Научные труды ИвГУ. Математика. 1999. Выпуск 3

УДК 512.54

# ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП НИСХОДЯЩЕГО $HNN$-РАСШИРЕНИЯ ГРУПП

Д. И. Молдаванский

Доказано, что все циклические подгруппы нисходящего $HNN$-расширения группы $G$ являются финитно отделимыми в точности тогда, когда в группе $G$ каждая циклическая подгруппа отделима семейством всех совместимых нормальных подгрупп конечного индекса.

Пусть $G$ — некоторая группа, $A$ и $B$ — изоморфные подгруппы группы $G$ и $\varphi : A \to B$ — фиксированный изоморфизм. Пусть $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ — $HNN$-расширение группы $G$ с проходной буквой $t$ и связанными подгруппами $A$ и $B$. $HNN$-расширение группы $G$ называют нисходящим, если одна из связанных подгрупп, скажем $A$, совпадает с группой $G$.

Хорошо известно (см. напр. [2]), что необходимым, но вообще говоря, не достаточным условием финитной аппроксимируемости группы $G^*$ является тривиальность пересечения всех $(A, B, \varphi)$-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы $G$. (Подгруппу $H$ группы $G$ называют $(A, B, \varphi)$-совместимой, если $(H \cap A)\varphi = H \cap B$.) В работе [1] было доказано, что в случае нисходящего $HNN$-расширения это необходимое условие оказывается и достаточным для финитной аппроксимируемости. Здесь мы покажем, что в этом случае фактически в тех же терминах можно сформулировать и критерий финитной отделимости всех циклических подгрупп. А именно, имеет место

**Теорема.** *Пусть $G$ — некоторая группа, $B$ — подгруппа группы $G$, изоморфная этой группе, и $\varphi : G \to B$ — изоморфизм. Пусть $G^* = (G, t;\ t^{-1}Gt = B, \varphi)$ — нисходящее $HNN$-расширение группы $G$. Каждая циклическая подгруппа группы $G^*$ финитно отделима тогда и только тогда, когда каждая циклическая подгруппа группы $G$ отделима семейством всех $(G, B, \varphi)$-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы $G$.*

Для доказательства теоремы напомним о некоторых построениях, связанных с использованием понятия $(A, B, \varphi)$-совместимой подгруппы. В частном случае нисходящего $HNN$-расширения соответствующие утверждения выглядят следующим образом.

Если $H$ — произвольная $(G, B, \varphi)$-совместимая нормальная подгруппа конечного индекса группы $G$, то отображение $\varphi_H$, определяемое по правилу $(xH)\varphi_H = (x\varphi)H$ $(x \in G)$, является автоморфизмом фактор-группы $G/H = BH/H$. Поэтому соответствующее $HNN$-расширение $G^*_H = (G/H, t;\ t^{-1}G/Ht = BH/H, \varphi_H)$ является расщепляющимся расширением конечной нормальной группы $G/H$ при помощи бесконечной циклической группы, порождаемой элементом $t$. Существует гомоморфизм $\rho_H$ группы $G^*$ на группу

$G_H^*$, продолжающий естественное отображение группы $G$ на фактор-группу $G/H$ и переводящий $t$ в $t$. Кроме того, пересечение с базовой группой $G$ произвольной нормальной подгруппы $HNN$-расширения $G^* = (G, t;\ t^{-1}Gt = B, \varphi)$ является $(G, B, \varphi)$-совместимой подгруппой группы $G$, и потому произвольный гомоморфизм группы $G^*$ в любую группу проходит через некоторый гомоморфизм вида $\rho_{_H}$.

Последнее замечание делает часть "только тогда" утверждения теоремы почти очевидной. Если, в самом деле, $C$ — произвольная циклическая подгруппа группы $G$ и $a$ — не принадлежащий ей элемент из группы $G$, то найдется гомоморфизм $\psi$ группы $G^*$ в конечную группу, такой что $a\psi \notin C\psi$. Очевидно, что $a \notin CN$, где $N$ есть пересечение подгруппы $G$ и ядра гомоморфизма $\psi$ и потому является $(G, B, \varphi)$-совместимой нормальной подгруппой конечного индекса группы $G$.

Переходя к доказательству достаточности, отметим сначала, что произвольный элемент $g$ группы $G^*$ однозначно записывается в виде $t^pat^{-q}$, где $a \in G$, целые числа $p$ и $q$ неотрицательны и если $pq \neq 0$, то $a \notin B$ (см. [1]). Такую запись элемента группы $G^*$ будем называть канонической.

Из замечаний, приведенных после формулировки теоремы, следует, что для доказательства отделимости циклических подгрупп группы $G^*$ достаточно для любой ее циклической подгруппы $C$ и любого элемента $g \in G^* \setminus C$ указать такую $(G, B, \varphi)$-совместимую нормальную подгруппу $H$ конечного индекса группы $G$, что $g\rho_{_H} \notin C\rho_{_H}$.

Итак, пусть $C$ — произвольная циклическая подгруппа группы $G^*$. Из вида канонической записи ее порождающего элемента следует, что заменяя подгруппу $C$ сопряженной ей, если это необходимо, можем без потери общности считать, что подгруппа $C$ порождается элементом вида $c = t^ka$, где $a \in G$. Пусть элемент $g \in G^*$ не принадлежит подгруппе $C$. Рассмотрим отдельно два случая в зависимости от значения $k$.

Если $k = 0$, то $C \leq G$, и потому если $g \in G$, то найдется $(G, B, \varphi)$-совместимая нормальная подгруппа $H$ конечного индекса группы $G$ такая, что $g \notin CH$. Так как гомоморфизм $\rho_{_H}$ продолжает естественное отображение группы $G$ на фактор-группу $G/H$, то $g\rho_{_H} \notin C\rho_{_H}$. Если элемент $g \notin G$ и $g = t^pbt^{-q}$ — его каноническая запись, то при $p - q \neq 0$ утверждение $g\rho_{_H} \notin C\rho_{_H}$ имеет место для любой $(G, B, \varphi)$-совместимой нормальной подгруппы $H$ группы $G$. Если же $p - q = 0$, то поскольку элемент $b$ не принадлежит подгруппе $t^{-p}Ct^p \leq G$, существование искомой подгруппы $H$ доказывается, как выше.

Предположим теперь, что $k \neq 0$. Пусть снова каноническая запись элемента $g$ имеет вид $g = t^pbt^{-q}$. Предположим, что для некоторой $(G, B, \varphi)$-совместимой нормальной подгруппы $H$ конечного индекса группы $G$ и для некоторого целого числа $n$ имеет место равенство $g\rho_{_H} = (c\rho_{_H})^n$. Факторизуя группу $G_H^*$ по подгруппе $G/H$, мы видим, что тогда $p - q = kn$ для некоторого целого числа $n$. Следовательно, если $p - q$ не делится на $k$, то при любом гомоморфизме вида $\rho_{_H}$ будем иметь $g\rho_{_H} \notin C\rho_{_H}$. Если же $p - q = kn$, то поскольку элемент $gc^{-n}$ группы $G^*$ отличен от единицы и эта группа ввиду [1] финитно аппроксимируема, найдется гомоморфизм ее на конечную группу, образ элемента $gc^{-n}$ при котором не равен 1. Тогда этот гомоморфизм проходит через некоторое отображение вида $\rho_{_H}$, для которого $g\rho_{_H} \neq (c\rho_{_H})^n$, и в силу предыдущего имеем $g\rho_{_H} \notin C\rho_{_H}$. Теорема доказана.

## Список использованной литературы

1. *Молдаванский Д.И.* Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44. С. 842 – 845.
2. *Shirvani M.* On residually finite HNN-extensions//Arch. Math. 1985. V.44. P. 110 – 115.