** Пусть Множество многочленов от нескольких переменных тогда идеал, порожденный множество , обозначаемый определяется как:

Многочлены называются базисом для идеала, который они порождают. Когда множество конечно, мы будем говорить, что идеал конечно порожден.

Теорема Гильберта о базисе утверждает, что каждый идеал конечно порожден, то есть для каждого идеала в кольце многочленов существует конечный базис.

## Лексикографическое упорядочение.

Пусть у нас полиномы от переменных с коэффициентами в поле . Мы будем предполагать следующий порядок переменных *:*

Замечание. Вычисление базисов Грёбнера существенно меняется, когда мы используем разные мономиальные упорядочения.

**Определение 1:** Линейное упорядоченное на называется устойчивым, если выполняются следующие два условия:

1. .
2. .

Ясно, что допустимое упорядочивание устанавливает взаимно-однозначное соответствие между и мономами в , то есть если , то .

Есть несколько различных мономиальных упорядочений. Ниже приводится описание наиболее важных трех:

**Определение 2 (**Лексикографическое упорядочение): тогда и только тогда, когда самая левая ненулевая координата вектора положительна.

**Определение 3** (градуированное лексикографическое упорядочение):

тогда и только тогда, когда или ( и ).

**Определение 4** (градуированное обратное лексикографическое упорядочение): тогда и только тогда, когда или и самая правая ненулевая координата вектора отрицательна.

Примеры:

* так как в самая левая ненулевая координата является положительным. Следовательно, что .
* так как и самая левая ненулевая координата в положительно. Следовательно, что
* .
* так как и самая правая ненулевая координата вектора отрицательна. Следовательно, что .

**Определение 5:** Предположим, что произвольное мономиальное упорядочение установлен и задан ненулевой многочлен мы определяем:

* Мульти степень как: .
* Старший моном как:
* Старший коэффициент как:
* Старший член как:.

Например:

Пусть у нас многочлен тогда:

* По отношению к лексикографическому упорядочению переупорядочивается в порядке убывания как:

, , ,.

* По отношению к градуированному лексикографическому упорядочению переупорядочивается в порядке убывания как:

, , ,.

* По отношению к градуированному обратному лексикографическому упорядочению переупорядочивается в порядке убывания как:

, , ,.

## Полиномиальная редукция

Как мы увидим, полиномиальная редукция является краеугольным камнем в алгоритме базисов Грёбнера. Многочлен редуцирован к другому многочлену по модулю некоторого множества многочленов , будем обозначать как , тогда и только тогда, когда может быть удален путем вычитания соответствующего кратного из: соответствующего полинома , мономиала , где , и скалярного , где дающего .

**Определение 1**: тогда и только тогда, когда существуют такие, что . Этот новый многочлен эквивалентен относительно идеала, порожденного . В противном случае называется нередуцированным по модулю .

Другими словами, называется нередуцированным по модулю , если ни один из старших мономов элемента не делит старший моном многочлена .

Пример:

Пусть , где и .

Рассмотрим многочлен

.

Эти многочлены упорядочены относительно лексикографического упорядочения. Выберем . Получим многочлен

.

Таким образом, .

**Определение 2:**Многочлен называется нормальной формой тогда и только тогда, когда и нередуцированный по модулю F.

Пример:

Пусть , и . Рассмотрим многочлен

Эти многочлены упорядочены относительно лексикографического упорядочения, где .

Ясно, что редуцирован по модулю . Если мы продолжим процесс редукции, то получим многочлен , который является нередуцированным по модулю . Таким образом, это нормальная форма .

**Определение 3:** Многочлен полностью редуцируется относительно F, если ни один член из не делится ни на один из LT () для всех .

**Теорема 1:** Пусть упорядоченный s-набор многочленов из *.* Тогда если многочлен из *,* тогда ,такой что и либо , либо является полностью редуцированным многочленом.

Теперь мы обратимся к термину, который играет существенную роль в теории базисов Грёбнера.

**Определение 4**: Пусть у нас два многочленов *.* Пусть

( где двух мономов является произведением всех переменных, каждая из которых имеет степень, которая является максимальной из ее степеней в двух мономиалах). Мы определяем многочлен как следующую линейную комбинацию:

Пример:

Пусть , и . Эти многочлены упорядочены относительно Лексикографическое упорядочение. и .. Пусть . Тогда:

Есть несколько эквивалентных определений для базисов Грёбнера.

**Определение 5:** Пусть у нас есть конечное множество многочленов . Тогда является базисом Грёбнера тогда и только тогда, когда если и являются нормальными формами по модулю , то .

**Теорема 2:** Пусть-конечное множество многочленов. Конечное множество многочленов и пусть - идеал, порожденный множество . Следующие утверждения эквивалентны:

* -это базис Грёбнера;
* редуцируется к нулю по модулю ;
* Каждая редукция для к редуцированному многочлену относительно всегда дает ноль.

Чтобы проверить, является ли базис базисом Грёбнера надо вычислить все и посмотреть, все ли они редуцированы к нулю или нет. Предыдущая теорема дает нам инструменты для построения базиса Грёбнера. Если один не редуцирован к нулю, то можно добавить его к базису без изменения порождённого идеала потому что он является линейной комбинацией двух многочленов базиса. Когда этот добавлен к базису он будет редуцированном к нулю. Однако будут рассмотрены и новые S-полиномы. Этот процесс подходит к концу, как это было показано Бухбергером. В этом суть алгоритма Бухбергера для вычисления базисов Грёбнера. В следующем разделе мы обсудим этот алгоритм.

## Алгоритмы.

Следующий алгоритм является оригинальным алгоритмом, приведенным Бухбергером в его докторской диссертации.

* **Алгоритм Бухбергера:**

Входные данные: множество многочленов , которое порождает идеал . Выходные данные: базис Грёбнера , который порождает тот же идеал где .

Repeat (Повторять)

Then

Until

Мы инициализируем базис Грёбнера G исходному множеству многочленов. Формируем множество - множество всех пар многочленов из . Выбираем пару из . Мы вычисляем и редуцируем его по модулю к многочленному .

Если ненулевый, то мы добавляем его к базису и обновляем множество пар , формируя и добавляя новые пары для всех . Мы повторяем этот процесс до тех пор, пока любое вычисленное не станет равным нулю.

Вычисление является простым. Вычисление нормальной формы возможно с помощью любого алгоритма нормальной формы. Одним из алгоритмов является обобщенный алгоритм деления. Нормальная форма может быть принята как остаток от деления многочлена на множество . Ниже приведен этот алгоритм.

* **Обобщенный алгоритм деления:**

Входные данные: множество многочленов , и любой ненулевой многочлен .

Выходные данные: остаток, , от деления на . Коэффициенты: такой, что либо , либо является полностью редуцированным многочленом относительно .

Repeat (Повторять)

Если делителя делит промежуточного дивиденда, алгоритм работает так же, как и в случае с одной переменной. Если нет делит , то алгоритм удаляет от и добавляет его к .

Пример:

Пусть , где и . Мы работаем с чистом лексикографическом упорядочением и считаем, что . Единственный многочлен, который следует рассматривать это .

тогда

Этот многочлен ненулевой и его остаток при делении на равен , который не равен нулю. Следовательно, должен быть включен в порождающее множество. Следовательно, что , и рассматриваемые S-многочлены являются , и .

редуцировано к нулю относительно .

и редуцирован к который является ненулевым, тогда мы добавим его в . Пусть тогда , , , , , все редуцировано к нулю относительно нового G. следовательно, мы останавливаемся и базис Грёбнера для идеала, порожденного старым G, является новым .

## Модифицированный алгоритм Бухбергера.

Входные данные: множество многочленов , которое порождает идеал .

Выходные данные: базис Грёбнера , который порождает тот же идеал где .

Repeat

Где или критерий истинен при условии выполнения условий из (4) выше.

## Приложения базисов Грёбнера

Одним из наиболее важных приложений является использование алгоритма базисов Грёбнера для решения систем полиномиальных уравнений и ответов на вопросы о разрешимости таких систем.

Мы предполагаем, что системы уравнений, с которыми мы имеем дело, от переменных с лексикографическим упорядочением.

**Определение 1:**

Пусть , i-й элиминационный идеал является идеалом определяется по формуле:

.

Таким образом, состоит из всех следствий , которые устраняют переменные . Мы видим, что устранение означает нахождение ненулевых многочленов в i-м элиминационным идеале , а значимость базисов Грёбнера для решения систем уравнений связано с тем, что для базисов Грёбнера это просто построить все элиминационные идеалы. При построении базисов Грёбнера переменные удаляются последовательно. Кроме того, порядок исключения соответствует порядку переменных: сначала удаляется, затем удаляется и так далее.

Чтобы решить систему полиномиальных уравнений (которая определяет идеал ) действуем следующим образом:

1. Вычисление базиса Грёбнера, идеала относительно лексикографическое упорядочение.
2. Нахождения корни генератора от , применив методы с одной переменной.
3. Применяя обратную подстановку, чтобы найти корни всех генераторов в
4. Корни генераторов в распространяются на решения исходных уравнений.

Пример:

Пусть у нас следующая система уравнений:

Пусть быть идеалом:

тогда базис Грёбнера для относительно лексикографическое упорядочение это , где

Заметим следующие:

* У нас есть один генератор, от переменной . Другие переменные были исключены в процессе нахождения базиса Грёбнера. Этот многочлен имеет конечное число корней, которые могут быть определены с помощью любого метода с одной переменной.
* Существует один генератор от переменных и . поскольку у нас есть все возможные корни , мы можем определить корни . возможно, что у нас есть генератор только от .
* Генератор только от переменной . Все корни могут быть вычислены.
* Процесс обратной подстановки продолжается до тех пор, пока не будут определены все корни генераторов.
* Также отметим, что когда основания Грёбнера вычисляются с использованием, лексикографическое упорядочение переменные удаляются хорошим способом.

# Базис Грёбнера в системе «Мапл».

## Обзор математического пакета Maple

В наше время, с развитием науки, технологии стали неотъемлемой частью нашей жизни. Сегодня существует множество программ, которые облегчают решение математических задач, таких как Maple, Matlab, Mathcad и т.д. В этой главе диссертации мы представляем обзор программы Maple.

Технические вычисления составляют основу решения проблем в математике, технике и науки. Maple предлагает обширное хранилище математических алгоритмов охватывающих широкий спектр применения.

Maple-это программный пакет, система компьютерной алгебры для аналитических вычислений на компьютере, содержащий более двух тысяч команд, которые позволяют решать задачи алгебры, геометрии, математического анализа ,дифференциальных уравнений, статистики, математической физики .Он объединяет элементы из процедурных языков (такие как Паскаль),функциональные языки (такие как Lisp) и объектно-ориентированные языки (такие как Java) , Maple предоставляет исключительно простой, но мощный язык для написания собственных программ. Maple предоставляет интерактивную среду решения проблем, дополненную процедурами для выполнения символьных, числовых и графических вычислений. В основе системы компьютерной алгебры Maple лежит мощный язык программирования, на котором построены библиотеки математических команд Maple.

Maple поддерживает вычисления с точными числовыми величинами, а также приближенные вычисления с произвольно высокой точностью с числами с плавающей точкой.

* **Решение уравнение в Maple.**

**Решение алгебраических уравнений.**

Команда solve решает одно или несколько уравнений или неравенств.

Вызов команды:

solve(equations, variables);

где;

* equations – уравнение или неравенство, или набор или список уравнений или неравенств;
* variables-(необязательно) имя или последовательность или список имен неизвестных, относительно которых нужно решить систему equations.

Если команда solve не находит никаких решений, то возвращается пустая последовательность (NULL) или пустой список. Это означает, что решений нет, или наша система не может их найти.

Для полиномиальных уравнений Maple возвращает неявные решения в терминах RootOf.

Примеры:

>**solve(2\*x=3,x);**



Решение квадратного уравнения:

>**solve(x^2-3\*x+2=0,x);**



Указание переменных:

>**solve({2\*x+3\*y+5\*z},{z});**



Решение линейных систем:

>**solve({x+y+z=2,2\*x+y=3,z=1},{x,y,z});**



Для записи корней многочленов применяется выражения RootOf:

>**solve(x^4-x^3-1);**



Явные решения многочленов 3-й и 4-й степеней и выше могут оказаться очень большими, поэтому Maple по умолчанию записывает их решения через RootOf, даже если их можно выразить в радикалах.

Команда fsolve используется для нахождения численного решения уравнений. Это команда можем использовать в тех случаях, когда аналитических решений нет.

Вызов команды

fsolve(equations, variables);

где

* equations – уравнение или набор уравнений.
* Variables – (необязательно) имя или имена переменных, относительно которых надо решить уравнения.

Например:

> fsolve(cos(x)=2\*x,x);



## Пакет Грёбнера (Groebner)

Одним из неоспоримых преимуществ технологии является экономия времени и усилий. При использовании программы Maple мы можем легче вычислить базис Грёбнер с помощью пакет Грёбнера (groebner).

### Вычисление многочлена:

Последовательность вызова:

SPolynomial( characteristic=).

Параметры:

– многочлены;

- мономиальное упорядочение;

- (необязательная) характеристика.

Пример:

> **with(Groebner):**

> **f := x-5\*y^2-7\*z^3;**



> **g := x^2-x\*y+9\*z;**



> **SPolynomial(f, g, plex(x,y,z));**



> **SPolynomial(f, g, tdeg(x,y,z));**



> **SPolynomial(f, g, grlex(x,y,z));**



Где:

* это Лексикографическое упорядочение, где

;

* это градуированное лексикографическое упорядочение,где

;

* это градуированное обратное лексикографическое упорядочение.

### Вычисление базиса Грёбнера:

Последовательность вызова:

Basis(**J**, **tord**, **opts**)

Параметры:

– множество многочленов или многочленный идеал;

- мономиальное упорядочение;

- необязательные аргументы формы .

Пример:

> **with(Groebner):**

> **F := [x^3 - 3\*x\*y+z\*x, x^2\*y - 2\*y^2 + z,x^2+y-z];**



> **Basis(F, plex(x,y,z));**



> **Basis(F, grlex(x,y,z));**



> **Basis(F, tdeg(x,y,z));**



### Решение уравнения с помощью базиса Грёбнера:

Последовательность вызова:

Solve(**G**, **X**, **NZ**, **opts**)

Параметры:

список или множество многочленов или многочленный идеал;

(необязательно) список или множество переменных;

- (необязательно) список или множество ненулевых ограничений;

- необязательные аргументы формы **.**

Пример:

> **with(Groebner):**

> **G:=[x^2+y^2+z^2-1,x^2+y^2+z^2-2\*x,2\*x-3\*y-z];**



> **Solve(G,[x,y,z]);**



# 4. Применение Maple для поиска методов Рунге-Кутта.

## Условия порядка для методов Рунге-Кутта.

Многие явления и процессы в природе и обществе описываются с помощью Обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые имеют большое значение в их приложениях. Эти приложения включают науку и знания, они являются связующим звеном между математикой и другими науками, такими как физика, химия, биология медицине, технике и т.д. Многие ученые работали над дифференциальными уравнениями и среди них Лейбницем и Ньютоном, Эйлера, Лагранжа, Гаусс, Коши, Жозеф Лиувилль, Софус Ли, Анри Пуанкаре и другие. Невозможность решения большого числа уравнений в аналитическом виде привела к разработке численных методов для их решения. Методы Рунге - Кутты (РК) являются одним из них. Методы Рунге-Кутты большой класс численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Первые методы данного класса были предложены около 1900 года немецкими математиками К. Рунге и М. В. Куттой.

1. **Постановка задачи Коши:**

В общем случае постановка Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка формулируется следующим образом найти решения уравнения:

.

Где начальное значение ; начальное значение вектора ,

; . это уравнение написано в развернутом виде таким образом:

*.*

Одним из методов численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений являются методы Рунге-Кутта. Эти методы являются одношаговыми методами.

1. **Методы Рунге-Кутта:**

Рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка:

для , ….(1)

Явный m-этапный метод Рунге–Кутта заключается в следующем. Пусть численное решение задачи Коши известно в точке Задаются некоторые числовые коэффициенты и последовательно вычисляются следующие функции:

;

;

…………………………………………….

Затем из формулы:

….(2)

Находится решение задачи в следующей точке . Коэффициенты ,, выбираются из соображений точности аппроксимации разностным уравнением (2) дифференциального (1).

Чтобы уравнение (2) аппроксимировало (1) необходимо потребовать, чтобы Методы Рунге–Кутта при используются нечасто. Наиболее широкое применение нашли методы Рунге–Кутта при .

При m = 1 получается одноэтапный метод — метод Эйлера, который является самым простым методом решения задачи Коши типа Рунге–Кутта.

1. **Условия порядка для методов Рунге-Кутта**

стадийные методы Рунге-Кутта описываются некоторой действительной нижнетреугольной матрицей размера с нулевой диагональю, всего коэффициентов. Они должны удовлетворять некоторой системе полиномиальных уравнений, которые называются условиями порядка. Коэффициенты метода обычно записываются в виде таблицы, называемой Бучера (Джон Чарльз Батчер является одним из тех, кто работает над многоступенчатыми методами для задач с начальными значениями, такими как Рунге-Кутта и общие линейные методы он является новозеландским математиком). Методы Рунге-Кутта характеризуются двумя основными параметрами где порядок метода, количество стадий. Например, классические методы имеют параметры . Каждый стадийны метод РК порядка задается нижнетреугольной матрицей размера вида:

И вектором длины . При объедении матрицы и вектора получаем расширенную матрицу размера вида:

.

Матрица метода РК удовлетворяет следующим условиям:

* элементы на главной диагонали и выше неё равны 0;
* элементы под диагональю отличны от 0.

Пример:

Классические методы 4 порядка имеют следующие расширенные матрицы:

Для нахождения стадийного метода Рунге-Кутта требуется найти матрицу , коэффициенты которой удовлетворят некоторой системе нелинейных (полиномиальных) уравнений. Бучер предложил эффективный способ описания этих уравнений. Он сопоставляет каждому отмеченному дереву (помеченное дерево–граф без циклов с отмеченной вершиной, корнем дерева) одно и только одно уравнение на коэффициенты матрицы .

**Обозначения:**

Будем отождествлять матрицу с соответствующими линейными операторами в пространствах . Вектора обычно будем представлять в виде матрицы из одного столбца.

Пусть у нас два векторов:

Обозначим через следующий вектор:

Скалярное произведение векторов столбцов обозначим:

.

Вектор, состоящий из одних единиц обозначим . Обозначим через вектор, составленный из :

.

**Деревья:**

Будем рассматривать общую структуру условий, определяющих порядок метода РК, или кратко условий порядка.

**Определение 1**:

1. Деревом будем называть граф без циклов с отмеченной вершиной (корнем). Будем считать, что корень дерева расположен внизу.
2. Пусть некоторая вершина в дереве , через обозначим дерево, состоящее из всех вершин дерева , лежащих над .
3. Обозначим через дерево состоящее из одного корня.
4. Для двух деревьев через обозначим дерево, получающееся объединением корней деревьев .
5. Для любого дерева через обозначим дерево, полученное из добавлением еще одной вершины под корнем. Дерево - всегда одноногое. Любое дерево может быть получено из комбинацией операций и умножения.
6. Для любого дерева через обозначим количество вершин дерева минус 1 (то есть количество ребер). Называем число весом дерева.
7. Для любого дерева через обозначим произведение по всем вершинам , кроме корня +1).Через обозначим произведение (+1).

Предложение:

1. ;
2. ;
3. ;
4. .

**Определение 2:**

Для любого дерева и квадратной матрицы определим вектор следующим образом:

* Для дерева положим где ;
* для дерева положим где - произведение матрицы на вектор.
* для двух деревьев положим .

Можно из дерева получить все деревья с помощью операции и умножения деревьев. Для полного задания оператора этих правил достаточно.

Пример:

Таблица 4.1.1 Первые 8 деревьев

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 |  |  | 1 | 1 |
| 2 | 1 |  |  | 1 | 2 |
| 3 | 2 |  |  | 2 | 6 |
| 4 | 2 |  |  | 1 | 3 |
| 5 | 3 |  |  | 6 | 24 |
| 6 | 3 |  |  | 2 | 8 |
| 7 | 3 |  |  | 1 | 4 |
| 8 | 3 |  |  | 2 | 12 |

**Система уравнений:**

Чтобы метод Рунге-Кутта имел порядок , необходимо и достаточно выполнения равенств:

Для всех деревьев веса меньшего .

Замечание: Система предыдущих уравнений называется системой Бутчера.

Пример:

Таблица 4.1.2. Первые 8 уравнений порядка

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | уравнения |  |
| 1 | 0 |  |  |  |
| 2 | 1 |  |  |  |
| 3 | 2 |  |  | … |
| 4 | 2 |  |  |  |
| 5 | 3 |  |  | … |
| 6 | 3 |  |  | 2 |
| 7 | 3 |  |  |  |
| 8 | 3 |  |  | … |

Чтобы легко найти число условий порядка для любого , используем теорему Бутчера.

Пример:

Таблица 4.1.3.Количество условий поряка

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| порядок | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| число условий | 1 | 2 | 4 | 8 | 17 | 37 | 85 | 200 | 486 | 1205 |

## Каркас методов Рунге-Кутта

Так как уже отмечалось коэффициенты метода РК записываются в виде нижнетреугольной матрицы с нулевой диагональю:

Размер этой матрицы . Количество неизвестных равно , где количество стадий.

Будем рассматривать Коэффициенты как вектора столбца . Здесь матрица из одного столбца, составленного из единиц.

**Определение 1:**

Полным каркасом метода РК называется набор переменных:

Где первый столбец , второй столбец , третий столбец и так далее.

**Определение:**

Каркасом ог порядка метода РК называется набор из первых столбцов матрицы полного каркаса . Значит, каркас 1-го порядка состоит из коэффициентов , каркас 2-го порядка состоит из двух векторов и и так далее.

Таким образом, значительная часть уравнений Бучера можно выписать, применив каркас небольшого порядка и вектор . е-каркас:

пусть - нижнее треугольная матрица вида:

выведем переменные :

таким образом, можно выразить переменные через переменные и остальные переменные по формулам:

Итак, через старую систему переменных однозначно можно выразить новую систему переменных, и наоборот.

Сделаем аналогичную замену: вводим вместо переменных переменные :

Обратную замену переменных можно осуществить с помощью следующих формул:

Таким образом, заменили часть переменных на новые переменные . Некоторые из уравнений Бучера для матрицы зависит только от переменных ,и :

При , где порядок метода РК.

Пример:

Когда получаем:

Когда получаем:

или

при .

Когда получаем:

или

при .

Таким образом, можно переписать каркасные уравнения:

* при в виде:
* при в виде:

Пример:

Каркасные уравнения для методов Рунге-Кутта (5,6) зависит от 14 переменных:

Из 8 уравнений:

## Уравнения каркаса РК(5,6)

Исходные уравнения (каркас уравнения для Рунге-кута(5,6)):













Решение:

Начало переменной было выделено из уравнения , и мы получили следующее



Затем мы выразили уравнение через переменную



И из уравнения была выделена переменная



При выражении уравнения через переменную получаем что



Уравнение выражаем через переменную



На последнем шаге выразили уравнение через переменную

.



Таким образом, нами получено общее решения данной системы уравнений.

В предыдущем решении мы находим, что свободными переменными являются:

.

Все остальные:

можно выразить через них по приведенных выше формулам.

Замечание. Полученное решение является не полным: знаменатели всех выражений не должны обращаться в 0, то есть:

.

## Уравнения каркаса РК(6,7)

Исходные уравнения (каркас уравнения для Рунге-кута(6,7)):



















мы выделяем переменную из уравнения из , из , из и из мы находим что:

> **b[2]:=solve(eq[1],b[2]);**



> **b[3]:=solve(eq[2],b[3]);**



> **b[4]:=solve(eq[3],b[4]);**



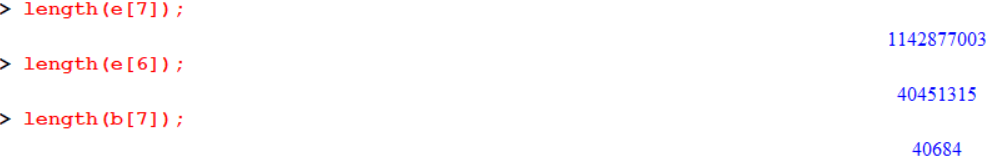
> **b[5]:=solve(eq[4],b[5]);**



> **b[6]:=solve(eq[5],b[6]);**



Когда мы выделяем переменную из уравнения , из уравнения и из получаем выражения слишком велики их длины (length(e[7])=1142877003, length(e[6])=40451315, length(b[7]=40684) и общий оббьем использованной памяти составил 502 Мбайт.





Поэтому дальнейшее продвижение невозможно.

Для дальнейшего продвижения можно попытаться заменить переменные некоторыми рациональными значениями и продолжить вычисления, например:

Таким образом, мы получаем следующие уравнения:



















Когда мы выделяем переменную из уравнения , из , из , из и из мы находим что:











Затем мы выразили уравнение через переменную



И из уравнения была выделена переменная



Уравнение выражаем через переменную



После упрощения уравнения получаем уравнение



Чтобы упростить уравнение , мы даем необязательных значения для переменных , например получаем что



(e9-это уравнение после упрощения)

Оно является квадратичным относительно и его можно выразить.

В этом решении свободными переменными являются:

.

Все остальные:

можно выразить через них по приведенных выше формулам.

## Уравнения каркаса РК(7,9)

Рассмотрим 9-стадийные методы Рунге-Кутта порядка 7 (РК(7,9)).

Каркас этой системы выглядит так:

























Сначала будет последовательно выражать одну из переменных из одного из уравнений, в которое она входит линейно.

При выражении уравнения через переменную получаем:



Затем выразим из уравнения через переменную , получаем:



При выражении уравнения через переменную получаем:



При выражении уравнения через переменную получаем:



При выражении уравнения через переменную получаем:



При выражении уравнения через переменную получаем:



При выражении уравнения через переменную получаем:



При выражении уравнения через переменную получаем:



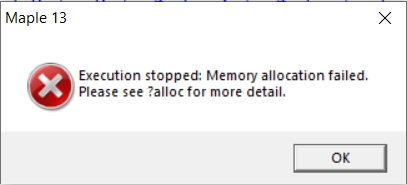
При выражении уравнения через переменную получаем:



При выражении уравнения через переменную получаем:



Дальнейшее продвижение таким путем невозможно. Уже в этот момент общий объем использованной памяти составил 78.2 Мбайт. При следующем шаге в этом направлении программа выдаёт сообщение о нехватки памяти:



Для дальнейшего продвижения можно попытаться заменить переменные некоторыми рациональными значениями и продолжить вычисления, например:

Подставляя эти значения в данные уравнения, получим следующие уравнения:

























После этого мы выделяем переменную из уравнения , из , из , и из . Результат получается следующий:









При выражении уравнения через переменную , через переменную , через переменную , через переменную , через переменную мы находим что:













С помощью предыдущих шагов мы нашли решение уравнений

Осталось два уравнения , которые имеют следующий вид:





Дальнейшее продвижение таким путем невозможно, так как два оставшихся уравнения нелинейны.

Мы можем попытаться продвинуться дальше, используя базис Гроебнера (Groebner) для решения этих двух уравнений относительно переменных . В результате получаем следующее решение:



свободными переменными в предыдущем решении являются:

.

Все остальные переменные:

можно выразить через них по приведенных выше формулам.

В другой попытке решить предыдущие уравнения мы будем предполагать, что . Получим в этом случае следующие уравнения:

























Предположим тоже что e[3]=e[4]=e[5]=e[6]=e[8]=0 заметим, что в уравнения (7..12) входят произведения b[i]\*e[i]. В рассматриваемом случае мы имеем все e[i], кроме e[7] равны 0 , но b[7] тоже равно 0. Поэтому соответствующие уравнения окажутся нулевыми.

Выражая уравнения через переменные соответственно находим что:













Заметим, что выражения для b[i] очень похожи друг на друга, поэтому их можно записать в более компактном виде. А именно определим функцию следующим образом:







Тогда:

Заметим, что так как не все e[i] в рассматриваемом случае равны 0 (e[7] может принимать произвольные значения), полное решение условий порядка, то есть получающийся метод Рунге-Кутта, не будет удовлетворять второму упрощающему предположению и, следовательно, не будет попадать в ранее известные решения.

# Заключение

Условия порядка, описывающие уравнения на коэффициенты метода Рунге-Кутта весьма громоздки. Даже современные математические пакеты типа «Maple» не могут решить их в общем виде в сколько-нибудь сложных случаях. Однако, выделяя из этих уравнений наиболее важную часть (каркас) на удалось найти некоторые её решения в следующих частных случаях:

* 6-стадийный метод порядка 5 (был известен ранее).
* 7-стадийный метод порядка 6 (был известен ранее).
* 9-стадийный метод порядка 7 (ранее не известен).

# Список литературы

1. Вutcher J.C. Numerical methods for ordinary differential equations. (2nd ed.), John Wiley & Sons, 2008.
2. Хашин С.И. Альтернативная форма уравнений Бутчера Вестн. Иван. гос. ун-та. 2007. Вып.3. С94--103.
3. Khashin S.I. A symbolic-numeric approach to the solution of the butcher equations. Canadian Applied Mathematics Quarterly, ISSN: 1073-1849. vol. 17 N 3, pp. 555--569, 2009.
4. Wanner G. Hairer E., Norsett S. P. Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. Berlin, etc.: Springer-Verlag, 2000. 539 p.
5. Bernardin L. Chin P. DeMarco P. Geddes K.O. Hare D.E.G. Heal K.M. Labahn G. May J.P.

Carron J.Mc. Monagan M.B. Ohashi D. Vorkoetter S.M. Maple Programming Guide, 2014.664p.

1. Молчанова. Л.А. Введение в Maple: учебно–метод. пособ. Изд-во Дальневост. ун-та. Владивосток. 2006. 36с.
2. Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г.Методы решения математических задач в Maple: учеб.

пособ. Изд. Белаудит. Белгород. 2001. 116 с.

1. Коптев А. А., Пасько А. А., Баранов А. А. Maple в инженерных расчетах: учеб. пособие. Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та. Тамбов. 2003. 80 с.
2. Iyad A. Ajwa Zhuojun Liu Paul S. Wang. Grobner Bases Algorithm. Institute for Computational Mathematics Department of Mathematics & Computer Science Kent State University Kent, Ohio 44242, U.S.A. February 27, 2003.14p.
3. Аржанцев И. В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений. МЦНМО М. 2003. 68 с.
4. [Dr. Bruno Buchberger,](http://www.scholarpedia.org/article/User:Bruno_Buchberger) [Manuel Kauers](http://www.scholarpedia.org/article/User:Manuel_Kauers). Groebner basis. Scholarpedia. 2010. 5(10). URL: <http://www.scholarpedia.org/article/Groebner_basis> (дата обращения 12.03.2020).