УДК 512.543

А. В. Агафонова, Д. И. Молдаванский

О финитной аппроксимируемости обобщенных прямых произведений групп

Указаны условия финитной аппроксимируемости обобщенного прямого произведения двух групп, аналогичные известным условиям Г. Баумслага для обобщенных свободных произведений.

Напомним, что конструкция обобщенного прямого произведения двух групп в работе [3] определяется следующим образом.

Пусть A и B – некоторые группы, H – подгруппа группы A, K – подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ – изоморфизм группы H на группу K. Обобщенным прямым произведением групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, называется группа G с подгруппами A и B такая, что $G = AB$, подгруппы A и B поэлементно перестановочны и их пересечение совпадает как с подгруппой H, так и с подгруппой K, причем элементы подгруппы H и K отождествляются в соответствии с изоморфизмом φ.

Очевидным необходимым условием существования такой группы G является центральность подгрупп H и K в группах A и B соответственно. Нетрудно видеть, что это условие оказывается и достаточным. Действительно, в этом случае в прямом произведении $D = A \times B$ групп A и B подмножество N, состоящее из всевозможных элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$, является (центральной) подгруппой. Легко проверяемая справедливость в группе D равенств $A \cap N = B \cap N = 1$ и $AN \cap BN = HN = KN$ говорит о том, что подгруппы AN/N и BN/N фактор-группы D/N изоморфны группам A и B соответственно, а их пересечение совпадает с подгруппой HN/N, так что фактор-группа D/N является обобщенным прямым произведением групп A и B с объединенными в соответствии с изоморфизмом φ подгруппами H и K. Для полноты картины отметим также, что из этого построения следует и единственность обобщенного прямого произведения: произвольная группа G с подгруппами A и B такими, что $G = AB$, $[A, B] = 1$ и $A \cap B = H = K$, оказывается изоморфной фактор-группе D/N.

В данной работе рассматриваются условия финитной аппроксимируемости обобщенного прямого произведения групп, и мы отметим, прежде всего, существование простых примеров обобщенного прямого произведения двух финитно аппроксимируемых групп, не являющегося финитно аппроксимируемой группой.

Так, пусть A – свободная абелева группа с множеством свободных порождающих $a_1, a_2, \ldots,$ H – подгруппа группы A, порожденная элементами $a_1a_2^2, a_1a_3^3, \ldots$. Через B обозначим свободную абелеву группу с множеством свободных порождающих $b_1, b_2, \ldots$, а через K – ее подгруппу, порожденную элементами $b_2^2, b_3^3, \ldots$. Поскольку указанные порождающие подгрупп H и K являются, очевидно, свободными, существует изоморфизм $\varphi : H \to K$, определяемый отображением $a_1a_i^i \mapsto b_i^i$ ($i = 2, 3, \ldots$). Пусть G – обобщенное прямое произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ. Так как в этой группе для любого целого числа $n \geq 2$ выполнено равенство $a_1 = (b_n a_n^{-1})^n$ и элемент a_1 отличен от 1, группа G не является финитно аппроксимируемой.

Основной целью данной работы является доказательство того, что известные условия Г. Баумслага [2] финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений дословно переносятся на обобщенные прямые произведения. Напомним необходимые для формулировки этих условий определения.

Пусть A и B – некоторые группы, H – подгруппа группы A, K – подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ –

фиксированный изоморфизм. Подгруппы $R \leq A$ и $S \leq B$ называются (H, K, φ)-совместимыми*,* если $(H \cap R)\varphi = K \cap S$. Следуя Баумслагу будем говорить также, что некоторое семейство $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ нормальных подгрупп некоторой группы G является фильтрацией, если $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = 1$, а если для некоторой подгруппы H группы G выполнено равенство $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} HN_\lambda = H$, то эта фильтрация называется H-фильтрацией.

В работе [2] доказазано, что если $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – обобщенное свободное произведение и $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ – семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса групп A и B, то для финитной аппроксимируемости группы G необходимо, чтобы каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ являлось фильтрацией, а достаточное условие финитной аппроксимируемости этой группы состоит в том, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является H-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является K-фильтрацией. Аналогичное утверждение оказывается справедливым и для обобщенных прямых произведений.

Теорема. *Пусть A и B – группы, H – центральная подгруппа группы A, K – центральная подгруппа группы B, $\varphi : H \to K$ – изоморфизм группы H на группу K и G – обобщенное прямое произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ – семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса групп A и B. Тогда:*

1) *если группа G финитно аппроксимируема, то каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией;*

2) *если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является H-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является K-фильтрацией, то группа G финитно аппроксимируема.*

Для доказательства этой теоремы воспользуемся указанным выше представлением группы G в виде фактор-группы прямого произведения $D = A \times B$ по подгруппе N, состоящей из элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$ ($h \in H$).

Предположим сначала, что группа G финитно аппроксимируема, и покажем, что тогда каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ должно быть фильтрацией. В самом деле, пусть, скажем, a – неединичный элемент группы A. Тогда элемент aN группы G отличен от 1 и потому не входит в ее подгруппу U/N для некоторой нормальной подгруппы U конечного индекса группы D, содержащей подгруппу N (и не содержащей элемента a). Полагаем $R = A \cap U$ и $S = B \cap U$. Поскольку подгруппа N содержится в подгруппе U, для любого элемента $h \in H$ элементы h и $h\varphi$ входят или не входят в подгруппу U одновременно. Так как $H \cap R = H \cap U$ и $K \cap S = K \cap U$, отсюда следует, что $(H \cap R)\varphi = K \cap S$. Таким образом, R и S являются (H, K, φ)-совместимыми нормальными подгруппами конечного индекса групп A и B, и потому $R = R_\lambda$ для подходящего $\lambda \in \Lambda$. Так как $a \notin R$, этим доказано, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией.

Предположим теперь, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является H-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является K-фильтрацией. Для доказательства финитной аппроксимируемости группы G достаточно показать, что в группе D подгруппа N является финитно отделимой, т. е. что произвольный элемент $g \in D$, не принадлежащий подгруппе N, не входит в некоторую подгруппу конечного индекса группы D, содержащую подгруппу N.

Запишем элемент g в виде $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$, и предположим сначала, что элемент a не входит в подгруппу H. Тогда поскольку семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является H-фильтрацией, для подходящего $\lambda \in \Lambda$ мы будем иметь $a \notin HR_\lambda$. Покажем, что подгруппа $L = HR_\lambda B$ является искомой.

В самом деле, конечность индекса подгруппы L в группе D следует из конечности индекса в этой группе подгруппы $R_\lambda B$. Включение $N \subseteq L$ очевидно, и остается показать, что элемент g не входит в L. Если, напротив, $g \in L$, то $g = hrb_1$, для некоторых $h \in H$, $r \in R_\lambda$ и $b_1 \in B$. Сравнивая это выражение элемента g с его исходной записью $g = ab$, имеем $a = hr$, что противоречит выбору подгруппы R_λ.

Случай, когда $b \notin K$, рассматривается аналогично, и мы будем считать теперь, что $a \in H$ и $b \in K$. Тогда $b = h\varphi$ для некоторого элемента $h \in H$, причем, поскольку элемент g не входит в подгруппу N, $a \neq h^{-1}$.

Так как семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией, то найдется $\lambda \in \Lambda$ такой, что $ah \notin R_\lambda$. Покажем, что тогда подгруппа $L = NR_\lambda S_\lambda$ является искомой.

Конечность индекса этой подгруппы в группе D и включение $N \subseteq L$ снова очевидны. Если предположить, что элемент g входит в подгруппу L, то $g = h_1(h_1\varphi)^{-1} rs$, для некоторых элементов $h_1 \in H$, $r \in R_\lambda$ и $s \in S_\lambda$. Тогда $a = h_1 r$ и $b = (h_1\varphi)^{-1} s$. Из последнего равенства следует, что элемент s принадлежит подгруппе K, и потому $s \in K \cap S_\lambda$. Следовательно, $s = r_1\varphi$ для подходящего $r_1 \in H \cap R_\lambda$. Отсюда $h\varphi = (h_1^{-1}r)_1\varphi$, и так как отображение φ инъективно, имеем $h = h_1^{-1}r_1$. Но тогда $ah = rr_1 \in R_\lambda$, что противоречит выбору подгруппы R_λ. Теорема доказана.

В заключение приведем пример, показывающий, что достаточное условие финитной аппроксимируемости обобщенного прямого произведения, содержащееся в пункте 2) доказанной теоремы, не является необходимым.

Пусть A – группа, заданная порождающими элементами $a_1, a_2, \ldots$ и определяющими соотношениями $a_i = a_{i+1}^2$ ($i = 1, 2, \ldots$), и H – ее подгруппа, порожденная элементом a_1. Хорошо известно, что группа A (изоморфная аддитивной группе двоичных дробей) финитно аппроксимируема. Легко видеть также, что подгруппа H в этой группе не является финитно отделимой (поскольку фактор-группа A/H изоморфна квазициклической группе типа 2^{∞} и потому не финитно аппроксимируема).

Пусть еще B – свободная абелева группа ранга 2 со свободными порождающими x, y и K – ее подгруппа, порожденная элементом x. Поскольку в группе B все подгруппы финитно отделимы, в силу предложения 2 из работы [1] обобщенное прямое произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с очевидным изоморфизмом, является финитно аппроксимируемой группой. Вместе с тем, так как в группе A подгруппа H не финитно отделима, никакое семейство нормальных подгрупп конечного индекса группы A не может быть H-фильтрацией, так что требования условия 2) теоремы здесь не выполнены.

Библиографический список

1. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в некоторых обобщенных свободных произведениях групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2008. Вып. 2. С. 114–122.
2. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193-209.
3. *Neumann B. H.* An assay on free products of groups with amalgamations // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. Vol. 246. P. 503-554.