Математика и её приложения: ЖИМО. 2008. Выпуск 1 (5). С. 3 – 10.

УДК 517.9

В. М. Деундяк[1], **Г. Г. Смолкин**[2]

Предсимволы операторов обобщенной дискретной бисвертки

Ключевые слова: банахова алгебра, бисвертка, предсимвол, $C^\star$-алгебра.

В работе построены предсимволы банаховой алгебры операторов дискретной бисвертки с несуммируемыми ядрами и описаны ядра этих предсимволов.

We construct presymbols of the Banach algebra generated by the discrete biconvolution type operators with non-summable kernel; also we describe kernels of these presymbols.

1. Введение

Бисингулярные интегральные операторы с непрерывными коэффициентами и операторы свертки такого типа впервые исследовались в работах Р. Дугласа, Р. Хоу [10] и В. С. Пилиди [7], [8]. В [2], [4] исследованы сингулярные и бисингулярные операторы с произвольными ограниченными коэффициентами: получено каноническое представление операторов, построен аналог символического исчисления, найдены условия классической и обобщенной фредгольмовости. Напомним, что операторы дискретной свертки с суммируемыми ядрами имеют непрерывный на окружности символ [3]. В работе [5] получены аналоги результатов [2] для банаховой алгебры дискретных сверток с общими несуммируемыми ядрами, символы которых могут быть произвольными существенно ограниченными функциями.

В настоящей работе исследуется банахова алгебра дискретных бисверток с несуммируемыми ядрами: получены канонические представления операторов, построены предсимволы и описаны их ядра.

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbb{T}$ — единичная окружность комплексной плоскости; $L_2(\mathbb{T})$ и $L_2(\mathbb{Z})$ — гильбертовы пространства суммируемых с квадратом функций на $\mathbb{T}$ и $\mathbb{Z}$ соответственно; $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{Z})$ — преобразование Фурье.

Через $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z}))$ обозначим банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в $L_2(\mathbb{Z})$. Пусть P^+ $(\in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z})))$ — опе-

[1]Южный федеральный университет; E-mail: vlade@math.rsu.ru.
[2]Южный федеральный университет; E-mail: smolkin4@rambler.ru.

ратор умножения на характеристическую функцию множества $\{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\}$, $P^- = I - P^+$; $L_\infty(\mathbb{T})$ — банахова алгебра измеримых существенно ограниченных функций. Известно (см., например, [9]), что для $\varphi \in L_\infty(\mathbb{T})$ корректно определен и ограничен в $L_2(\mathbb{Z})$ оператор одномерной дискретной свертки $C_{\mathcal{F}(\varphi)}$ с ядром $\mathcal{F}(\varphi)$.

Пусть Ω — замкнутая подалгебра $L_\infty(\mathbb{T})$; $\Omega^2 = \Omega \oplus \Omega$; $\mathcal{V}(\Omega)$ — банахова алгебра, порожденная операторами $C_{\mathcal{F}(\varphi)}$, где $\varphi \in \Omega$; $\nu_\Omega : \mathcal{V}(\Omega) \to \Omega$ — естественный изоморфизм; $\mathcal{A}(\Omega)$ — банахова алгебра, порожденная оператором P^+ и алгеброй $\mathcal{V}(\Omega)$; $\mathcal{C}(\mathcal{A}(\Omega))$ — коммутаторский идеал алгебры $\mathcal{A}(\Omega)$, то есть наименьший замкнутый двусторонний идеал $\mathcal{A}(\Omega)$, содержащий все коммутаторы вида $AB - BA$, где $A, B \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Теорема 1. [*5*]. *Любой оператор F из $\mathcal{A}(\Omega)$ единственным образом представим в виде*

$$F = C_{\mathcal{F}(\varphi_+)}P^+ + C_{\mathcal{F}(\varphi_-)}P^- + K, \tag{1}$$

где $\varphi_\pm \in \Omega$ и $K \in \mathcal{C}(\mathcal{A}(\Omega))$. Сопоставление $F \mapsto (\varphi_+, \varphi_-)$ определяет предсимвол — эпиморфизм банаховых алгебр

$$\mu_\Omega : \mathcal{A}(\Omega) \longrightarrow \Omega^2,$$

ядро которого $\ker(\mu_\Omega)$ *совпадает с идеалом* $\mathcal{C}(\mathcal{A}(\Omega))$. ■

Для описания идеала $\mathcal{C}(\mathcal{A}(\Omega))$ необходимо напомнить ряд фактов (см., например, [1]). Пусть $H_\infty(\mathbb{T})(\subset L_\infty(\mathbb{T}))$ — пространство Харди функций на $\mathbb{T}$, допускающих аналитическое и ограниченное продолжение внутрь $\mathbb{T}$; $\mathcal{B} = \{b \in H_\infty(\mathbb{T}) : |b(t)| = 1$ для почти всех $t \in \mathbb{T}\}$ — множество внутренних функций. Алгеброй Дугласа называется произвольная, содержащая $H_\infty(\mathbb{T})$, замкнутая подалгебра алгебры $L_\infty(\mathbb{T})$. В силу теоремы Чанг – Маршалла любая алгебра Дугласа $\mathcal{A}$ порождена множеством $H_\infty(\mathbb{T}) \cup \bar{\mathcal{B}}_\mathcal{A}$, где $\mathcal{B}_\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap G(\mathcal{A})$, $\bar{\mathcal{B}}_\mathcal{A} = \{\bar{b} : b \in \mathcal{B}_\mathcal{A}\}$. Алгеброй Сарасона алгебры Дугласа $\mathcal{A}$ называется алгебра $Q_\mathcal{A} = \mathcal{A} \cap \bar{\mathcal{A}}$.

Следуя [2], для произвольной подалгебры Ω алгебры $L_\infty(\mathbb{T})$ через $D(\Omega)$ обозначим пересечение всех таких алгебр Дугласа $\mathcal{A}$, для которых $\Omega \subset Q_\mathcal{A}$, и отметим, что $D(\Omega)$ — алгебра Дугласа и $D(Q_\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ для любой алгебры Дугласа $\mathcal{A}$.

Теорема 2. [*5*]. *Для F из $\mathcal{A}(\Omega)$ следующие условия равносильны:*
(*a*) $F \in \mathcal{C}(\mathcal{A}(\Omega))$;
(*b*) $\inf\limits_{b \in \mathcal{B}_{D(\Omega)}} \|(P^- C_{\mathcal{F}(b)})F\| = 0$, $\inf\limits_{b \in \mathcal{B}_{D(\Omega)}} \|(P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{b})})F\| = 0$;
(*c*) $\inf\limits_{b \in \mathcal{B}_{D(\Omega)}} \|F(C_{\mathcal{F}(b)}P^+)\| = 0$, $\inf\limits_{b \in \mathcal{B}_{D(\Omega)}} \|F(C_{\mathcal{F}(\bar{b})}P^-)\| = 0$. ■

3. Предсимволы и канонические представления

Пусть Ω_1, Ω_2 — замкнутые подалгебры $L_\infty(\mathbb{T})$. Для $j \in \{1, 2\}$ введем обозначения: $\mathcal{V}_j = \mathcal{V}(\Omega_j)$, $\nu_j = \nu_{\Omega_j}$, $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}(\Omega_j)$, $\mu_j = \mu_{\Omega_j}$. Рассмотрим банахову алгебру операторов дискретной бисвертки — топологическое тензорное произведение $\mathcal{A}_{1,2} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ (см. [6], с. 229). Для построения предсимволического исчисления воспользуемся схемой из [10], [8], [4].

Пусть

$$\nu_{(1)} = \nu_1 \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}_2} : \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \to \Omega_1 \otimes \mathcal{A}_2,$$

$$\nu_{(2)} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}_1} \otimes \nu_2 : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{V}_2 \to \mathcal{A}_2 \otimes \Omega_2,$$

$$\nu_{1,2} = \nu_1 \otimes \nu_2 : \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 \to \Omega_1 \otimes \Omega_2.$$

Рассмотрим

$$\mathcal{S}_1 = \Omega_1^2 \otimes \mathcal{A}_2, \quad \mathcal{S}_2 = \mathcal{A}_1 \otimes \Omega_2^2, \quad \mathcal{S}_0 = \Omega_1^2 \otimes \Omega_2^2.$$

Определим два частичных предсимвола — эпиморфизмы

$$\mu_{(1)} = \mu_{\Omega_1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}_2} : \mathcal{A}_{1,2} \to \mathcal{S}_1,$$

$$\mu_{(2)} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}_1} \otimes \mu_{\Omega_2} : \mathcal{A}_{1,2} \to \mathcal{S}_2$$

и слабый предсимвол — эпиморфизм

$$\mu_{(0)} = \mu_{\Omega_1} \otimes \mu_{\Omega_2} : \mathcal{A}_{1,2} \to \mathcal{S}_0.$$

Пара эпиморфизмов $\mu = (\mathrm{id}_{\Omega_1^2} \otimes \mu_{\Omega_2}, \mu_{\Omega_1} \otimes \mathrm{id}_{\Omega_2^2})$ определяет расслоенную сумму:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \oplus_\mu \mathcal{S}_2 = \{(b_1, b_2) : b_j \in \mathcal{S}_j, (\mathrm{id}_{\Omega_1^2} \otimes \mu_{\Omega_2})(b_1) = (\mu_{\Omega_1} \otimes \mathrm{id}_{\Omega_2^2})(b_2)\}.$$

Формулой $\mu_{(*)}(F) = (\mu_{(1)}(F), \mu_{(2)}(F))$, где $F \in \mathcal{A}_{1,2}$, определим полный предсимвол $\mu_{(*)} : \mathcal{A}_{1,2} \to \mathcal{S}$. Пусть

$$\begin{gathered} \mathcal{J}_{(1)} = \mathcal{C}(\mathcal{A}_1) \otimes \mathcal{A}_2, \quad \mathcal{J}_{(2)} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{C}(\mathcal{A}_2), \\ \mathcal{J}_{(0)} = \mathcal{J}_{(1)} + \mathcal{J}_{(2)} = \mathcal{C}(\mathcal{A}_1) \otimes \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{C}(\mathcal{A}_2), \\ \mathcal{J}_{(*)} = \mathcal{J}_{(1)} \cap \mathcal{J}_{(2)} = \mathcal{C}(\mathcal{A}_1) \otimes \mathcal{C}(\mathcal{A}_2). \end{gathered} \tag{2}$$

Непосредственно проверяется, что

$$\ker(\mu_{(j)}) = \mathcal{J}_{(j)}, \ \ker(\mu_{(0)}) = \mathcal{C}(\mathcal{A}_{1,2}) = \mathcal{J}_{(0)}, \ \ker(\mu_{(*)}) = \mathcal{J}_{(*)}. \tag{3}$$

Теорема 3. *Пусть $F \in \mathcal{A}_{1,2}$. Тогда:*

1) Оператор F однозначно представим в виде суммы

$$F = V_{1,+}(P^+ \otimes I) + V_{1,-}(P^- \otimes I) + K_1, \tag{4}$$

где $V_{1,\pm} \in \mathcal{V}(\Omega_1) \otimes \mathcal{A}_2$, $K_1 \in \mathcal{J}_{(1)}$, при этом $\mu_{(1)}(F) = (\nu_{(1)}(V_{1,+}), \nu_{(1)}(V_{1,-}))$.

2) Оператор F однозначно представим в виде суммы

$$F = V_{2,+}(I \otimes P^+) + V_{2,-}(I \otimes P^-) + K_2, \tag{5}$$

где $V_{2,\pm} \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{V}(\Omega_2)$, $K_2 \in \mathcal{J}_{(2)}$, при этом $\mu_{(2)}(F) = (\nu_{(2)}(V_{2,+}), \nu_{(2)}(V_{2,-}))$.

3) Оператор F однозначно представим в виде суммы

$$F = V_{+,+}(P^+ \otimes P^+) + V_{+,-}(P^+ \otimes P^-) + \\ + V_{-,+}(P^- \otimes P^+) + V_{-,-}(P^- \otimes P^-) + K_0, \quad (6)$$

где $V_{\pm,\pm} \in \mathcal{V}(\Omega_1) \otimes \mathcal{V}(\Omega_2)$, $K_0 \in \mathcal{J}_{(0)}$, при этом

$$\mu_{(0)}(F) = ((\nu_{1,2}(V_{+,+}), \nu_{1,2}(V_{+,-})), (\nu_{1,2}(V_{-,+}), \nu_{1,2}(V_{-,-}))).$$

Доказательство. Докажем утверждение 1). Как нетрудно увидеть, единственность представления (4) вытекает из того, что $\mu_{(1)}$ — эпиморфизм $C^\star$-алгебр с ядром $\mathcal{J}_{(1)}$. Для доказательства существования представления (4) рассмотрим оператор $D = \sum(A_j \otimes B_j)$ из алгебраического тензорного произведения $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. К операторам A_j применим формулу (1):

$$A_j = C_{\mathcal{F}(\varphi_+^j)} P^+ + C_{\mathcal{F}(\varphi_-^j)} P^- + K^j,$$

где $\varphi_\pm^j \in \Omega_1$ и $K^j \in \mathcal{C}(\mathcal{A}(\Omega_1))$. Тогда

$$D = \sum(I \otimes B_j)(A_j \otimes I) = \sum(I \otimes B_j)(C_{\mathcal{F}(\varphi_+^j)} P^+ \otimes I + C_{\mathcal{F}(\varphi_-^j)} P^- \otimes I + K^j \otimes I) =$$

$$= \sum(C_{\mathcal{F}(\varphi_+^j)} \otimes B_j)(P^+ \otimes I) + \sum(C_{\mathcal{F}(\varphi_-^j)} \otimes B_j)(P^- \otimes I) + \sum(K^j \otimes B_j);$$

таким образом, оператор D представлен в виде (4), причем выполняется равенство $\mu_{(1)}(D) = (\sum(C_{\mathcal{F}(\varphi_+^j)} \otimes B_j), \sum(C_{\mathcal{F}(\varphi_-^j)} \otimes B_j))$.

Теперь для произвольного оператора $F \in \mathcal{A}_{1,2}$ рассмотрим сходящуюся к F последовательность операторов F^n из алгебраического тензорного произведения $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, для которой

$$F^n = V_{1,+,n}(P^+ \otimes I) + V_{1,-,n}(P^- \otimes I) + K_{1,n},$$

где $V_{1,\pm,n} \in \mathcal{V}(\Omega_1) \otimes \mathcal{A}_2$, $K_{1,n} \in \mathcal{J}_{(1)}$ и $\mu_{(1)}(F^n) = (\nu_{(1)}(V_{1,+,n}), \nu_{(1)}(V_{1,-,n}))$.

Из фундаментальности последовательности $\{F^n\}_n$ в силу непрерывности $\mu_{(1)}$ вытекает фундаментальность последовательностей $\{V_{1,\pm,n}\}_n$, пределы которых обозначим $V_{1,+}$ и $V_{1,-}$ соответственно. Пусть

$$K_1 = F - V_{1,+}(P^+ \otimes I) + V_{1,-}(P^- \otimes I).$$

Тогда

$$K_1 = \lim_{n\to\infty}(F^n - V_{1,+,n}(P^+ \otimes I) + V_{1,-,n}(P^- \otimes I)) = \lim_{n\to\infty} K_{1,n} \in \mathcal{J}_{(1)}.$$

Отсюда вытекает, что оператор F представим в виде (4) и выполнено равенство $\mu_{(1)}(F) = (\nu_{(1)}(V_{1,+}), \nu_{(1)}(V_{1,-}))$. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Утверждение 2) доказывается аналогично.

Докажем последнее утверждение теоремы. В силу 1) оператор $F \in \mathcal{A}_{1,2}$ однозначно представим в виде (4):

$$F = V_{1,+}(P^+ \otimes I) + V_{1,-}(P^- \otimes I) + K_1,$$

где $V_{1,\pm} \in \mathcal{V}(\Omega_1) \otimes \mathcal{A}_2$, $K_1 \in \mathcal{J}_{(1)}$. В силу же 2) по формуле (5)

$$V_{1,\pm} = V_{\pm,+}(I \otimes P^+) + V_{\pm,-}(I \otimes P^-) + T_{1,\pm},$$

где $V_{\pm,\pm} \in (\mathcal{V}(\Omega_1) \otimes \mathcal{A}_2) \cap (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{V}(\Omega_2)) = \Omega_1 \otimes \Omega_2$, $T_{1,\pm} \in \mathcal{J}_{(2)}$. Тогда

$$F = (V_{+,+}(I \otimes P^+) + V_{+,-}(I \otimes P^-) + T_{1,+})(P^+ \otimes I) +$$

$$+(V_{-,+}(I \otimes P^+) + V_{-,-}(I \otimes P^-) + T_{1,-})(P^- \otimes I) + K_1 =$$

$$= V_{+,+}(P^+ \otimes P^+) + V_{+,-}(P^+ \otimes P^-) + V_{-,+}(P^- \otimes P^+) + V_{-,-}(P^- \otimes P^-) + T,$$

где

$$T = T_{1,+}(P^+ \otimes I) + T_{1,-}(P^- \otimes I) + K_1 \in \mathcal{J}_{(1)} + \mathcal{J}_{(2)} = \mathcal{J}_{(0)}.$$

Таким образом, существование представления (6) доказано. Его единственность вытекает из построений. ■

4. Ядра предсимволов

Пусть $C(\mathbb{T})$ — алгебра непрерывных на $\mathbb{T}$ функций. Известно (см., например, [1], с. 373), что $C(\mathbb{T}) + H_\infty(\mathbb{T})$ — алгебра Дугласа. Рассмотрим $C^\star$-алгебру Сарасона квазинепрерывных функций [11]

$$\mathrm{QC}(\mathbb{T}) = (C(\mathbb{T}) + H_\infty(\mathbb{T})) \cap \overline{(C(\mathbb{T}) + H_\infty(\mathbb{T}))}.$$

В [5] доказано, что если алгебра Ω удовлетворяет условию

$$C(\mathbb{T}) \subset \Omega \subset \mathrm{QC}(\mathbb{T}),$$

то $\mathcal{C}(\mathcal{A}(\Omega))$ совпадает с идеалом компактных операторов $\mathcal{K}(L_2(\mathbb{Z}))$ в алгебре $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z}))$. Отсюда и из (2) вытекает, что если $C(\mathbb{T}) \subset \Omega_j \subset \mathrm{QC}(\mathbb{T})$, где $j \in \{1, 2\}$, то

$$\mathcal{J}_{(*)} = \mathcal{K}(L_2(\mathbb{Z})) \otimes \mathcal{K}(L_2(\mathbb{Z})) = \mathcal{K}(L_2(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z})).$$

Рассмотрим теперь случай произвольной алгебры $\Omega \subset L_\infty(\mathbb{T})$. Для функции $b \in \mathcal{B}$ введем операторы

$$Q^{(+1)}_{b;1} = P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{b})} \otimes I,\ Q^{(-1)}_{b;1} = P^- C_{\mathcal{F}(b)} \otimes I,$$

$$Q^{(+1)}_{b;2} = I \otimes P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{b})},\ Q^{(-1)}_{b;2} = I \otimes P^- C_{\mathcal{F}(b)}.$$

Для оператора F из $\mathcal{A}_{1,2}$ определим числа:

1) $\forall j \in \{1,2\}\ \forall k \in \{\pm 1\} \quad q_{j,k}(F) = \inf\limits_{b\in\mathcal{B}_{(\Omega_j)}} \|Q^{(k)}_{b;j}F\|$,

2) $\forall j \in \{1,2\} \quad q_j(F) = \max\limits_{k\in\{\pm1\}}\{q_{j,k}(F)\}$,

3) $q_*(F) = \max\limits_{j\in\{1,2\}}\{q_j(F)\}$,

4) $q_0(F) = \max\limits_{(k,l)\in\{(\pm1,\pm1)\}} \inf\limits_{b\in\mathcal{B}_{(\Omega_1)}} \inf\limits_{c\in\mathcal{B}_{(\Omega_2)}} \|Q^{(k)}_{b;1}Q^{(l)}_{c;2}F\|$.

В следующей теореме, где распространяются результаты теоремы 2 на случай бисверток, описаны ядра предсимволов $\mu_{(*)}$, $\mu_{(1)}$, $\mu_{(2)}$, $\mu_{(0)}$ (см. (3)).

Теорема 4. *Пусть* $F \in \mathcal{A}_{1,2}$. *Тогда:*
1) $F \in \mathcal{J}_{(*)} \Leftrightarrow q_*(F) = 0$,
2) $F \in \mathcal{J}_{(j)} \Leftrightarrow q_j(F) = 0$, *где* $j \in \{0;1;2\}$.

Для доказательства теоремы 4 понадобится несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть* $j \in \{1,2\}$, $k \in \{\pm1\}$, $F \in \mathcal{J}_{(j)}$. *Тогда* $q_{j,k}(F) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай $j = 1$, $k = 1$. Если $F = A \otimes B$, где $A \in \mathcal{C}(\mathcal{A}_1)$, $B \in \mathcal{A}_2$, то

$$q_{1,1}(F) = \inf_{b\in\mathcal{B}_{(\Omega_1)}} \|P^+C_{\mathcal{F}(\bar b)}A\otimes B\| \le \|B\| \inf_{b\in\mathcal{B}_{(\Omega_1)}} \|P^+C_{\mathcal{F}(\bar b)}A\| = 0.$$

Если оператор $F = \sum(A_i \otimes B_i)$ принадлежит алгебраическому тензорному произведению $\mathcal{C}(\mathcal{A}_1)$ и $\mathcal{A}_2$, то для произвольной функции $b \in \mathcal{B}_{(\Omega_1)}$

$$\|Q^{(1)}_{b;1}\sum(A_i\otimes B_i)\| \le \sum \|P^+C_{\mathcal{F}(\bar b)}A_i\otimes B_i\| \le \sum \|B_i\|\|P^+C_{\mathcal{F}(\bar b)}A_i\|.$$

Используя теорему 1 и полугрупповые свойства $\mathcal{B}_{(\Omega_1)}$, отсюда получаем:

$$q_{1,1}(F) = \inf_{b\in\mathcal{B}_{(\Omega_1)}} \|Q^{(1)}_{b;1}\sum(A_i\otimes B_i)\| \le \|\sum(B_i)\| \inf_{b\in\mathcal{B}_{(\Omega_1)}} \|P^+C_{\mathcal{F}(\bar b)}A_i\| = 0.$$

Для произвольного оператора F из идеала $\mathcal{C}(\mathcal{A}_1)\otimes\mathcal{A}_2$ равенство $q_{1,1}(F) = 0$ теперь нетрудно получить с помощью аппроксимации F конечными суммами вида $\sum(A_i \otimes B_i)$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. ■

Следствием леммы 1 является

Лемма 2. *Пусть* $j \in \{1,2\}$, $F \in \mathcal{J}_{(j)}$. *Тогда* $q_j(F) = 0$. ■

Теперь докажем утверждение, обратное к лемме 2.

Лемма 3. *Пусть* $j \in \{1,2\}$, $F \in \mathcal{A}_{1,2}$, $q_j(F) = 0$. *Тогда* $F \in \mathcal{J}_{(j)}$.

Доказательство. Рассмотрим только случай $j = 1$, так как случай $j = 2$ рассматривается аналогично. В силу утверждения 1) теоремы 3 оператор F однозначно представим в виде суммы

$$F = V_{1,+}(P^+\otimes I) + V_{1,-}(P^-\otimes I) + K_1,$$

где $V_{1,\pm} \in \mathcal{V}(\Omega_1) \otimes \mathcal{A}_2$, $K_1 \in \mathcal{J}_{(1)}$. Для доказательства леммы достаточно показать, что $V_{1,\pm} = 0$. Пусть $b \in \mathcal{B}_{(\Omega_1)}$. Рассмотрим оператор

$$Q^{(1)}_{b;1} F = (P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{b})} \otimes I) F \in \mathcal{A}(L_\infty(\mathbb{T})) \otimes \mathcal{A}_2.$$

В силу теоремы 3 он однозначно представим в виде суммы

$$(P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{b})} \otimes I) F = (C_{\mathcal{F}(\bar{b})} \otimes I) V_{1,+} (P^+ \otimes I) + K_2,$$

где $K_2 \in \mathcal{J}'_{(1)} = \mathcal{C}(\mathcal{A}(L_\infty(\mathbb{T})))$. Следовательно,

$$\|(P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{b})} \otimes I) F\| \geq |||(P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{b})} \otimes I) F|||_{\mathcal{J}'_{(1)}} \geq$$
$$\geq \|\mu_{(1)}\|^{-1} \|(C_{\mathcal{F}(\bar{b})} \otimes I) V_{1,+}\|,$$

где $\mu_{(1)}$ — первый частичный предсимвол алгебры $\mathcal{A}(L_\infty(\mathbb{T})) \otimes \mathcal{A}_2$, $||| - |||_{\mathcal{J}'_{(1)}}$ — соответствующая идеалу $\mathcal{J}'_{(1)}$ фактор-норма. Отметим, что

$$\|(C_{\mathcal{F}(\bar{b})} \otimes I) V_{1,+}\| = \|V_{1,+}\|$$

ввиду унимодулярности $b \in \mathcal{B}_{(\Omega_1)}$, поэтому

$$\|Q^{(1)}_{b;1} F\| = \|(P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{b})} \otimes I) F\| \geq \|\nu_1\|^{-1} \|V_{1,+}\|.$$

Из равенства $q_j(F) = 0$ вытекает теперь, что $V_{1,+} = 0$. Аналогично проверяется равенство $V_{1,-} = 0$. ■

В силу того, что $\mathcal{J}_{(*)} = \mathcal{J}_{(1)} \cap \mathcal{J}_{(2)}$, из лемм 2 и 3 вытекает

Лемма 4. *Пусть* $F \in \mathcal{A}_{1,2}$. *Тогда*

$$F \in \mathcal{J}_{(*)} \Leftrightarrow q_*(F) = 0. \quad ■$$

Перейдем к изучению идеала $\mathcal{J}_{(0)}$.

Лемма 5. *Если* $F \in \mathcal{J}_{(0)}$, *то* $q_0(F) = 0$.

Доказательство. Оператор F можно записать в виде: $F = F^{(1)} + F^{(2)}$, где $F^{(j)} \in \mathcal{J}_{(i)}$, $j \in \{1, 2\}$. Чтобы вычислить

$$q_0(F) = \max_{(k,l) \in \{(\pm 1, \pm 1)\}} \inf_{b \in \mathcal{B}_{(\Omega_1)}} \inf_{c \in \mathcal{B}_{(\Omega_2)}} \|Q^{(k)}_{b;1} Q^{(l)}_{c;2} F\|,$$

рассмотрим сначала случай $k = 1$, $l = 1$. Для произвольных функций $b \in \mathcal{B}_{(\Omega_1)}$, $c \in \mathcal{B}_{(\Omega_2)}$ выполняется равенство:

$$Q^{(1)}_{b;1} Q^{(1)}_{c;1} F = (P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{b})} \otimes P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{c})}) F^{(1)} + (P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{b})} \otimes P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{c})}) F^{(2)}.$$

Тогда

$$\|Q^{(1)}_{b;1} Q^{(1)}_{c;1} F\| \leq \|(P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{b})} \otimes P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{c})}) F^{(1)}\| + \|(P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{b})} \otimes P^+ C_{\mathcal{F}(\bar{c})}) F^{(2)}\|,$$

и в силу леммы 2 для фиксированных $b_0 \in \mathcal{B}_{(\Omega_1)}$, $c_0 \in \mathcal{B}_{(\Omega_2)}$ получаем

$$\inf_{b\in\mathcal{B}_{(\Omega_1)},c\in\mathcal{B}_{(\Omega_2)}} \|Q^{(1)}_{b;1}Q^{(1)}_{c;1}F\| \le \inf_{b\in\mathcal{B}_{(\Omega_1)}} \|(P^+C_{\mathcal{F}(\bar{b})}\otimes P^+C_{\mathcal{F}(\bar{c}_0)})F^{(1)}\|+$$

$$+\inf_{c\in\mathcal{B}_{(\Omega_2)}} \|(P^+C_{\mathcal{F}(\bar{b}_0)}\otimes P^+C_{\mathcal{F}(\bar{c})})F^{(2)}\| = 0.$$

Аналогично проверяется, что и для остальных пар $(k,l)\in\{(\pm1,\pm1)\}$

$$\inf_{b\in\mathcal{B}_{(\Omega_1)}}\inf_{c\in\mathcal{B}_{(\Omega_2)}} \|Q^{(k)}_{b;1}Q^{(l)}_{c;2}F\| = 0.$$

Таким образом,

$$q_0(F) = \max_{(k,l)\in\{(\pm1,\pm1)\}}\inf_{b\in\mathcal{B}_{(\Omega_1)}}\inf_{c\in\mathcal{B}_{(\Omega_2)}} \|Q^{(k)}_{b;1}Q^{(l)}_{c;2}F\| = 0.$$

■

Лемма 6. *Если* $F\in\mathcal{A}_{1,2}$ *и* $q_{(0)}(F)=0$, *то* $F\in\mathcal{J}_{(0)}$.

Доказательство. Это утверждение, обратное к лемме 5, доказывается по схеме доказательства леммы 3. ■

Теорема 4 является прямым следствием лемм 2 – 6.

Список использованной литературы

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.
2. *Георгиев К. А., Деундяк В. М.* Идеалы Никольского и их применение к исследованию алгебр сингулярных интегральных операторов // Алгебра и анализ. – 1999. – Т. 11. – № 2. – С. 88–108.
3. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. – М.: Наука, 1975. – 352 с.
4. *Деундяк В. М.* Применение идеалов Никольского к исследованию разрешимости бисингулярных интегральных операторов // Известия вузов. Математика. – 2004. – № 9 (508). – С. 85–87.
5. *Деундяк В. М., Смолкин Г. Г.* Операторы дискретной свертки с разрывными символами // Известия вузов. Математика. – 2007. – № 8 (543). – С. 74–76.
6. *Мерфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. – М.: Факториал, 1997. – 336 с.
7. *Пилиди В. С.* О многомерных бисингулярных операторах // ДАН СССР. – 1971. – Т. 201 – № 4. – С. 787–789.
8. *Пилиди В. С.* О бисингулярном уравнении в пространстве L_p // Матем. исслед. – Кишинев, 1972. – Т. 7. – Вып. 3. – С. 167–175.
9. *Стечкин С. Б.* О билинейных формах // ДАН СССР. – 1950. – Т. 71. – № 2. – С. 237–240.
10. *Douglas R. G., Howe R.* On the C^*-algebra of Toeplitz operators on the quarter-plane. // Trans. of AMS. – 1972. – V. 158. – № 1. – P. 203–218.
11. *Sarason D. E.* Toeplitz Operators with Piecewise Quasicontinuous Symbols // Indiana University Mathematics Journal. – 1977. – V. 26. – № 59. – P. 817–838.

Поступила в редакцию 17.11.2008.