УДК 512.543

А. Е. Копрова, Д. И. Молдаванский

Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп

Для произвольного множества π простых чисел рассматриваются условия аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений двух групп. При дополнительном предположении центральности объединяемых подгрупп доказано, что обобщенное свободное произведение двух конечных π-групп является группой, аппроксимируемой конечными π-группами, и на основе этого результата получены условия аппроксимируемости конечными π-группами свободных произведений произвольных групп с объединяемыми центральными подгруппами, аналогичные условиям Г. Баумслага для свойства финитной аппроксимируемости.

§ 1. Основные результаты

Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из некоторого класса $\boldsymbol{K}$ (или $\boldsymbol{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует такой гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\boldsymbol{K}$, образ элемента g относительно которого отличен от единицы. Подгруппа H группы G называется $\boldsymbol{K}$-отделимой, если для любого элемента $g \in G$, не принадлежащего H, существует такой гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\boldsymbol{K}$, образ элемента g относительно которого не принадлежит образу подгруппы H. Отметим, что если класс $\boldsymbol{K}$ гомоморфно замкнут, то нормальная подгруппа H группы G $\boldsymbol{K}$-отделима тогда и только тогда, когда фактор-группа G/H является $\boldsymbol{K}$-аппроксимируемой.

Если $\boldsymbol{K}$ совпадает с классом $\boldsymbol{F}$ всех конечных групп, то свойства $\boldsymbol{K}$-аппроксимируемости и $\boldsymbol{K}$-отделимости совпадают с классическими свойствами финитной аппроксимируемости и финитной отделимости соответственно. Более тонкими являются свойства $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемости и $\boldsymbol{F}_\pi$-отделимости, где для данного множества π простых чисел символ $\boldsymbol{F}_\pi$ обозначает класс всех конечных π-групп (если π состоит из единственного простого числа p, будем писать $\boldsymbol{F_p}$ вместо $\boldsymbol{F}_\pi$). Общая проблема описания для данной финитно аппроксимируемой группы таких множеств π, что эта группа является $\boldsymbol{F}_\pi$- аппроксимируемой, применительно к конструкции обобщенного свободного произведения может быть уточнена следующим образом:

Пусть группа G является обобщенным свободным произведением двух $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемых групп. Верно ли, что если группа G $\boldsymbol{F}$-аппроксимируема, то она является $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемой?

Известно, что для обычного свободного произведения ответ на этот вопрос положителен. Это следует из работы [2], но может быть без особого труда доказано и непосредственно. Действительно, если $G = A * B$ – свободное произведение $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемых групп A и B, то проблема $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G стандартными рассуждениями сводится к случаю, когда группы A и B конечны. Но тогда группа G является расширением свободной группы при помощи конечной π-группы $A \times B$ и потому $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируема.

В общем же случае ответ на сформулированный выше вопрос отрицателен: легко построить пример обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп, не являющегося $\boldsymbol{F_p}$-аппроксимируемой группой. В связи с этим естественно спросить, насколько следует расширить множество π, чтобы аппроксимируемость соответствующим классом групп обобщенного свободного произведения двух $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемых групп имела место. Так, нетрудно доказать, что свободное произведение $G = (A * B;\, H = K, \varphi)$ двух конечных групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма $\varphi: H \to K$, является группой, $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемой для некоторого конечного множества π. Более точно, имеет место

Теорема 1. *Если группы A и B конечны и множество π состоит из всех простых чисел, не превосходящих произведения m порядков групп A и B, то группа $G = (A * B; H = K, \varphi)$ является $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемой.*

Доказательство этого утверждения практически совпадает с доказательством Г. Баумслага $\boldsymbol{F}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп. А именно, Б. Нейманом [4] построен действующий инъективно на подгруппах A и B гомоморфизм группы G в группу подстановок декартова произведения множеств A и B. Поскольку ядро этого гомоморфизма в силу известной теоремы Х. Нейман является свободной группой, этим доказано, что группа G есть расширение свободной группы при помощи конечной π-группы и потому $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируема.

Критерий $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{p}}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения $G = (A * B; H = K, \varphi)$ двух конечных p-групп A и B был получен Г. Хигманом в работе [3]. Из этого критерия следует, в частности, что если объединяемые подгруппы H и K расположены в центрах соответствующих свободных множителей A и B, то группа G является $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{p}}$-аппроксимируемой. Здесь будет получено следующее обобщение этого результата:

Теорема 2. *Пусть A и B – конечные π-группы, H и K – центральные подгруппы групп A и B соответственно. Тогда группа $G = (A * B; H = K, \varphi)$ $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируема.*

Г. Баумслаг [1] на основе своего вышеупомянутого результата об $\boldsymbol{F}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп сформулировал условия $\boldsymbol{F}$-аппроксимируемости для обобщенного свободного произведения произвольных групп. Напомним необходимые для формулировки этих условий определения.

Пусть A и B – некоторые группы, H – подгруппа группы A, K – подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ фиксированный изоморфизм. Подгруппы $R \leq A$ и $S \leq B$ называются (H, K, φ)-совместимыми, если $(H \cap R)\varphi = K \cap S$. Это понятие позволяет указать ряд универсальных, в определенном смысле, гомоморфизмов обобщенного свободного произведения $G = (A * B, H = K, \varphi)$. А именно, если R и S нормальные (H, K, φ)-совместимые подгруппы групп A и B, то отображение $\varphi_{R,S} : HR/R \to KS/S$ подгруппы HR/R фактор-группы A/R на подгруппу KS/S фактор-группы B/S, переводящее элемент hR в элемент $(h\varphi)S$ (где $h \in H$), является изоморфизмом. Поэтому можно построить обобщенное свободное произведение

$$G_{R,S} = \left(A/R * B/S,\ HR/R = KS/S, \varphi_{R,S}\right)$$

и гомоморфизм $\rho_{R,S}$ группы G на группу $G_{R,S}$, действие которого на свободных множителях группы G совпадает с естественными отображениями группы A на фактор-группу A/R и группы B на фактор-группу B/S. Легко видеть, что для любой нормальной подгруппы N группы G подгруппы $A \cap N$ и $B \cap N$ являются (H, K, φ)-совместимыми, так что произвольный гомоморфизм группы G проходит через некоторый гомоморфизм вида $\rho_{R,S}$.

Следуя Баумслагу будем говорить также, что семейство $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ нормальных подгрупп некоторой группы G называется фильтрацией, если $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = 1$, а если для подгруппы H группы G выполнено равенство $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} HN_\lambda = H$, то эта фильтрация называется H-фильтрацией.

Упомянутые выше условия Баумслага могут быть сформулированы следующим образом.

Пусть $G=(A*B,H=K,\varphi)$ – обобщенное свободное произведение групп A и B и пусть $\{(R_\lambda,S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – семейство всех пар (H,K,φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса групп A и B. Если группа G $\boldsymbol{F}$-аппроксимируема, то каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией. Обратно, если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является H-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является K-фильтрацией, то группа G $\boldsymbol{F}$-аппроксимируема.

Теорема 2 позволяет получить условия $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух произвольных групп с объединенными центральными подгруппами, аналогичные этим условиям Баумслага.

Теорема 3. *Пусть $G=(A*B;H=K,\varphi)$ – свободное произведение групп A и B с объединёнными подгруппами H и K, причем H и K – центральные подгруппы групп A и B соответственно. Пусть $\{(R_\lambda,S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – семейство всех пар подгрупп A и B соответственно таких, что для любого $\lambda\in\Lambda$ R_λ является нормальной подгруппой конечного π-индекса группы A, S_λ является нормальной подгруппой конечного π-индекса группы B и подгруппы R_λ и S_λ (H,K,φ)-совместимы. Тогда*

1) *если группа G $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируема, то каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией;*
2) *если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является H-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является K-фильтрацией, то группа G $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируема.*

Легко видеть, что первое утверждение теоремы 3 справедливо и без предположения центральности объединяемых подгрупп. В самом деле, если, скажем, a – неединичный элемент группы A, то из $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G следует существование нормальной подгруппы N конечного π-индекса группы G, не содержащей элемента a. Тогда этот элемент не принадлежит подгруппе $A \cap N$, входящей в семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, и, таким образом, пересечение всех подгрупп этого семейства совпадает с единичной подгруппой.

Второе утверждение теоремы 3, в свою очередь, позволяет получить следующий результат:

Теорема 4. *Пусть* $G = (A * B; H = K, \varphi)$ *– свободное произведение групп* A *и* B *с объединёнными подгруппами* H *и* K, *причем* H *и* K *– центральные подгруппы групп* A *и* B *соответственно и группы* A *и* B $\boldsymbol{F}_\pi$*-аппроксимируемы. Предположим также, что в группе* A *каждая подгруппа, лежащая в* H *и имеющая в* H *конечный* π*-индекс,* $\boldsymbol{F}_\pi$*-отделима и в группе* B *каждая подгруппа, лежащая в* K *и имеющая в* K *конечный* π*-индекс,* $\boldsymbol{F}_\pi$*-отделима. Тогда группа* G $\boldsymbol{F}_\pi$*-аппроксимируема.*

Приведем одно конкретное применение теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть* $G = (A * B; H = K, \varphi)$ *– обобщенное свободное произведение* $\boldsymbol{F}_\pi$*-аппроксимируемых конечно порожденных абелевых групп* A *и* B, *причем* $H \neq A$, $K \neq B$. *Группа* G *является* $\boldsymbol{F}_\pi$*-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда подгруппа* H π'*-изолирована в группе* A *и подгруппа* K π'*-изолирована в группе* B.

Напомним, что подгруппа X некоторой группы Y называется π'-изолированной, если для любого простого числа q, не принадлежащего множеству π, и произвольного элемента $y \in Y$ из того, что $y^q \in X$, следует, что $y \in X$. Очевидно, что если группа Y абелева, то ее подгруппа X π'-изолирована в точности тогда, когда периодическая часть фактор-группы Y/X является π-группой. Так как, к тому же, конечно порожденная абелева группа $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее периодическая часть является π-группой, то отсюда следует, что произвольная подгруппа конечно порожденной абелевой группы будет π'-изолированной тогда и только тогда, когда она является $\boldsymbol{F}_\pi$-отделимой. Поскольку подгруппа конечного π-индекса π'-изолированной подгруппы тоже является, очевидно, π'-изолированной, часть «тогда» в формулировке теоремы 5 вытекает непосредственно из теоремы 4.

Для доказательства необходимости, предположим, рассуждая от противного, что для некоторого элемента $a \in A \setminus H$ и простого числа q, не принадлежащего множеству π, имеет место включение $a^q \in H$. Обозначим через g коммутатор $[a, b]$ элементов a и b, где $b \in B \setminus K$. Элемент g отличен от единицы в группе G, т. к. его запись $g = a^{-1}b^{-1}ab$ несократима. С другой стороны, при любом гомоморфизме σ группы G на конечную π-группу образ $a\sigma$ элемента a, как нетрудно видеть, входит в образ $H\sigma$ подгруппы H, и потому $g\sigma = 1$. Это противоречит предположению об $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G, и утверждение о π'-изолированности подгруппы H в группе G тем самым доказано. Справедливость соответствующего утверждения для подгруппы K устанавливается аналогично, и теорема 5 доказана.

Напомним, далее, что подгруппа X некоторой группы Y называется изолированной, если для любого целого числа n, отличного от нуля, и произвольного элемента $y \in Y$ из того, что $y^n \in X$, следует, что $y \in X$. Изолятором подгруппы X в группе Y называется пересечение всех изолированных подгрупп группы Y, содержащих X. Если группа Y является конечно порожденной абелевой, то индекс произвольной подгруппы X в ее изоляторе конечен, и легко видеть, что если π – множество всех простых делителей этого индекса, то подгруппа X π' -изолирована в группе Y. Поэтому из теоремы 5 получаем

Следствие. *Пусть* $G = (A * B; H = K, \varphi)$ *– обобщенное свободное произведение* $\mathbf{F}_\pi$ *-аппроксимируемых конечно порожденных абелевых групп* A *и* B. *Тогда группа* G *является* F_{π_1} *-аппроксимируемой, где множество* π_1, *получается присоединением к множеству* π *некоторого конечного набора простых чисел.*

В самом деле, если через π_1 обозначить результат присоединения к множеству π всех простых делителей индекса подгруппы H в ее изоляторе в группе A и индекса подгруппы K в ее изоляторе в группе B, то подгруппы H и K окажутся, как легко видеть, π_1'-изолированными в группах A и B соответственно.

§ 2. Доказательство теорем 2, 3 и 4

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся конструкцией обобщенного прямого произведения групп.

Пусть A и B – некоторые группы, H – центральная подгруппа группы A, K – центральная подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ – изоморфизм группы H на группу K. Обобщенным прямым произведением групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, называется фактор-группа $\overline{C}$ прямого произведения $C = A \times B$ групп A и B по подгруппе N, состоящей из всевозможных элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$. Непосредственно проверяется, что в группе C выполнены равенства $A \cap N = B \cap N = 1$, и потому отображения $\alpha : a \mapsto aN$ ($a \in A$) и $\beta : b \mapsto bN$ ($b \in B$) являются вложениями групп A и B в группу $\overline{C}$. Так как, к тому же, для любого $h \in H$ имеем $h\alpha = hN = (h\varphi)N = h(\varphi\beta)$, то существует гомоморфизм ρ группы $G=(A*B;H=K,\varphi)$ в группу $\overline{C}$, продолжающий отображения α и β. Поскольку ядро гомоморфизма ρ тривиально пересекается с каждой подгруппой, сопряженной с любым из свободных множителей группы G, в силу теоремы Х. Нейман оно является свободной группой.

Если теперь считать, что группы A и B являются конечными π-группами, то поскольку тогда и группа $\overline{C}$ будет конечной π-группой, группа G оказывается расширением свободной группы при помощи конечной π-группы и потому является $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемой. Теорема 2 доказана.

Для доказательства теоремы 3 нам остается доказать лишь второе утверждение из ее формулировки.

Итак, пусть $G=(A*B;H=K,\varphi)$ – свободное произведение групп A и B с объединёнными подгруппами H и K, принадлежащими центрам групп A и B соответственно. Пусть $\{(R_\lambda,S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – семейство всех таких пар (H,K,φ)-совместимых подгрупп групп A и B, что для любого $\lambda\in\Lambda$ R_λ – нормальная подгруппа конечного π-индекса группы A и S_λ – нормальная подгруппа конечного π-индекса группы B и пусть семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является H-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является K-фильтрацией.

В соответствии со сказанным в параграфе 1 (и упрощая обозначения) для любого $\lambda\in\Lambda$ введем в рассмотрение группу

$$G_\lambda=(A/R_\lambda*B/S_\lambda;HR_\lambda/R_\lambda=KS_\lambda/S_\lambda,\varphi_\lambda)$$

и гомоморфизм ρ_λ группы G на группу G_λ, продолжающий естественные отображения группы A на фактор-группу A/R_λ и группы B на фактор-группу B/S_λ. Так как группа G_λ является свободным произведением двух конечных π-групп с объединёнными центральными подгруппами, то из теоремы 2 следует, что для любого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируема.

Поэтому для доказательства $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G достаточно для любого отличного от единицы элемента g этой группы указать такой индекс $\lambda \in \Lambda$, что $g\rho_\lambda \neq 1$.

Пусть $g = x_1 x_2 \cdots x_n$ – несократимая запись в группе G элемента g. Предположим сначала, что длина n его равна 1, т.е. элемент g входит в подгруппу A или в подгруппу B; пусть для определённости $g \in A$. Так как g – неединичный элемент группы A, а семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ подгрупп этой группы является фильтрацией, существует индекс $\lambda \in \Lambda$ такой, что $g \notin R_\lambda$. Поскольку ограничение гомоморфизма ρ_λ на подгруппу A совпадает с естественным гомоморфизмом группы A на фактор-группу A/R_λ, мы видим, что $g\rho_\lambda = gR_\lambda$ является неединичным элементом группы G_λ. Таким образом, в этом случае существование $\lambda \in \Lambda$ с требуемым свойством доказано.

Будем считать теперь, что длина n элемента g больше единицы. В этом случае в его записи $g = x_1 x_2 \cdots x_n$ сомножители $x_1, x_2, \ldots, x_n$ входят поочередно в подгруппы A (A-слоги) и B (B-слоги) и не принадлежат соответствующим объединяемым подгруппам H и K. Поскольку семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является H-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является K-фильтрацией, для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ можно указать такое $\mu_i \in \Lambda$, что если x_i есть A-слог, то $x_i \notin HR_{\mu_i}$, а если x_i есть B-слог, то $x_i \notin KS_{\mu_i}$. Так как семейство $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ содержит все пары (H, K, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного π-индекса групп A и B, найдется, как легко видеть, индекс $\lambda \in \Lambda$

такой, что $R_\lambda = \bigcap_{i=1}^{n} R_{\mu_i}$ и $S_\lambda = \bigcap_{i=1}^{n} S_{\mu_i}$. Поскольку тогда для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ из того, что x_i есть A-слог, следует, что $x_i\rho_\lambda = x_i R_\lambda \notin HR_\lambda / R_\lambda$, и из того, что x_i есть B-слог, следует, что $x_i\rho_\lambda = x_i S_\lambda \notin HS_\lambda / S_\lambda$, запись $g\rho_\lambda = x_1\rho_\lambda \cdot x_2\rho_\lambda \cdot \cdots \cdot x_n\rho_\lambda$ элемента $g\rho_\lambda$ является, очевидно, несократимой в группе G_λ, и потому $g\rho_\lambda \neq 1$. Теорема 3, таким образом, доказана.

Переходя к доказательству теоремы 4, напомним, что в ней рассматривается свободное произведение

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

$\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемых групп A и B с объединёнными подгруппами H и K, принадлежащими центрам групп A и B соответственно. Предполагается также, что в группе A каждая подгруппа, лежащая в H и имеющая в H конечный π-индекс, $\boldsymbol{F}_\pi$-отделима и в группе B каждая подгруппа, лежащая в K и имеющая в K конечный π-индекс, $\boldsymbol{F}_\pi$-отделима. Для установления $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G достаточно в силу теоремы 3 (и в ее обозначениях) показать, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является H-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является K-фильтрацией. Мы покажем, что в действительности из условий теоремы 4 следует, что каждое из этих семейств совпадает с семейством всех нормальных подгрупп конечного π-индекса соответствующей группы A или B, и потому требуемые свойства этих семейств являются очевидными следствиями предположений об $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G и $\boldsymbol{F}_\pi$-отделимости подгрупп H и K. Для этого нам понадобится следующее замечание:

Пусть X – подгруппа некоторой группы Y и U – подгруппа конечного π-индекса группы X, являющаяся нормальной подгруппой группы Y. Если подгруппа U $\boldsymbol{F}_\pi$-отделима в группе Y, то существует нормальная подгруппа V конечного π-индекса группы Y такая, что $X \cap V = U$.

В самом деле, т. к. подгруппа U $\boldsymbol{F}_\pi$-отделима в группе Y, фактор-группа Y/U является $\boldsymbol{F}_\pi$-аппроксимируемой, и поскольку X/U – ее конечная подгруппа, то в группе Y/U найдется нормальная подгруппа V/U конечного π-индекса, пересечение которой с подгруппой X/U тривиально. Легко видеть, что V – искомая подгруппа.

Пусть теперь R – произвольная нормальная подгруппа конечного π-индекса группы A. Тогда $H \cap R$ – нормальная подгруппа конечного π-индекса в группе H и потому $U = (H \cap R)\varphi$ – нормальная подгруппа конечного π-индекса центральной подгруппы K группы B, являющаяся, к тому же, по условию $\boldsymbol{F}_\pi$-отделимой в B. Поэтому из нашего замечания следует существование в группе B нормальной подгруппы S конечного π-индекса такой, что $K \cap S = V$. Так как подгруппы R и S являются тогда (H, K, φ)-совместимыми, то подгруппа R входит в семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Аналогично доказывается, что произвольная нормальная подгруппа конечного π-индекса группы B входит в семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, и теорема 4 доказана.

Библиографический список

1. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. № 2. P. 193–209.
2. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3) 1957. Vol. 7. P. 29–62.
3. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. of Algebra. 1964. Vol. 1. P. 301–305.
4. *Neumann B.H.* An assay on free products of groups with amalgamations // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. Vol.

246.
P. 503–554.