Многочисленные примеры использования методов (17) и (21) с итерационными параметрами (11) — (16), (18) — (20) для решения систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений показали, что эти методы сходятся при более грубых начальных приближениях и быстрее, чем соответствующие модифицированные методы: Стеффенсена $x_{n+1}=x_n-P^{-1}(x_1, \Phi(x_1))P_n$; хорд $x_{n+1}=x_n-P^{-1}(x_1, x_0)P_n$; Ньютона $x_{n+1}=x_n-\Gamma_1 P_n$.

3. Используя в качестве оператора A единичный оператор и полагая $w_n = x_{n-1}$, $n=1, 2, \ldots$, из (2), (3) и (2), (4) получим методы [5], которые являются наиболее простыми в классе (2), (3) и (2), (4). Полагая $w_n=\Phi(x_n)$, $n=1, 2, \ldots$, для уравнений вида $P(x)\equiv x-\Phi(x)=0$ получим методы [3], [4].

4. Широкий класс приближенных методов описывается формулой (2) с линейным оператором A, зависящим от номера итерации, т. е. $A=A_n$. Так, напр., полагая A равным $P_n^*=P^*(x_n, w_n)$ — оператору, сопряженному к оператору разделенной разности $P(x_n, w_n)$, получаем итерационные процессы $x_{n+1} = x_n-\tau_n P_n^* P_n$, $n=1, 2, \ldots$, где в качестве итерационных параметров можно, напр., использовать параметры, получающиеся из соотношений (11), (12):

$$\tau_n=\alpha\|z_n\|^2/\|P_n^* z_n\|^2, \quad \tau_n=\alpha\|y_n\|^2/\|z_n\|^2.$$

5. Если положить $A=P^{-1}(x_n, w_n)$ и $\alpha=1$, то все итерационные параметры из (3), (4) будут равны единице, тогда при $w_n=\Phi(x_n)$, $n=1, 2, \ldots$, получим метод Стеффенсена [1], а при $w_n=x_{n-1}$, $n=1, 2, \ldots$, получим метод хорд [2].

Отметим также, что теоремы 1, 2 и следствия 1, 2 сохраняют силу и тогда, когда уравнения (1) линейные $P(x)\equiv Cx-f=0$. В этом случае условия (5), (6), (9) могут быть записаны соответственно в виде $b(Dh, h)\leqslant(DACh, h)$, $(DACh, ACh)\leqslant L(DACh, h)$, $(DACh, ACh)\leqslant B^2(Dh, h)$, $h\in H$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ульм С. Ю. Обобщение метода Стеффенсена для решения нелинейных операторных уравнений.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 6, с. 1093—1097.
2. Сергеев А. С. О методе хорд.— Сиб. матем. журн., 1961, т. II, № 2, с. 282—289.
3. Федоренко Ю. Д., Добрусина В. А. Об одной модификации итерационного процесса с минимальными невязками.— В сб.: Вычисл. и прикл. матем. Киев, 1969, вып. 8, с. 160—166.
4. Добрусина В. А., Федоренко Ю. Д. О некоторых итерационных процессах решения нелинейных уравнений в H-пространствах.— Материалы межвузовск. конф. молодых ученых-матем. Харьков, 1966, с. 29—33.
5. Каримов Т. Х. О некоторых итерационных методах решения нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве.— ДАН СССР, 1983, т. 269, № 5, с. 1038—1042.
6. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978. 592 с.
7. Ульм С. Ю. Об обобщенных разделенных разностях, I.— Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. н., 1967, т. 16, № 1, с. 13—26.

г. Казань

Поступила
22.11.1983

УДК 512.543

Д. И. Молдаванский, Е. М. Чугунова, Н. И. Швецова

О МАКСИМАЛЬНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ СОМНОЖИТЕЛЕЙ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ С ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

1. Назовем подгруппу S группы G *независимой* в группе G, если нормальное замыкание S^G подгруппы S в этой группе является свободным произведением некоторого семейства подгрупп, сопряженных с S, т. е.

$$S^G=\prod_{\lambda\in\Lambda}^* S^{g_\lambda}, \qquad (1)$$

где $S^x = xSx^{-1}$. Легко видеть, что в этом случае любые два элемента g_{λ_1} и g_{λ_2} $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ принадлежат различным левым смежным классам группы G по подгруппе $S^G N_G(S)$, где $N_G(S)$ — нормализатор подгруппы S в группе G. Если равенство (1) выполнено для некоторого семейства $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, представляющего все классы левостороннего разложения группы G по подгруппе $S^G N_G(S)$, то подгруппу S будем называть *максимально независимой* в группе G.

Понятие максимальной независимости (с другим, более длинным названием) введено А. Каррасом и Д. Солитэром в [1], хотя фактически встречается уже в работе Д. Коэна и Р. Линдона [2], где доказана (по нашей терминологии) максимальная независимость циклических подгрупп свободных групп. Обобщая этот результат, С. Д. Бродский [3] доказал максимальную независимость некоторых циклических подгрупп свободных произведений локально индикабельных групп.

Пусть группа G является свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H,

$$G = (A * B;\ H).$$

Один из результатов работы [1] утверждает, что если S — подгруппа группы A такая, что $S^A \cap H = 1$, то максимальная независимость подгруппы S в группе G равносильна ее максимальной независимости в группе A. Рассматривая здесь в некотором смысле противоположный „предельный" случай $S = A$, докажем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $G = (A * B;\ H)$, где $H \neq A$ и $H \neq B$. Подгруппа A максимально независима в группе G тогда и только тогда, когда подгруппа H максимально независима в группе B и совпадает со своим нормализатором в B.*

Очевидным следствием этой теоремы и упомянутого результата Коэна и Линдона является критерий максимальной независимости некоторых магнусовых подгрупп ([4], с. 277) одного класса групп с одним определяющим соотношением, постоянно привлекающим внимание ряда авторов (см., напр., [5]).

Следствие. Пусть A и B — свободные группы, a и b — неединичные элементы групп A и B соответственно и $G = (A * B;\ a = b)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной циклической подгруппой (отличной от каждого из сомножителей). Подгруппа A максимально независима в группе G тогда и только тогда, когда элемент b не является степенью в группе B.

Непосредственно доказательству теоремы посвящены пп. 3 и 4 данной заметки. В п. 2 собраны некоторые предварительные результаты. Все необходимые сведения о свободных произведениях (с объединенной подгруппой) можно найти в [4] и [6].

2. В этом пункте приведем некоторые вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства теоремы.

Предложение 1 (см. [1]). *Пусть подгруппа S максимально независима в группе G и пусть $S^G = \prod^*_{\lambda \in \Lambda} S^{g_\lambda}$. Тогда семейство $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ представляет все классы левостороннего разложения группы G по подгруппе $S^G N_G(S)$. Каждая подгруппа вида S^g сопряжена относительно S^G с подгруппой S^{g_λ} для некоторого $\lambda \in \Lambda$.*

Предложение 2. *Пусть подгруппа S максимально независима в группе G. Тогда $S^G = \prod^*_{\lambda \in \Lambda} S^{g_\lambda}$ для некоторого семейства $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ элементов группы G, содержащего единицу.*

В самом деле, $S^G = \prod^*_{\lambda \in \Lambda} S^{g'_\lambda}$ для некоторого семейства $(g'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ элементов группы G, представляющего все классы по подгруппе $S^G N_G(S)$. Запишем элемент $g'_{\lambda_0} \in S^G N_G(S)$ в виде $g'_{\lambda_0} = fn$, где $f \in S^G$, $n \in N_G(S)$. Группа S^G является свободным произведением подгрупп $f^{-1}S^{g'_\lambda}f = S^{f^{-1}g'_\lambda}$. Так как $S^{f^{-1}g'_{\lambda_0}} = S$, то получим требуемое семейство элементов, полагая $g_\lambda = f^{-1}g'_\lambda$ для $\lambda \neq \lambda_0$ и $g_{\lambda_0} = 1$.

Предложение 3. *Пусть подгруппа S максимально независима в группе G. Тогда для любого элемента $g \in G$ из $S^g \cap S \neq 1$ следует, что $g \in N_G(S)$.*

Пусть, действительно, $S^G = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda}^{*} S^{g_\lambda}$, где семейство $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ элементов группы G содержит единицу и пусть для некоторого $s \in S$, $s \neq 1$, элемент gsg^{-1} лежит в подгруппе S. Записывая g в виде $fg_\lambda n$ для подходящих $f \in S^G$, $\lambda \in \Lambda$ и $n \in N_G(S)$, видим, что $gsg^{-1} = fs_1^{g_\lambda}f^{-1}$, где $s_1 = nsn^{-1} \in S$.

Таким образом, неединичные элементы $gsg^{-1} \in S$ и $s_1^{g_\lambda} \in S^{g_\lambda}$, лежащие в компонентах свободного разложения группы S^G, сопряжены в этой группе. Поэтому $g_\lambda = 1$ и $f \in S$, отсюда $g \in N_G(S)$.

Непосредственным следствием предложения 3 является

Предложение 4. *Пусть подгруппа S максимально независима в группе G и пусть T — неединичная подгруппа группы S. Тогда $N_G(T) \subseteq N_G(S)$.*

Следующее предложение легко получается из известных свойств конструкции свободного произведения с объединенной подгруппой.

Предложение 5. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Тогда $A^G \cap B = H^B$ и $G/A^G \simeq B/H^B$. Более того, произвольное семейство $(b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ элементов группы B служит системой представителей смежных классов группы B по подгруппе H^B тогда и только тогда, когда оно является системой представителей смежных классов группы G по подгруппе A^G.*

3. Если $G = (A * B;\ H)$ и $H \neq A$, $H \neq B$, то, как легко понять, подгруппа A совпадает со своим нормализатором в группе G.

В этом пункте будем считать, что подгруппа A максимально независима в группе G. Тогда из предложения 4 следует, что $N_G(H) \subseteq N_G(A) = A$, и поэтому $N_B(H) = N_G(H) \cap B \subseteq A \cap B = H$.

Для доказательства максимальной независимости подгруппы H в группе B воспользуемся теоремой Куроша о подгруппах свободного произведения групп в следующей формулировке (см. [7], с. 169): если $G = \prod\limits_{i \in I}^{*} A_i$ и U — подгруппа группы G, то в каждом классе D каждого из разложений группы G по двойному модулю (A_i, U) можно таким образом выбрать по представителю $s = s(i, D)$, что группа U будет свободным произведением всевозможных подгрупп вида $U \cap s^{-1}A_is$ $(s = s(i, D),\ D = A_ixU,\ i \in I,\ x \in G)$ и некоторой свободной группы.

Пусть для некоторого семейства $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ элементов группы G

$$A^G = \prod{}^{*} A^{g_\lambda} \tag{2}$$

и пусть $s(\lambda, D)$ — выбирающая представителей функция из теоремы Куроша для этого разложения группы A^G и для ее подгруппы H^B.

Покажем, что, не теряя общности, можно предполагать выполненным следующее условие:

для каждого $\lambda \in \Lambda$ найдется двойной класс $A^{g_\lambda}xH^B$, $x \in A^G$, такой, что если $u_\lambda = s(\lambda,\ A^{g_\lambda}xH^B)$, то элемент $b_\lambda = u_\lambda^{-1}g_\lambda$ лежит в подгруппе B.

В самом деле, из предложения 5 вытекает возможность представления элемента g_λ в виде $g_\lambda = v_\lambda c_\lambda$, где $v_\lambda \in A^G$, $c_\lambda \in B$. Полагая $u_\lambda = s(\lambda,\ A^{g_\lambda}v_\lambda H^B)$, имеем $v_\lambda = a_\lambda u_\lambda h_\lambda$ для подходящих $a_\lambda \in A^{g_\lambda}$, $h_\lambda \in H^B$. Пусть $h_\lambda c_\lambda = b_\lambda \in B$, $g'_\lambda = u_\lambda b_\lambda$. Тогда $g'_\lambda = a_\lambda^{-1}g_\lambda$, и т. к. $a_\lambda \in A^{g_\lambda}$, то $A^{g'_\lambda} = A^{a_\lambda^{-1}g_\lambda} = a_\lambda^{-1}A^{g_\lambda}a_\lambda = A^{g_\lambda}$.

Таким образом, заменив элементы g_λ элементами g'_λ, мы не изменим разложения (2) группы A^G и обеспечим справедливость требуемого условия.

Из предложения 1 и равенства $N_G(A)=A$ вытекает, что семейство $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ есть система представителей смежных классов группы G по подгруппе A^G. Тем же свойством обладает поэтому и семейство $(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. По предложению 5 это семейство служит системой представителей смежных классов группы B по подгруппе H^B. Покажем, что $H^B=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}{}^* H^{b_\lambda}$.

Для каждого $\lambda\in\Lambda$ подгруппа $H^B\cap u_\lambda^{-1}A^{g_\lambda}u_\lambda$ является компонентой разложения Куроша в свободное произведение группы H^B. Поскольку

$$H^B\cap u_\lambda^{-1}A^{g_\lambda}u_\lambda=H^B\cap A^{b_\lambda}=(H^B\cap A)^{b_\lambda}=H^{b_\lambda},$$

мы можем записать $H^B=(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}{}^* H^{b_\lambda})*L$, где L — свободное произведение остальных компонент разложения Куроша подгруппы H^B.

Произвольный элемент b подгруппы B может быть записан в виде $b=hb_\lambda$ для некоторых $h\in H^B$ и $\lambda\in\Lambda$. Поэтому $H^b=hH^{b_\lambda}h^{-1}$, и т. к. подгруппа H^B порождается всевозможными подгруппами H^b, $b\in B$, нормальное замыкание в группе H^B семейства подгрупп $(H^{b_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ совпадает со всей группой H^B. Следовательно, L — единичная подгруппа и $H^B=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}{}^* H^{b_\lambda}$.

4. Предположим теперь, что подгруппа H максимально независима в группе B и совпадает со своим нормализатором в B. Тогда $H^B=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}{}^* H^{b_\lambda}$ и семейство $(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ есть система представителей смежных классов группы B по подгруппе H^B. По предложению 5 это же семейство представляет все классы группы $G=(A*B;\ H)$ по подгруппе A^G, и для доказательства максимальной независимости подгруппы A в группе G достаточно установить, что

$$A^G=\prod_{\lambda\in\Lambda}{}^* A^{b_\lambda}.$$

Произвольный элемент g группы G может быть записан в виде произведения $g=a_1b_1a_2b_2\ \dots\ a_nb_n$, где $a_i\in A$, $b_i\in B$ ($i=1,\ 2,\ \dots,\ n$). Далее имеем, очевидно, $g=\bar{a}\bar{b}$, где $\bar{a}=a_1a_2^{b_1}\ \dots\ a_n^{b_1b_2\dots b_{n-1}}\in A^G$, $\bar{b}=b_1b_2\ \dots\ b_n\in B$. Поэтому элемент g лежит в подгруппе A^G тогда и только тогда, когда $\bar{b}\in A^G\cap B=H^B$. Следовательно, группа A^G порождается подгруппами A^b, $b\in B$, и подгруппой H^B. Записывая элементы $b\in B$ в виде $b=hb_\lambda$, $h\in H^B$, получим $A^b=hA^{b_\lambda}h^{-1}$, так что группа A^G порождается подгруппами A^{b_λ}, $\lambda\in\Lambda$, и подгруппой H^B. Но последняя порождается по условию подгруппами H^{b_λ}, лежащими в соответствующих подгруппах A^{b_λ}. Таким образом, группа A^G порождается семейством подгрупп $(A^{b_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$.

Осталось показать, что произведение членов любой несократимой последовательности элементов этих подгрупп не равно единице в группе G. Такая последовательность имеет вид

$$a_1^{b_{\lambda_1}},\ a_2^{b_{\lambda_2}},\ \dots,\ a_n^{b_{\lambda_n}}, \tag{3}$$

где $n\geqslant 1$, $a_i\in A$, $a_i\neq 1$, $\lambda_i\in\Lambda$ ($i=1,\ 2,\ \dots,\ n$), и если $n>1$, то $\lambda_i\neq\lambda_{i+1}$ ($i=1,\ 2,\ \dots,\ n-1$).

Если все элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$ лежат в подгруппе H, то последовательность (3) несократима относительно свободного разложения подгруппы H^B, и поэтому произведение ее членов отлично от единицы в группе G.

Таким образом, можно предположить существование последовательности натуральных чисел $1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_s \leqslant n$ $(s \geqslant 1)$ такой, что:

1) $a_{k_j} \notin H$ для всех $j = 1, 2, \dots, s$;

2) для любого номера i такого, что или $i < k_1$, или $k_j < i < k_{j+1}$ $(j = 1, 2, \dots, s-1)$, или $i > k_s$, элемент a_i лежит в подгруппе H.

Вводя очевидные обозначения, запишем произведение элементов последовательности (3) в виде

$$u_0 a_{k_1} u_1 a_{k_2} \dots a_{k_s} u_s. \tag{4}$$

Ясно, что для каждого $j = 0, 1, \dots, s$ элемент u_j лежит в подгруппе B. Мы покажем сейчас, что если u_j входит в подгруппу H, то либо $j = 0$, либо $j = s$. Отсюда, разумеется, сразу же будет следовать, что выражение (4) является несократимой записью длины $\geqslant 1$ элемента свободного произведения $G = (A * B;\ H)$, и поэтому отлично от единицы.

Предположим, напротив, что $u_j \in H$ для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant s-1$. Запишем этот элемент в виде $u_j = b^{-1}_{\lambda_{k_j}} f b_{\lambda_{k_{j+1}}}$, где $f = 1$ при $k_{j+1} = k_j + 1$, а при $k_{j+1} > k_j + 1$

$$f = a_{k_j+1}^{b_{\lambda_{k_j+1}}} \dots a_{k_{j+1}-1}^{b_{\lambda_{k_{j+1}-1}}}. \tag{5}$$

В любом случае f — элемент подгруппы H^B. Так как $u_j \in H$, имеем

$$H = H^{u_j} = b^{-1}_{\lambda_{k_j}} f H^{b_{\lambda_{k_{j+1}}}} f^{-1} b_{\lambda_{k_j}}.$$

Отсюда $H^{b_{\lambda_{k_j}}} = f H^{b_{\lambda_{k_{j+1}}}} f^{-1}$. Таким образом, компоненты $H^{b_{\lambda_{k_j}}}$ и $H^{b_{\lambda_{k_{j+1}}}}$ свободного разложения группы H^B сопряжены в этой группе. Следовательно, они совпадают, т. е. $\lambda_{k_j} = \lambda_{k_{j+1}}$ (сразу же отметим, что отсюда следует $k_{j+1} > k_j + 1$). Кроме того, трансформирующий элемент f должен лежать в той же компоненте $H^{b_{\lambda_{k_j}}}$. Но это невозможно, т. к. выражение (5) является несократимой записью элемента f (относительно свободного разложения группы H^B), в которой первый и последний (возможно, совпадающие) слоги не лежат в подгруппе $H^{b_{\lambda_{k_j}}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Karrass A., Solitar D. On a theorem of Cohen and Lyndon about free bases for normal subgroups.— Canad. J. Math., 1972, v. 24, № 6, p. 1086—1091.
2. Cohen D., Lyndon R. Free bases for normal subgroups of free groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1963, v. 108, № 4, p. 526—537.
3. Бродский С. Д. Аномальные произведения локально индикабельных групп.— В сб.: Алгебраическ. системы. Иваново, 1981, с. 51—77.
4. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М., 1980. 447 с.
5. Baumslag G. Some problems on one-relator groups.— Lect. Notes Math., 1974, v. 372, p. 75—81.
6. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М., 1974. 455 с.
7. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969—1970 уч. г. М., 1974. 160 с.

г. Иваново

Поступила
21.07.1983