УДК 512.543

О ФИНИТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

Д. И. Молдаванский, А. А. Ускова (г. Иваново)

Аннотация

Доказано, что в обобщенном свободном произведении двух групп все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, если этим свойством обладают свободные множители, а объединяемые подгруппы нормальны в них и удовлетворяют условию максимальности.

1. Введение и результаты

Напомним (см. [1]), что подгруппа H группы G называется финитно отделимой, если для любого элемента $g \in G$, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную группу такой, что образ $g\varphi$ элемента g не принадлежит образу $H\varphi$ подгруппы H. Легко видеть, что подгруппа H группы G финитно отделима тогда и только тогда, когда она совпадает с пересечением всех содержащих ее подгрупп конечного индекса группы G.

Очевидно поэтому, что для произвольной группы свойство быть финитно аппроксимируемой равносильно условию финитной отделимости ее единичной подгруппы. Более того, очевидно, что нормальная подгруппа H группы G является финитно отделимой тогда и только тогда, когда фактор-группа G/H финитно аппроксимируема. Из этого замечания и существования 2-порожденных групп, не являющихся финитно аппроксимируемыми (см., напр., [2]), следует, что каждая нециклическая свободная группа содержит подгруппу, не являющуюся финитно отделимой. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что задача нахождения условий наследования свободными конструкциями групп свойства финитной отделимости всех подгрупп фактически сводится к вопросам отсутствия нециклических свободных подгрупп в группах, построенных с использованием этих конструкций. Ответы на эти вопросы давно и хорошо известны.

С другой стороны, из теоремы М. Холла [3] следует, что произвольная конечно порожденная подгруппа любой свободной группы является финитно отделимой, и изучение условий финитной отделимости всех конечно порожденных подгрупп свободных конструкций групп оказалось более содержательной задачей. Так, Н. С. Романовский [4] доказал, что (обычное) свободное произведение произвольного семейства групп, все конечно порожденные подгруппы каждой из которых финитно отделимы, также является группой, все конечно порожденные подгруппы которой финитно отделимы. Оказалось, тем не менее, что для конструкции обобщенного свободного произведения групп аналогичное утверждение может, вообще говоря, оказаться неверным.

По-видимому, первый (и наиболее простой) пример содержащего неотделимую конечно порожденную подгруппу обобщенного свободного произведения двух групп, у которых все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, указан Алленби и Грегорасом в работе [5]. Авторы этой работы заметили, что 1) прямое произведение $F_2 \times F_2$ двух свободных групп ранга 2 содержит неотделимую конечно порожденную подгруппу, 2) все конечно порожденные подгруппы прямого произведения $F_2 \times F_1$ свободной группы ранга 2 и бесконечной циклической группы финитно отделимы и 3) группа $F_2 \times F_2$ является обобщенным свободным произведением двух экземпляров групп $F_2 \times F_1$ с объединенной подгруппой F_2.

Пример группы, содержащей неотделимую конечно порожденную подгруппу и являющейся обобщенным свободным произведением с циклическими объединяемыми подгруппами двух групп, все конечно порожденные подгруппы каждой из которых финитно отделимы, был построен Е. Рипсом [6]. Позднее в работе [7] был приведен более простой аналогичный пример обобщенного свободного произведения с циклическим объединением двух конечно порожденных нильпотентных групп.

Наличие этих и других аналогичных примеров объясняет интерес к нахождению условий, при которых свободное произведение $G = \bigl(A * B;\ H = K, \varphi\bigr)$ групп A и B с подгруппами $H \leq A$ и $K \leq B$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi : H \to K$ наследует от свободных множителей A и B финитную отделимость всех конечно порожденных подгрупп. Хорошо известно, например, что если группы A и B конечны, то все конечно порожденные подгруппы группы G финитно отделимы (поскольку в этом случае группа G является конечным расширением свободной группы (см., напр., [8]), а свойство финитной отделимости всех конечно порожденных подгрупп наследуется, как легко видеть, произвольным конечным расширением данной группы).

Доказательства других аналогичных утверждений не являются, разумеется, столь же простыми. Это справедливо, в частности, для следующих результатов:

В группе $G = \bigl(A * B;\ H = K, \varphi\bigr)$ *все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, если выполнено одно из следующих условий:*

(1) *в группах A и B все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, а подгруппы H и K конечны* [5];

(2) *группы A и B являются почти полициклическими,а подгруппа H содержит такую подгруппу U конечного индекса, что U и $U\varphi$ являются нормальными подгруппами групп A и B соответственно* [5];

(3) *группы A и B являются почти свободными, а подгруппы H и K являются циклическими* [9].

Целью данной статьи является получение еще одного результата аналогичного характера.

Теорема. *Пусть $G = \big(A * B;\ H = K, \varphi\big)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами $H \leq A$ и $K \leq B$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi : H \to K$. Пусть H является нормальной подгруппой группы A, K является нормальной подгруппой группы B и группы H и K удовлетворяют условию максимальности для подгрупп. Если в группах A и B все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, то и в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.*

Очевидно, что в случае, когда группы A и B являются почти полициклическими, утверждение нашей теоремы содержится в приведенном выше результате (2) из работы [5]. Сформулируем еще два следствия из этой теоремы, утверждения которых являются, по-видимому, новыми. Первое из них представляет интерес в связи с упомянутыми выше примерами из [6] и [7] и результатом из [9].

Следствие 1. *Если в группах A и B все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы и H и K — циклические нормальные подгруппы групп A и B соответственно, то в группе $G = \big(A * B;\ H = K, \varphi\big)$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.*

Второе следствие относится к вопросу финитной отделимости конечно порожденных подгрупп в группах Баумслага – Солитэра. Напомним, что группами Баумслага – Солитэра называют группы с одним определяющим соотношением вида

$$G(m, n) = \langle a,\, b;\ a^{-1}b^m a = b^n\rangle,$$

где m и n — ненулевые целые числа. При этом можно без потери общности считать, что $|n| \geqslant m > 0$. Известно [10], что группа $G(m, n)$ является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда (при условии $|n| \geqslant m > 0$) или $m = 1$, или $|n| = m$. Хорошо известно также (и легко видеть), что если $|n| > 1$, то в группе $G(1, n)$ циклическая подгруппа, порожденная элементом b, не является финитно отделимой. Заметим, что, с другой стороны, произвольная конечно порожденная нециклическая подгруппа группы $G(1, n)$ имеет конечный индекс и потому финитно отделима. При условии $|n| = m$ группа

$$G(m, n) = \langle a,\, b;\ a^{-1}b^m a = b^{\pm m}\rangle = \langle a,\, b,\, c;\ a^{-1}ca = c^{\pm 1},\ c = b^m\rangle$$

является свободным произведением с нормальными объединяемыми подгруппами полициклической группы $G(1, \pm 1)$ и бесконечной циклической группы. Поэтому справедливо

Следствие 2. *При $|n| = m$ все конечно порожденные подгруппы группы $G(m, n) = \langle a,\, b;\ a^{-1}b^m a = b^n\rangle$ финитно отделимы.*

Следует отметить, что утверждение следствия 2 является новым лишь в случае, когда $n = -m$. Если $n = m$, то центр группы $G(m, n)$ нетривиален, а в работе [11] было доказано, что в группе с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

2. Доказательство теоремы

Доказательство теоремы начнем со следующего простого замечания.

Лемма. *Пусть N — нормальная подгруппа группы L. Если N является конечно порожденной группой и в группе L все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, то и в фактор-группе L/N все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.*

В самом деле, произвольная подгруппа фактор-группы L/N представима в виде M/N для некоторой подгруппы M группы L, содержащей N. При этом, поскольку подгруппа M порождается объединением системы представителей смежных классов, порождающих подгруппу M/N, и системы порождающих подгруппы N, из того, что подгруппа M/N конечно порождена, следует, что и подгруппа M является конечно порожденной.

Пусть подгруппа M/N фактор-группы L/N конечно порождена и элемент $aN \in L/N$ не принадлежит этой подгруппе. Тогда в группе L элемент a не принадлежит подгруппе M, и так как эта подгруппа конечно порождена и потому по условию является финитно отделимой, в группе L существует подгруппа R конечно индекса, содержащая подгруппу M и не содержащая элемента a. Тогда в фактор-группе L/N элемент элемент aN не принадлежит подгруппе R/N, которая содержит подгруппу M/N и имеет конечный индекс в группе L/N. Следовательно, подгруппа M/N совпадает с пересечением всех содержащих ее подгрупп конечного индекса группы L/N и потому финитно отделима.

Предположим теперь, что для группы $G = \big(A*B;\ H = K, \varphi\big)$ выполнены все предположения из формулировки теоремы, и потому, в частности, подгруппа H нормальна в группе G. Пусть U — конечно порожденная подгруппа группы G и элемент $a \in G$ не принадлежит подгруппе U. Для построения гомоморфизма θ группы G на некоторую конечную группу такого, что $a\theta \notin U\theta$, рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Элемент a не принадлежит подгруппе UH.

Легко видеть, что фактор-группа G/H изоморфна свободному произведению групп A/H и B/K, все конечно порожденные подгруппы которых в силу леммы финитно отделимы, и потому из [4] следует, что в группе G/H все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Так как $UH/H \simeq U/(U \cap H)$, подгруппа UH/H группы G/H является конечно порожденной, и поскольку $aH \notin UH/H$, существует гомоморфизм ρ группы G/H на конечную группу такой, что $(aH)\rho \notin (UH/H)\rho$. Произведение θ естественного отображения группы G на фактор-группу G/H и гомоморфизма ρ является искомым гомоморфизмом.

Случай 2. Элемент a входит в подгруппу UH.

В этом случае $a = uh$ для подходящих элементов $u \in U$ и $h \in H$. Так как $a \notin U$, элемент h не входит в подгруппу $V = U \cap H$. Поскольку группа H удовлетворяет условию максимальности, подгруппа V является конечно порожденной и потому финитно отделима в группе A. Следовательно, существует нормальная подгруппа R конечного индекса группы A такая, что $h \notin VR$. Полагаем $T = H \cap R$. Тогда T — подгруппа конечного индекса в группе H и $h \notin VT$. Поскольку группа H является конечно порожденной, подгруппу T без потери общности можно считать характеристической в группе H и потому — нормальной подгруппой группы A. Тогда $S = T\varphi$ — характеристическая подгруппа группы K и нормальная подгруппа группы B.

Полагаем $\overline{A} = A/T$, $\overline{H} = H/T$, $\overline{B} = B/S$ и $\overline{K} = K/S$. Очевидно, что отображение $\overline{\varphi} : \overline{H} \to \overline{K}$, определяемое по правилу $(xT)\overline{\varphi} = (x\varphi)S$, $x \in H$, является изоморфизмом группы $\overline{H}$ на группу $\overline{K}$. Поэтому можно построить свободное произведение $\overline{G} = \left(\overline{A} * \overline{B};\ \overline{H} = \overline{K}, \overline{\varphi}\right)$ групп $\overline{A}$ и $\overline{B}$ с подгруппами $\overline{H}$ и $\overline{K}$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\overline{\varphi}$.

Поскольку для любого элемента $x \in H$ в группе $\overline{G}$ выполнено равенство $xT = (x\varphi)S$, естественные отображения групп A и B на подгруппы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ группы $\overline{G}$ соответственно согласованы с изоморфизмом φ. Поэтому существует продолжающий эти отображения гомоморфизм ρ группы G на группу $\overline{G}$. Легко видеть, что ядро гомоморфизма ρ совпадает с подгруппой T. Поэтому включение $a\rho \in U\rho$ равносильно включению $a \in UT$, т. е. равенству $a = u_1 t$ для подходящих $u_1 \in U$ и $t \in T$. Тогда имеет место равенство $uh = u_1 t$, откуда получаем $u^{-1}u_1 = ht^{-1} \in U \cap H = V$ и $h = (u^{-1}u_1)t \in VT$, что невозможно.

Таким образом в группе $\overline{G}$ элемент $a\rho$ не принадлежит конечно порожденной подгруппе $U\rho$. В силу леммы в группах $\overline{A}$ и $\overline{B}$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, и поскольку подгруппы $\overline{H}$ и $\overline{K}$ конечны, из приведенного выше результата (1) из работы [5] следует, что в группе $\overline{G}$ все конечно порожденные подгруппы также финитно отделимы. Доказательство существования требуемого гомоморфизма θ заканчивается теперь так же, как и в случае 1.

Список литературы

[1] Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. Зап. Ивановск. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49 – 60.

[2] Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199 – 201.

[3] Hall M. Coset representations in free groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 67. P. 421 – 432.

[4] Романовский Н. С. О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения // Известия АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 6. С. 1324 – 1329.

[5] Allenby R., Gregorac R. On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. Vol. 319. P.9 – 17.

[6] Rips E. An example of a non-LERF group which is a free product of LERF groups with an amalgamated cyclic subgroup // Israel J. of math., Vol. 70, № 1, 1990. P. 104 – 110.

[7] Allenby R., Doniz D. A free product of finitely generated nilpotent groups amalgamating a cycle that is not subgroup separable. // Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 124, № 4,1996. P. 1003 – 1005.

[8] Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. № 2. P. 193 – 209.

[9] Allenby R., Tang C. Subgroup separability of generalized free products of free-by-finite groups. Canad. Math. Bull. 1993. Vol. 36(4). P. 385 – 389.

[10] Meskin S. Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105 – 114.

[11] Молдаванский Д. И., Тимофеева Л. В. Конечно порожденные подгруппы группы, определяемой одним соотношением и обладающей нетривиальным центром, финитно отделимы // Известия ВУЗов. Математика. 1987. Вып. 12. С. 58 – 59.

Ивановский государственный университет

ON THE FINITELY SEPARABILITY OF SUBGROUPS OF GENERALIZED FREE PRODUCTS

D. I. Moldavanskii, A. A. Uskova

It is proved that all finitely generated subgroups of generalized free product of two groups are finitely separable provided that free factors have this property and amalgamated subgroups are normal in corresponding factors and satisfy the maximum condition for subgroups.