Математика и ее приложения. 2004. № 1. С. 41 – 50

УДК 514.83+514.7

А. И. Воробьев[1]

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СТРУКТУР, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ВИНТОВ

Ключевые слова: потенциальная структура, группа Пуанкаре, гиперболический винт, классификация.

Проведена классификация потенциальных структур, инвариантных относительно гиперболических винтов. Получено тринадцать непустых классов.

The classification of potential structures, which invariant relatively hyperbolic helices, is presented. There are received 13 non-empty classes.

Введение. Постановка задачи

Настоящая работа содержит сокращенное изложение результатов, представленных в депонированной рукописи автора [3].

В работе автора [2] описан ряд классов пространств Максвелла, инвариантных относительно группы гиперболических винтов. Эти классы можно использовать, в частности, для получения первых интегралов уравнений Лоренца методом, предложенным М. А. Париновым [4]. Однако при малых размерностях групп $G_{k,l}$ (подгрупп группы Пуанкаре) эти классы определяются системами дифференциальных уравнений, решения которых найти не удается. Поэтому найти представителей классов пространств Максвелла в этих случаях затруднительно и остается открытым вопрос о сопоставлении группам $G_{k,l}$ классов пространств Максвелла $C_{k,l}$. Знание же 4-потенциалов A_i, инвариантных относительно групп $G_{k,l}$, дает возможность найти таких представителей по формуле

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \tag{1}$$

[1]Институт программных систем РАН, г. Переславль-Залесский,
E-mail: vorobjev@interin.ru

С другой стороны, применение метода М. А. Паринова получения первых интегралов уравнений Лоренца для классов $C_{k,l}$ при малых размерностях групп $G_{k,l}$ затруднительно не только потому, что эти классы не описаны явно, но и потому, что в этих случаях возникают технические трудности при поиске симметричных потенциалов. Задача получения классов потенциальных структур (ковекторных полей) на пространстве Минковского, инвариантных относительно групп $G_{k,l}$, интересна тем, что в этом случае можно получать первые интегралы уравнений Лоренца непосредственным применением теоремы Э. Нётер.

Потенциальная структура на гладком многообразии есть дифференциальная 1-форма $A = A_i dx^i$, где A_i — ковекторное поле (в частности, 4-потенциал электромагнитного поля на пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$).

Пусть G_A — группа диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^4_1$, сохраняющих форму A, а $\mathcal{L}_A$ — соответствующая алгебра Ли:

$$\mathcal{L}_A = \{\xi : \ L_\xi A_i = 0\}.$$

Аналогично, пусть G_g — группа Пуанкаре, т. е. группа диффеоморфизмов, сохраняющих метрический тензор g_{ij}, а $\mathcal{L}_g$ — соответствующая алгебра Ли:

$$\mathcal{L}_g = \{\xi : \ L_\xi g_{ij} = 0\}.$$

Обозначим, наконец,

$$G_P = G_A \cap G_g, \quad \mathcal{L}_P = \mathcal{L}_A \cap \mathcal{L}_g. \tag{2}$$

Задача классификации потенциальных структур состоит в нахождении всех групп G_P, а также в описании структур $A = A_i dx^i$, инвариантных относительно этих групп. Тензор A_i, задающий класс потенциальных структур, допускающих группу G_P, является решением системы уравнений

$$L_{\xi_k} A_i = 0 \ (k = 1, \dots, p = \dim \mathcal{L}_P), \tag{3}$$

где ξ_k — базисные векторы в $\mathcal{L}_P$, а L_{ξ_k} — производная Ли.

Группа Пуанкаре имеет бесконечное множество подгрупп, поэтому невозможно составить список классов потенциальных структур, инвариантных относительно G_P. Однако мы можем получить список представителей классов сопряженных подгрупп группы Пуанкаре.

Базис алгебры Ли группы Пуанкаре выберем в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&e_1=(1,0,0,0),\ e_2=(0,1,0,0),\ e_3=(0,0,1,0),\ e_4=(0,0,0,1),\\
&e_{12}=(-x^2,x^1,0,0),\quad e_{13}=(x^3,0,-x^1,0),\quad e_{23}=(0,-x^3,x^2,0),\\
&e_{14}=(x^4,0,0,x^1),\quad e_{24}=(0,x^4,0,x^2),\quad e_{34}=(0,0,x^4,x^3).
\end{aligned}
$$

1-мерные подгруппы гиперболических винтов соответствуют векторам, являющимся линейными комбинациями векторов e_{i4} и e_k $(k\neq i)$. Например, $\xi=e_{24}+\lambda e_1$ или $\xi=e_{24}+\lambda e_1+\mu e_3$ $(\lambda,\mu=\mathrm{const})$.

В данной работе мы будем рассматривать те погруппы группы Пуанкаре из списка в работе И. В. Белько [1], которые содержат гиперболические винты. Соответствующие алгебры Ли этих подгрупп выписаны ниже. Символы $L\{\xi_1,\dots,\xi_k\}$ обозначают линейную оболочку векторов $\xi_1,\dots,\xi_k$.

1) $\mathcal{L}_1=L\{e_{24}+\lambda e_1\}$;
2) $\mathcal{L}_{2,1}=L\{e_{24}+\mu e_3,e_1\}$, $\mathcal{L}_{2,2}=L\{e_{24}+\mu e_3,e_2-e_4\}$;
3) $\mathcal{L}_{3,1}=L\{e_{24}+\mu e_3,e_2,e_4\}$, $\mathcal{L}_{3,2}=L\{e_{24}+\mu e_3,e_2-e_4,e_1\}$,
$\mathcal{L}_{3,3}=L\{e_{24}+\lambda e_1+\mu e_3,e_2-e_4,e_{12}-e_{14}\}$;
4) $\mathcal{L}_{4,1}=L\{e_{24}+\mu e_3,e_1,e_2,e_4\}$,
$\mathcal{L}_{4,2}=L\{e_{24}+\lambda e_1,e_{12}-e_{14},e_2-e_4,e_3\}$,
$\mathcal{L}_{4,3}=L\{e_{24}+\mu e_3,e_{12}-e_{14},e_2-e_4,e_1+\nu e_3\}$,
$\mathcal{L}_{4,4}=L\{e_{24}+\lambda e_1,e_{12}-e_{14},e_2-e_4,e_{23}+e_{34}\}$;
5) $\mathcal{L}_{5,1}=L\{e_{24}+\mu e_3,e_1,e_2,e_4,e_{12}-e_{14}\}$,
$\mathcal{L}_{5,2}=L\{e_{24}+\mu e_3,e_{12}-e_{14},e_2-e_4,e_1,e_{23}+e_{34}\}$;
6) $\mathcal{L}_6=L\{e_{24},e_{12}-e_{14},e_2-e_4,e_1,e_3,e_{23}+e_{34}\}$.

В обозначении $\mathcal{L}_{k,l}$ первый индекс указывает на размерность алгебры. Подгруппы группы Пуанкаре и соответствующие подалгебры будем обозначать так: $G_{k,l}$ и $\mathcal{L}_{k,l}$. Соответствующие им классы потенциалов будем обозначать $P_{k,l}$. Представленный здесь список подалгебр совпадает со списком в работе [2].

Замечание. При $k>6$ классы пространств Максвелла $C_{k,l}$ пусты $(F_{ij}=0)$. Однако классы $P_{k,l}$ могут оказаться непустыми. Но мы не будем расширять уже взятый список подгрупп $G_{k,l}$, поскольку для полей A_i, допускающих группы $G_{k,l}$ размерностей $k>6$, соответствующие поля F_{ij} нулевые и не представляют интереса с точки зрения электродинамики. В этих случаях ковекторные поля A_i являются градиентами скалярных полей.

1. Одномерные подгруппы

Случай общего положения (класс P_1). Выпишем одномерную подгруппу группы Пуанкаре (гиперболический винт) в виде:

$$\tilde{x}^1 = \lambda a + x^1, \;\; \tilde{x}^2 = x^2 \mathrm{ch} a + x^4 \mathrm{sh} a, \;\; \tilde{x}^3 = \mu a + x^3, \;\; \tilde{x}^4 = x^2 \mathrm{sh} a + x^4 \mathrm{ch} a,$$

где λ, μ — фиксированные действительные числа, a — групповой параметр. Соответствующий инфинитезимальный оператор имеет вид:

$$X = \xi^i(x)\partial_i, \;\; \xi(x) = (\lambda, x^4, \mu, x^2) = e_{24} + \lambda e_1 + \mu e_3.$$

Решая уравнение $L_\xi A_i = 0$ для вектора $\xi = e_{24} + \lambda e_1 + \mu e_3$ в новой системе координат $\{\tilde{x}^i\} = \{\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3, \varphi\}$, связанной с системой координат $\{x^i\}$ формулами

$$x^1 = \lambda\varphi + \tilde{x}^1, \;\; x^2 = r \mathrm{ch}\varphi, \;\; x^3 = \mu\varphi + \tilde{x}^3, \;\; x^4 = r \mathrm{sh}\varphi, \tag{4}$$

в результате вычислений получим, что *потенциал A_i класса P_1 будет иметь вид*

$$\begin{aligned} &A_1 = A_1(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \quad A_2 = c_1 \mathrm{ch}\varphi + c_2 \mathrm{sh}\varphi, \\ &A_3 = A_3(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \quad A_4 = -c_1 \mathrm{sh}\varphi - c_2 \mathrm{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{5}$$

где c_i — гладкие функции от $\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3 : c_i = c_i(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), i = 1, 2.$

В частных случаях, когда $\lambda = 0$ или $\mu = 0$, тензор A_i имеет тот же вид (5), но при этом в формулах (4) необходимо учесть эти условия.

Представителем класса P_1 можно взять потенциал

$$A_i = \left(\Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3), 0, 0, 0\right),$$

где $\Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ — гладкая функция, у которой производные $\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{x}^1}$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{x}^3}$ линейно независимы. В декартовой системе координат этот представитель будет иметь вид

$$A_i = \left(\Phi\left(x^1 - \lambda\,\mathrm{arcth}\frac{x^4}{x^2},\; x^3 - \mu\,\mathrm{arcth}\frac{x^4}{x^2}\right),\; 0,\; 0,\; 0\right).$$

2. Классы, соответствующие двумерным подгруппам

2.1. *Класс* $P_{2,1}$. $\mathcal{L}_{2,1} = L\{e_{24} + \mu e_3, e_1\}$. *Вид тензора* A_i *класса* $P_{2,1}$ *будет следующим:*

$$\begin{aligned} &A_1 = A_1(r, \tilde{x}^3), \quad A_2 = c_1 \mathrm{ch}\varphi + c_2 \mathrm{sh}\varphi, \\ &A_3 = A_1(r, \tilde{x}^3), \quad A_4 = -c_1 \mathrm{sh}\varphi - c_2 \mathrm{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{6}$$

где c_i *— гладкие функции от* $r, \tilde{x}^3 : c_i = c_i(r, \tilde{x}^3), i = 1, 2.$

Представителем может служить следующий ковектор

$$A_i = \left(\Phi(\tilde{x}^3),\ 0,\ 0,\ 0\right),$$

где $\Phi(\tilde{x}^3)$ — произвольная гладкая непостоянная функция. В декартовой системе координат этот представитель будет иметь вид

$$A_i = \left(\Phi\left(x^3 - \mu\,\mathrm{arcth}\frac{x^4}{x^2}\right),\ 0,\ 0,\ 0\right).$$

2.2. *Класс* $P_{2,2}$. $\mathcal{L}_{2,2} = L\{e_{24} + \mu e_3, e_2 - e_4\}$. *Вид тензора* A_i *класса* $P_{2,2}$:

$$\begin{aligned} &A_1 = \Phi_1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \mu \ln r), \quad A_2 = c_1 \mathrm{ch}\varphi + c_2 \mathrm{sh}\varphi, \\ &A_3 = \Phi_2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \mu \ln r), \quad A_4 = -c_1 \mathrm{sh}\varphi - c_2 \mathrm{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{7}$$

где функциии c_1, c_2 *задаются формулами*

$$\begin{aligned} c_1 = a_1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \mu \ln r)\mathrm{ch}\ln r + a_2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \mu \ln r)\mathrm{sh}\ln r, \\ c_2 = a_1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \mu \ln r)\mathrm{sh}\ln r + a_2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \mu \ln r)\mathrm{ch}\ln r. \end{aligned} \tag{8}$$

3. Классы, соответствующие трехмерным подгруппам

3.1. *Класс* $P_{3,1}$. $\mathcal{L}_{3,1} = L\{e_{24} + \mu e_3,\ e_2,\ e_4\}$. *Потенциал* A_i *класса* $P_{3,1}$ *имет вид*

$$\begin{aligned} &A_1 = A_1(x^1), \quad A_2 = c_1(x^1)\mathrm{ch}\frac{x^3}{\mu} + c_2(x^1)\mathrm{sh}\frac{x^3}{\mu}, \\ &A_3 = A_3(x^1), \quad A_4 = -c_1(x^1)\mathrm{sh}\frac{x^3}{\mu} - c_2(x^1)\mathrm{ch}\frac{x^3}{\mu}. \end{aligned} \tag{9}$$

Представитель этого класса может иметь такой вид:

$$A_i = \left(x^1, c(x^1)\mathrm{ch}\frac{x^3}{\mu}, x^1, -c(x^1)\mathrm{sh}\frac{x^3}{\mu} \right),$$

где $c(x^1)$ любая не равная нулю функция, например x^1.

3.2. *Класс* $P_{3,2}$. $\mathcal{L}_{3,2} = L\{e_{24} + \mu e_3,\ e_2 - e_4,\ e_1\}$. *Вид тензора* A_i *класса* $P_{3,2}$ *будет следующим:*

$$\begin{aligned} &A_1 = \Phi_1(\tilde{x}^3 - \mu \ln r), \quad A_2 = c_1 \mathrm{ch}\varphi + c_2 \mathrm{sh}\varphi, \\ &A_3 = \Phi_2(\tilde{x}^3 - \mu \ln r), \quad A_4 = -c_1 \mathrm{sh}\varphi - c_2 \mathrm{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{10}$$

где функциии $c_1,\ c_2$ *задаются формулами*

$$\begin{aligned} &c_1 = a_1(\tilde{x}^3 - \mu \ln r)\mathrm{ch} \ln r + a_2(\tilde{x}^3 - \mu \ln r)\mathrm{sh} \ln r, \\ &c_2 = a_1(\tilde{x}^3 - \mu \ln r)\mathrm{sh} \ln r + a_2(\tilde{x}^3 - \mu \ln r)\mathrm{ch} \ln r. \end{aligned} \tag{11}$$

4.3. *Класс* $P_{3,3}$. $\mathcal{L}_{3,3} = L\{e_{24} + \lambda e_1 + \mu e_3,\ e_{12} - e_{14},\ e_2 - e_4\}$. *Вид компонент тензора* A_i *класса* $P_{3,3}$:

$$\begin{aligned} &A_1 = a_1 \tilde{x}^1 + a_2, \quad A_2 = c_1 \mathrm{ch}\varphi + c_2 \mathrm{sh}\varphi, \\ &A_3 = \Phi_1(\tilde{x}^3 - \mu \ln r), \quad A_4 = -c_1 \mathrm{sh}\varphi - c_2 \mathrm{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} &c_1 = -\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2} a_1(r, \tilde{x}^3)(\tilde{x}^1)^2 + a_2(r, \tilde{x}^3)\tilde{x}^1 + a_3(r, \tilde{x}^3) \right), \\ &c_2 = r a_1(r, \tilde{x}^3) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2} a_1(r, \tilde{x}^3)(\tilde{x}^1)^2 + a_2(r, \tilde{x}^3)\tilde{x}^1 + a_3(r, \tilde{x}^3) \right), \end{aligned} \tag{13}$$

причем

$$a_1 = a_1(u) = \Phi_2(\tilde{x}^3 - \mu \ln r), \quad a_2 = -\frac{\lambda v}{2\mu}\Phi_2(u) + \Phi_3(u),$$

$$a_3 = -\frac{\lambda^2}{8\mu^2} v^2 \Phi_2(u) - \frac{\lambda}{2\mu} v \Phi_3(u) - \frac{1}{2} e^{\frac{v-u}{\mu}} \Phi_2(u) + \Phi_4(u),$$

$$u = \tilde{x}^3 - \mu \ln r, \quad v = \tilde{x}^3 + \mu \ln r,$$

а $\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Phi_4$ — *произвольные функции.*

3.4. *Класс* $P_{3,3}$ *при* $\mu = 0$. Предположим теперь, что λ — любое число. Тогда получим, что *тензор* A_i *класса* $P_{3,3}$ *при* $\mu = 0$ *имеет вид*

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1\tilde{x}^1 + a_2, \quad A_2 = c_1 \mathrm{ch}\varphi + c_2 \mathrm{sh}\varphi, \\ A_3 &= A_3(\tilde{x}^3), \quad A_4 = -c_1 \mathrm{sh}\varphi - c_2 \mathrm{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}a_1(r,\tilde{x}^3)(\tilde{x}^1)^2 + a_2(r,\tilde{x}^3)\tilde{x}^1 + a_3(r,\tilde{x}^3)\right), \\ c_2 &= r a_1(r,\tilde{x}^3) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}a_1(r,\tilde{x}^3)(\tilde{x}^1)^2 + a_2(r,\tilde{x}^3)\tilde{x}^1 + a_3(r,\tilde{x}^3)\right), \end{aligned} \tag{15}$$

причем

$$a_2 = -\lambda a_1(\tilde{x}^3)\ln r + a'(\tilde{x}^3),$$

$$a_3 = \frac{\lambda^2}{2}a_1(\tilde{x}^3)\ln^2 r - \lambda a'(\tilde{x}^3)\ln r + \frac{r^2}{2}a_1 + a''(\tilde{x}^3),$$

где a_1, a', a'' — *произвольные функции от* $\tilde{x}^3$.

4. Классы, соответствующие четырехмерным подгруппам

4.1. *Класс* $P_{4,1}$. $\mathcal{L}_{4,1} = L\{e_{24} + \mu e_3,\ e_1,\ e_2,\ e_4\}$. *Потенциал* A_i *класса* $P_{4,1}$ *имеет вид*

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathrm{const}, \quad A_2 = c_1 \mathrm{ch}\frac{x^3}{\mu} + c_2 \mathrm{sh}\frac{x^3}{\mu}, \\ A_3 &= \mathrm{const}, \quad A_4 = -c_1 \mathrm{sh}\frac{x^3}{\mu} - c_2 \mathrm{ch}\frac{x^3}{\mu}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $c_1,\ c_2$ — *константы.*

Представителем этого класса можно выбрать следующий:

$$A_i = \left(A_1, c\,\mathrm{ch}\frac{x^3}{\mu}, A_3, -c\,\mathrm{sh}\frac{x^3}{\mu}\right),$$

где $A_1,\ A_3,\ c \neq 0$ — константы.

4.2. *Класс* $P_{4,2}$. $\mathcal{L}_{4,2} = L\{e_{24} + \lambda e_1,\, e_{12} - e_{14},\, e_2 - e_4,\, e_3\}$. *Тензор* A_i *класса* $P_{4,2}$ *будет иметь вид*

$$\begin{aligned} &A_1 = a_1\tilde{x}^1 - \lambda(a_1 \ln r + a), \quad A_2 = c_1 \mathrm{ch}\varphi + c_2 \mathrm{sh}\varphi, \\ &A_3 = \mathrm{const}, \quad A_4 = -c_1 \mathrm{sh}\varphi - c_2 \mathrm{ch}\varphi \quad (a_1 = \mathrm{const}), \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}a_1(\tilde{x}^1)^2 + a_2\tilde{x}^1 + a_3\right), \\ c_2 &= ra_1 + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}a_1(\tilde{x}^1)^2 + a_2\tilde{x}^1 + a_3\right), \end{aligned} \tag{18}$$

причем

$$\begin{aligned} &a_2 = -\lambda(a_1 \ln r + a), \quad a = \mathrm{const}, \\ &a_3 = \frac{1}{2}a_1\left(r^2 + \lambda^2(\ln r)^2\right) + \lambda^2 a \ln r + a', \quad a' = \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{19}$$

4.3. *Класс* $P_{4,3}$. $\mathcal{L}_{4,3} = L\{e_{24} + \mu e_3,\, e_{12} - e_{14},\, e_2 - e_4,\, e_1 + \nu e_3\}$. *Потенциал* A_i *класса* $P_{4,3}$ *имеет вид*

$$\begin{aligned} &A_1 = a_1\tilde{x}^1 + a_2, \quad A_2 = c_1 \mathrm{ch}\varphi + c_2 \mathrm{sh}\varphi, \\ &A_3 = \mathrm{const}, \qquad\quad A_4 = -c_1 \mathrm{sh}\varphi - c_2 \mathrm{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}a_1(r)(\tilde{x}^1)^2 + a_2(r)\tilde{x}^1 + a_3(r)\right), \\ c_2 &= ra_1(r) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}a_1(r)(\tilde{x}^1)^2 + a_2(r)\tilde{x}^1 + a_3(r)\right), \end{aligned} \tag{21}$$

причем $a_1 = \mathrm{const}$, *а остальные функции имеют вид*

$$a_2 = -\frac{a_1}{\nu}\tilde{x}^3 + a_1\frac{\mu}{\nu}\ln r - a', \quad a' = \mathrm{const},$$

$$a_3 = \frac{a_1}{2\nu^2}(\tilde{x}^3)^2 - a_1\frac{\mu}{\nu^2}\ln r\,\tilde{x}^3 + \frac{a'}{\nu}\tilde{x}^3 + a''(r),$$

$$a'' = -\frac{a_1\mu}{\nu}\tilde{x}^3 \ln r + a_1\frac{\mu^2}{2\nu}(\ln r)^2 - \mu a' \ln r +$$

$$+\frac{a_1\mu}{\nu^2}\tilde{x}^3\ln r+\frac{1}{2}a_1r^2+b, \quad b=\mathrm{const}.$$

4.4. *Класс* $P_{4,4}$. $\mathcal{L}_{4,4}=L\{e_{24}+\lambda e_1,\, e_{12}-e_{14},\, e_2-e_4,\, e_{23}+e_{34}\}$. *Вид тензора* A_i *класса* $P_{4,4}$ *будет следующим:*

$$\begin{aligned}
&A_1=a_1\tilde{x}^1-\lambda a_1\ln r+a', \quad (a_1,a'=\mathrm{const})\\
&A_2=c_1\mathrm{ch}\varphi+c_2\mathrm{sh}\varphi,\\
&A_3=-a_1\tilde{x}^3+a, \quad a=\mathrm{const},\\
&A_4=-c_1\mathrm{sh}\varphi-c_2\mathrm{ch}\varphi,
\end{aligned}\tag{22}$$

где c_1 *и* c_2 *задаются формулами* (13), *а входящие в* (13) *функции имеют вид*

$$a_2=-a_1\lambda\ln r+a', \quad a'=\mathrm{const},$$

$$a_3=-a_1\frac{(\tilde{x}^3)^2}{2}+a\tilde{x}^3+a''(r),$$

$$a''=\frac{a_1\ln^2 r}{2}\lambda^2-\lambda a'\ln r+\frac{1}{2}a_1r^2+b, \quad b=\mathrm{const}.$$

5. Классы, соответствующие пятимерным подгруппам

5.1. *Класс* $P_{5,1}$. $\mathcal{L}_{5,1}=L\{e_{24}+\mu e_3,\, e_1,\, e_2,\, e_4,\, e_{12}-e_{14}\}$. Обозначим

$$\xi_1=e_{24}+\mu e_3, \quad \xi_2=e_1, \quad \xi_3=e_2, \quad \xi_4=e_4, \quad \xi_5=e_{12}-e_{14}.$$

Найдем потенциал, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{5,1}$. Так как эта алгебра содержит алгебру $\mathcal{L}_{4,1}$, а $P_{5,1}\subset P_{4,1}$, то компоненты 4-потенциала класса $P_{5,1}$ должны иметь вид (16). Для нахождения потенциала необходимо решить уравнение $L_{\xi_5}A_i=0$. Равенство нулю производных Ли от A_i по векторам ξ_2, ξ_3, ξ_4 дает равенство нулю производных по x^1, x^2, x^4. Теперь дополнительное уравнение дает

$$A_1=0, \quad A_2=-A_4, \quad A_3=\mathrm{const}.$$

Таким образом, *тензор* A_i *класса* $P_{5,1}$ *имеет вид*

$$\begin{aligned}
&A_1=0, \quad A_3=\mathrm{const},\\
&A_2=-A_4=c_1\exp\left(-\frac{x^3}{\mu}\right), \ (c_1=\mathrm{const}).
\end{aligned}\tag{23}$$

Вид представителя этого класса будет таким же, при условии, что $c_1 \neq 0$ (A_3 — любое, например $A_3 = 0$).

5.2. *Класс* $P_{5,2}$. $\mathcal{L}_{5,2} = L\{e_{24} + \mu e_3,\, e_{12} - e_{14},\, e_2 - e_4,\, e_{23} + e_{34},\, e_1\}$. Обозначим

$$\xi_1 = e_{24} + \lambda e_1, \quad \xi_2 = e_{12} - e_{14}, \quad \xi_3 = e_2 - e_4, \quad \xi_4 = e_{23} + e_{34}, \quad \xi_5 = e_1.$$

Найдем потенциал, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{5,2}$. Так как эта алгебра содержит алгебру $\mathcal{L}_{3,3}$ то компоненты 4-потенциала класса $P_{5,2}$ должны иметь вид (12), а функции должны иметь вид (13). Для нахождения потенциала необходимо решить уравнения $L_{\xi_4} A_i = 0$ и $L_{\xi_5} A_i = 0$. Последнее уравнение означает, что ни одна компонента тензора A_i не зависит от $\tilde{x}^1$, т. е. все коэффициенты при $\tilde{x}^1$ будут равны нулю: $a_1 = a_2 = 0$. Тогда $c_1 = -a_3/r = -c_2$, т. е. $A_2 = A_4$. Осталось решить уравнение $L_{\xi_4} A_i = 0$. После недолгих вычислений получаем *вид тензора* A_i *класса* $P_{5,2}$:

$$\begin{aligned} &A_1 = 0, \quad A_3 = \text{const}, \\ &A_2 = A_4 = \big(-A_3(\tilde{x}^3 - \mu \ln r) + a'\big)\,\frac{e^{-\varphi}}{r} \quad (a' = \text{const}). \end{aligned} \tag{24}$$

Представитель этого класса имеет такой же вид при условии, что $A_3 \neq 0$ (a' — любое, например $a' = 0$).

6. Класс, соответствующий шестимерной подгруппе

Класс P_6. $\mathcal{L}_6 = L\{e_{24},\, e_{12} - e_{14},\, e_2 - e_4,\, e_{23} + e_{34},\, e_1,\, e_3\}$. Обозначим

$$\xi_1 = e_{24},\, \xi_2 = e_{12} - e_{14},\, \xi_3 = e_2 - e_4,\, \xi_4 = e_{23} + e_{34},\, \xi_5 = e_1,\, \xi_6 = e_3.$$

Найдем потенциал, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_6$. Так как эта алгебра содержит алгебру $\mathcal{L}_{5,2}$ при $\mu = 0$, то компоненты 4-потенциала класса P_6 должны иметь вид (24). Для нахождения потенциала необходимо решить уравнение $L_{\xi_6} A_i = 0$, т. е.

$$\frac{\partial A_i}{\partial \tilde{x}^3} = 0.$$

Это уравнение означает, что ни одна из компонент тензора A_i не зависит от $\tilde{x}^3$. Таким образом, *компоненты тензора* A_i *класса* P_6 *будут иметь вид*

$$A_1 = A_3 = 0, \quad A_2 = A_4 = \frac{a'}{x^2 + x^4} \quad (a' = \mathrm{const}(. \tag{25}$$

Представителем этого класса можно выбрать (25) при условии, что $a' \neq 0$.

Список использованной литературы

1. *Белько И. В.* Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1971. № 1. С. 5–13.
2. *Воробьев А. И.* Групповая классификация пространств Максвелла, допускающих гиперболические винты // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 4 (2001). С. 35–42.
3. *Воробьев А. И.* Групповая классификация потенциальных структур, допускающих гиперболические винты. Иваново, 2003. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 31.07.03, № 1488-В2003.
4. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна – Максвелла и уравнения Лоренца. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2003. 180 с.