Математика и её приложения: ЖИМО. 2008. Выпуск 1 (5). С. 21 – 42.

УДК 514.8 + 514.74

М. А. Паринов[1],

Пространства Максвелла с нулевым током, допускающие двумерные подгруппы группы Пуанкаре

Ключевые слова: группа Пуанкаре, уравнения Максвелла, пространство Максвелла, электромагнитная волна.

Дано описание классов пространств Максвелла с нулевым током (в частности, электромагнитных волн), допускающих двумерные подгруппы группы Пуанкаре. Найдены представители всех этих классов.

We describe classes $W_{2,l}$ of Maxwell spaces without current that admit two-dimensional subgroups of the Poincaré group. We construct representatives of these classes.

Введение. Постановка задачи. Пространство Максвелла есть тройка (M, g, F), где M — гладкое 4-мерное многообразие, $g = g_{ij}\, dx^i dx^j$ — псевдоевклидова метрика лоренцевой сигнатуры $(---+)$, а $F = \frac{1}{2} F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$ — замкнутая дифференциальная 2-форма на M. Без ограничения общности под M можно понимать область в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$. Любому электромагнитному полю соответствует свое пространство Максвелла.

Среди всех пространств Максвелла особый интерес представляют такие, для которых группа $G_S = G_g \cap G_F$ преобразований, сохраняющих g и F, нетривиальна. Например, уравнения Лоренца для таких (M, g, F) допускают первые интегралы [8]. В работах [10, 11, 12] описана классификация пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре с использованием классификации подгрупп группы Пуанкаре [1].

На основе групповой классификации пространств Максвелла в работах [2]–[7] описаны классы электромагнитных волн, допускающих подгруппы группы Пуанкаре. При этом электромагнитная волна трактуется в соответствии с [9] как пространство Максвелла, задаваемое непостоянным по времени кососимметричным тензором F_{ij} $(\partial F_{ij}/\partial x^4 \neq 0)$ на пространстве Минковского, который удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\partial_{[i} F_{jk]} = 0, \tag{1a}$$

$$\nabla_k F^{ik} = 0. \tag{1b}$$

Однако, условие $\partial F_{ij}/\partial x^4 \neq 0$ не является ковариантным, и поэтому с теоретико-групповой точки зрения представляется неестественным. Для

[1] Ивановский государственный университет; E-mail: mparinov@ivanovo.ac.ru.

завершения групповой классификации пространств Максвелла с нулевым током необходимо добавить классы, для которых выполняется уравнение (1b). Следует сказать, что описание классов $W_{k,l}$ электромагнитных волн в работах [2]–[7] страдает тем недостатком, что не для каждой группы $G_{k,l}$ — подгруппы группы Пуанкаре из списка в [1] — установлено существование таких электромагнитных волн, что $G_S = G_{k,l}$. В настоящей работе мы найдем представителей классов $W_{2,l}$ пространств Максвелла с нулевым током (ПМНТ), допускающих двумерные подгруппы группы Пуанкаре[2]. Для этого используем метод, предложенный в [13], и классификацию потенциальных структур на пространстве Минковского по подгруппам группы Пуанкаре [14].

Все используемые в статье обозначения соответствуют [10, 11]. Через $\{x^i\}$ обозначены галилеевы координаты, в которых метрический тензор имеет диагональный вид $g_{ij} = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,1)$. Используется следующий стандартный базис алгебры Ли группы Пуанкаре:

$$\begin{aligned}
&e_1 = (1,0,0,0),\ e_2 = (0,1,0,0),\ e_3 = (0,0,1,0),\ e_4 = (0,0,0,1),\\
&e_{12} = (-x^2, x^1, 0, 0),\quad e_{13} = (x^3, 0, -x^1, 0),\quad e_{23} = (0, -x^3, x^2, 0),\\
&e_{14} = (x^4, 0, 0, x^1),\quad e_{24} = (0, x^4, 0, x^2),\quad e_{34} = (0, 0, x^4, x^3).
\end{aligned}$$

Подгруппы группы Пуанкаре из списка в [1] и соответствующие алгебры Ли векторных полей обозначены $G_{k,l}$ и $\mathcal{L}_{k,l}$. Выражение $L\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ всюду означает линейную оболочку векторов $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Компоненты всех тензоров отнесены к галилеевым координатам.

Класс $W_{k,l}$ ПМНТ, допускающих группу $G_{k,l}$, состоит из кососимметричных тензорных полей F_{ij}, удовлетворяющих уравнениям (1) и условиям инвариантности F_{ij} относительно группы $G_{k,l}$:

$$L_{\xi_\alpha} F_{ij} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, k = \dim \mathcal{L}_{k,l}) \tag{2}$$

(L_ξ — производная Ли, $\mathcal{L}_{k,l} = L\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$). Ясно, что класс $W_{k,l}$ есть подкласс класса $C_{k,l}$ пространств Максвелла, задаваемых тензорами F_{ij}, удовлетворяющими уравнению (1b). Учитывая связь ковариантных и контравариантных компонент тензора F_{ij} в галилеевых координатах, уравнение (1b) можно записать в виде следующей системы

$$\begin{aligned}
&\partial_1 F_{12} - \partial_3 F_{23} + \partial_4 F_{24} = 0,\quad \partial_1 F_{13} + \partial_2 F_{23} + \partial_4 F_{34} = 0,\\
&\partial_1 F_{14} + \partial_2 F_{24} + \partial_3 F_{34} = 0,\quad \partial_2 F_{12} + \partial_3 F_{13} - \partial_4 F_{14} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Решая систему уравнений (2) и (1a), мы получаем класс пространств Максвелла $C_{k,l}$, соответствующий группе $G_{k,l}$; для задания класса $W_{k,l}$ к

[2]Представители классов ПМНТ, допускающих 1-мерные подгруппы группы Пуанкаре, описаны автором в работе, направленной в журнал “Математический сборник”. Для статических ПМНТ это сделано в работе [15].

этой системе надо добавить (3). Поэтому $W_{k,l} \subset C_{k,l}$. Так получаются классификации пространств Максвелла и электромагнитных волн.

Заметим, что группа G_S для конкретного представителя класса $C_{k,l}$ или $W_{k,l}$ может быть шире, чем $G_{k,l}$. Получение примеров ПМНТ, для которых $G_S = G_{k,l}$, либо доказательство несуществования их завершит групповую классификацию ПМНТ.

Доказательства всех предложений, касающихся представителей классов, получаются путем решения уравнения

$$L_\xi F_{ij} \equiv \xi^k \partial_k F_{ij} + F_{kj}\partial_i \xi^k + F_{ik}\partial_j \xi^k = 0 \tag{4}$$

при заданном F_{ij} относительно $\xi \in \mathcal{L}_g$[3], т. е. для векторных полей вида

$$\xi^i = a^i_{\cdot j} x^j + b^i, \text{ где } a^i_{\cdot j} = g^{ik} a_{kj}, \quad a_{kj} = -a_{jk}, \quad (a_{kj},\, b^i \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

Уравнение (4) для полей (5) имеет вид

$$(a^k_{\cdot l} x^l + b^k)\partial_k F_{ij} + F_{kj} a^k_{\cdot i} + F_{ik} a^k_{\cdot j} = 0, \tag{6}$$

неизвестными в нем являются матрицы $a^k_{\cdot l}$ и b^k.

1. Здесь опишем классы пространств Максвелла с нулевым током, инвариантных относительно двумерных групп трансляций.

1.1. *Класс* $W_{2,1a}$. $\mathcal{L}_{2,1a} = L\{e_1,\, e_2\}$. $W_{2,1a} \subset C_{2,1a}$. Класс $C_{2,1a}$ задается тензором F_{ij} вида [10, 11]

$$\begin{gathered} F_{12} = \text{const}, \quad F_{13} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^3}, \quad F_{14} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^4}, \\ F_{23} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^3}, \quad F_{24} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^4}, \quad F_{34} = \Theta, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\Phi = \Phi(x^3, x^4)$, $\Psi = \Psi(x^3, x^4)$, $\Theta = \Theta(x^3, x^4)$ — произвольные гладкие функции. Подставляя (7) в уравнения Максвелла (3), получим, что функции Φ и Ψ должны удовлетворять волновому уравнению,

$$\Phi''_{33} - \Phi''_{44} = 0, \quad \Psi''_{33} - \Psi''_{44} = 0 \quad (f''_{ij} = \partial_i \partial_j f), \tag{8}$$

а $\Theta = \text{const}$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Класс ПМНТ* $W_{2,1a}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{gathered} F_{12} = K_1, \quad F_{13} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^3}, \quad F_{14} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^4}, \\ F_{23} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^3}, \quad F_{24} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^4}, \quad F_{34} = K_2, \end{gathered} \tag{9}$$

где K_1 *и* K_2 *— константы, а* Φ *и* Ψ *удовлетворяют уравнениям* (8).

[3]Здесь $\mathcal{L}_g$ — алгебра Ли векторных полей, соответствующая группе Пуанкаре G_g, а $\mathcal{L}_S$ соответствует G_S.

Предложение 1. *Пусть 1) производные Φ'_3, Φ'_4, Ψ'_3, Ψ'_4 линейно независимы, 2) функции Φ''_{33}, Φ''_{34}, Ψ''_3, $x^4\Phi''_{33}+x^3\Phi''_{34}+\Phi'_4$ линейно независимы. Тогда ПМНТ, определяемое тензором* (9) *допускает двумерную группу $G_S = G_{2,1a}$.*

Например, условиям этого предложения удовлетворяют функции $\Phi = \sin x^3 \sin x^4$ и $\Psi = \sin 2x^3 \sin 2x^4$, для которых тензор (9) принимает вид:

$$\begin{aligned} &F_{12} = K_1, \quad F_{13} = \cos x^3 \sin x^4, \quad F_{14} = \sin x^3 \cos x^4, \\ &F_{23} = 2\cos 2x^3 \sin 2x^4, \quad F_{24} = 2\sin 2x^3 \cos 2x^4, \quad F_{34} = K_2. \end{aligned} \tag{10}$$

1.2. *Класс $W_{2,1b}$. $\mathcal{L}_{2,1b} = L\{e_2, e_4\}$. $W_{2,1b} \subset C_{2,1b}$.* Класс $C_{2,1b}$ задается тензором F_{ij} вида [10, 11]

$$\begin{aligned} &F_{12} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^1}, \quad F_{13} = \Theta, \quad F_{14} = \frac{\partial\Psi}{\partial x^1}, \\ &F_{23} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}, \quad F_{24} = \mathrm{const}, \;\; F_{34} = \frac{\partial\Psi}{\partial x^3}, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\Phi = \Phi(x^1, x^3)$, $\Psi = \Psi(x^1, x^3)$, $\Theta = \Theta(x^1, x^3)$ — произвольные гладкие функции. Подставляя (11) в уравнения Максвелла (3), получим в результате следующее утверждение.

Теорема 5. *Класс $W_{2,1b}$ статических ПМНТ задается тензором F_{ij},*

$$\begin{aligned} &F_{12} = \Phi_1, \quad F_{13} = K_1, \quad F_{14} = \Psi_1, \\ &F_{23} = -\Phi_3, \quad F_{24} = K_2, \quad F_{34} = \Psi_3, \end{aligned} \tag{12}$$

где K_1, $K_1 = \mathrm{const}$, а функции $\Phi = \Phi(x^1, x^3)$ и $\Psi = \Psi(x^1, x^3)$ удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Phi''_{11} + \Phi''_{33} = 0, \quad \Psi''_{11} + \Psi''_{33} = 0. \tag{13}$$

Предложение 2. *Пусть выполнены следующие условия на функции $\Phi = \Phi(x^1, x^3)$ и $\Psi = \Psi(x^1, x^3)$:* 1) *производные Φ'_1, Φ'_3, Ψ'_1 и Ψ'_3 линейно независимы;* 2) *функции Φ''_{11}, Φ''_{13}, Ψ''_1 и $x^3\Phi''_{11} - x^1\Phi''_{13} + \Phi'_3$ линейно независимы. Тогда статическое ПМНТ, определяемое тензором* (12) *и уравнениями* (13)*, допускает двумерную группу $G_S = G_{2,1b}$.*

Например, условиям этого предложения удовлетворяют функции $\Phi = \sin x^1 \operatorname{sh} x^3$ и $\Psi = \sin 2x^1 \operatorname{sh} 2x^3$, для которых тензор (12) принимает вид:

$$\begin{aligned} &F_{12} = \cos x^1 \operatorname{sh} x^3, \quad F_{13} = K_1, \quad F_{14} = 2\cos 2x^1 \operatorname{sh} 2x^3, \\ &F_{23} = -\sin x^1 \operatorname{ch} x^3, \quad F_{24} = K_2, \quad F_{34} = 2\sin 2x^1 \operatorname{ch} 2x^3. \end{aligned} \tag{14}$$

1.3. *Класс* $W_{2,1c}$. $\mathcal{L}_{2,1c} = L\{e_1,\, e_2 + e_4\}$. $W_{2,1c} \subset C_{2,1c}$. Класс $C_{2,1c}$ задается тензором F_{ij} вида [10, 11]

$$\begin{aligned} &F_{12} = \mathrm{C} - \frac{\partial \Phi}{\partial v^4}, \quad F_{13} = -\frac{\partial \Phi}{\partial v^3}, \quad F_{14} = \frac{\partial \Phi}{\partial v^4}, \\ &F_{23} = \Theta, \quad F_{24} = \frac{\partial \Psi}{\partial v^4}, \quad F_{34} = \Theta + \frac{\partial \Psi}{\partial v^3}, \end{aligned} \tag{15}$$

где $C = \mathrm{const}$, а $\Phi = \Phi(v^3,\, v^4)$, $\Psi = \Psi(v^3,\, v^4)$, $\Theta = \Theta(v^3,\, v^4)$ — произвольные гладкие функции ($v^3 = x^3$, $v^4 = x^2 - x^4$).

Подставляя (15) в уравнения Максвелла (3), получим

$$\Psi''_{44} + \Theta'_3 = 0, \quad \Phi''_{33} = 0, \quad \Psi''_{34} = 0, \quad \Psi''_{44} + \Psi''_{33} + \Theta'_3 = 0 \tag{16}$$

($f'_i = \partial f/\partial v^i$, $f''_{ij} = \partial^2 f/\partial v^i \partial v^j$). Общее решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} &\Phi = v^3 A(v^4) + B(v^4), \quad \Psi = D(v^4) + K_1 v^3 + K_2, \\ &\Theta = -v^3 D''(v^4) + K_3, \end{aligned} \tag{17}$$

где $A(v^4)$, $B(v^4)$ и $D(v^4)$ — произвольные функции, а $K_i = \mathrm{const}$. Подставляя (17) в (15), получим

$$\begin{aligned} &F_{14} = v^3 A'(v^4) + B'(v^4), \quad F_{12} = \mathrm{C} - F_{14}, \quad F_{13} = -A(v^4), \\ &F_{23} = -v^3 D''(v^4) + K_3, \quad F_{24} = D'(v^4), \quad F_{34} = F_{23} + K_1. \end{aligned} \tag{18}$$

Теорема 6. *Класс ПМНТ* $W_{2,1c}$ *задается тензором* F_{ij} *вида* (18).

Пример. Положим в (18) $B = C = K_1 = K_2 = K_3 = 0$:

$$\begin{aligned} &F_{14} = -F_{12} = x^3 A'(x^2 - x^4), \quad F_{13} = -A(x^2 - x^4), \\ &F_{23} = -F_{34} = -x^3 D''(x^2 - x^4), \quad F_{24} = D'(x^2 - x^4). \end{aligned} \tag{19}$$

Предложение 3. *Если* $A' \neq 0$ *и* $D'' \neq 0$, *то ПМНТ, определяемое тензором* (19), *допускает двумерную группу* $G_S = G_{2,1c}$.

2. Класс $W_{2,2}$. $\mathcal{L}_{2,2} = L\{e_{13} + \mu e_4,\ e_2\}$. $W_{2,2} = W_{1,2b} \cap C_{2,2}$.

Теорема 7. [3]. *Класс ПМНТ* $W_{2,2}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi, && F_{23} = c_1 \sin\varphi - c_2 \cos\varphi, \\ &F_{13} = F_{13}(r,\, \tilde{x}^4), && F_{24} = F_{24}(r,\, \tilde{x}^4), \\ &F_{14} = c_3 \cos\varphi + c_4 \sin\varphi, && F_{34} = -c_3 \sin\varphi + c_4 \cos\varphi, \end{aligned} \tag{20}$$

где функции $c_i = c_i(r,\, \tilde{x}^4)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{c_1}{r} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^4} = 0, && \frac{\partial F_{24}}{\partial r} + \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \\ &\frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{c_3}{r} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^4} = 0, && \frac{\mu}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

и

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_{13}}{\partial r}-\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^4}=0, \qquad \frac{\partial c_2}{\partial r}+\frac{c_2}{r}-\frac{\mu}{r}\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^4}+\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^4}=0,\\
&\frac{\mu}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^4}-\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^4}=0, \quad \frac{\partial c_4}{\partial r}+\frac{c_4}{r}-\frac{\mu}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^4}+\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^2}=0,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

а связь между координатами $\{x^i\}$ *и* $\{\tilde{x}^i\}=\{r,\,\tilde{x}^2,\,\varphi,\,\tilde{x}^4\}$ *задается соотношениями*

$$
x^1=r\sin\varphi,\quad x^2=\tilde{x}^2,\quad x^3=r\cos\varphi,\quad x^4=\mu\varphi+\tilde{x}^4. \tag{23}
$$

Пример. Можно проверить, что следующий тензор вида (20) удовлетворяет уравнениям (21)–(22):

$$
\begin{aligned}
&F_{12}=F_{23}=F_{24}=0,\quad F_{13}=-\mu K\ln r+C,\\
&F_{14}=\left(-K\mu^2\frac{\ln r}{r}+\frac{M}{r}\right)\sin\varphi-\frac{\mu}{r}\left(K\tilde{x}^4+L\right)\cos\varphi,\\
&F_{34}=\left(-K\mu^2\frac{\ln r}{r}+\frac{M}{r}\right)\cos\varphi+\frac{\mu}{r}\left(K\tilde{x}^4+L\right)\sin\varphi,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

(K, L, M и C — произвольные постоянные)[4].

Предложение 4. *Если* $K\neq 0$, *то ПМНТ, определяемое тензором* (24), *допускает двумерную группу* $G_S=G_{2,2}$.

3. Класс $W_{2,3}$. $\mathcal{L}_{2,3}=L\{e_{13}+\lambda e_2, e_4\}$. $W_{2,3}=W_{1,2a}\cap C_{2,3}$.

Теорема 8. [15]. *Класс статических ПМНТ* $W_{2,3}$ *задается тензором*

$$
\begin{aligned}
&F_{12}=c_1\cos\varphi+c_2\sin\varphi,\quad F_{14}=c_3\cos\varphi+c_4\sin\varphi,\\
&F_{13}=F_{13}(r,\tilde{x}^2),\quad F_{24}=F_{24}(r,\tilde{x}^2),\\
&F_{23}=c_1\sin\varphi-c_2\cos\varphi,\quad F_{34}=-c_3\sin\varphi+c_4\cos\varphi,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

где функции $F_{13}(r,\,\tilde{x}^2)$, $F_{24}(r,\,\tilde{x}^2)$ *и* $c_i=c_i(r,\,\tilde{x}^2)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial c_1}{\partial r}+\frac{c_1}{r}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^2}-\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^2}=0, \quad \frac{\partial F_{24}}{\partial r}-\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2}=0,\\
&\frac{\partial c_3}{\partial r}+\frac{c_3}{r}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2}=0, \qquad \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^2}=0
\end{aligned}
\tag{26}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial c_2}{\partial r}+\frac{c_2}{r}-\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^2}=0, \qquad \frac{\partial F_{13}}{\partial r}+\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^2}=0,\\
&\frac{\partial c_4}{\partial r}+\frac{c_4}{r}-\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^2}=0, \quad \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^2}=0,
\end{aligned}
\tag{27}
$$

а связь координат $\{x^i\}$ *и* $\{r,\tilde{x}^2,\varphi,\tilde{x}^4\}$ *задается соотношениями*

$$
x^1=r\sin\varphi,\quad x^2=\lambda\varphi+\tilde{x}^2,\quad x^3=r\cos\varphi,\quad x^4=\tilde{x}^4. \tag{28}
$$

[4]Решение получено при нахождении представителя класса $W_{1,2b}$.

Пример. ПМНТ, определяемое тензором вида

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0, \quad F_{14} = \frac{\partial C}{\partial r}\sin\varphi - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial C}{\partial \tilde{x}^2}\cos\varphi, \\ &F_{24} = \frac{\partial C}{\partial \tilde{x}^2}, \quad F_{34} = \frac{\partial C}{\partial r}\cos\varphi + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial C}{\partial \tilde{x}^2}\sin\varphi, \end{aligned} \tag{29}$$

где функция $C = C(r, \tilde{x}^2)$ удовлетворяет уравнению

$$C''_{rr} + \left(1 + \frac{\lambda^2}{r^2}\right) C''_{22} + \frac{1}{r}\, C'_r = 0, \tag{30}$$

принадлежит классу $W_{2,3}$[5].

Предложение 5. *Пусть $C''_{22} \neq 0$. Тогда ПМНТ, определяемое тензором (29) и уравнением (30), допускает двумерную группу $G_S = G_{2,3}$.*

В частности, для функции $C = \dfrac{(\tilde{x}^2)^2}{2} - \dfrac{r^2}{4} - \dfrac{\lambda^2}{2}\ln^2 r$, удовлетворяющей уравнению (30) и условию $C''_{22} \neq 0$, получаем из (29) пример ПМНТ с группой симметрий $G_{2,3}$:

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0, \quad F_{24} = \tilde{x}^2, \\ &F_{14} = -\left(\frac{r}{2} + \lambda^2\,\frac{\ln r}{r}\right)\sin\varphi - \frac{\lambda\tilde{x}^2}{r}\cos\varphi, \\ &F_{34} = -\left(\frac{r}{2} + \lambda^2\,\frac{\ln r}{r}\right)\cos\varphi + \frac{\lambda\tilde{x}^2}{r}\sin\varphi. \end{aligned} \tag{31}$$

4. Класс $W_{2,4}$. $\mathcal{L}_{2,4} = L\{e_{13} + \lambda e_2,\ e_2 + e_4\}$. Класс $W_{2,4}$ является пересечением классов $W_{1,2a}$ и $C_{1,1c}$. Здесь используем замену (28) и обозначим $v = \tilde{x}^2 - \tilde{x}^4$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. [3]. *ПМНТ класса $W_{2,4}$ задается тензором F_{ij} вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi, \quad F_{14} = c_3\cos\varphi + c_4\sin\varphi, \\ &F_{23} = c_1\sin\varphi - c_2\cos\varphi, \quad F_{34} = -c_3\sin\varphi + c_4\cos\varphi, \\ &F_{13} = F_{13}(r,\, v), \quad F_{24} = F_{24}(r,\, v), \end{aligned} \tag{32}$$

где функции $c_i = c_i(r,\, v)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{c_1}{r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_2}{\partial v} - \frac{\partial F_{13}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial F_{24}}{\partial r} - \frac{\partial c_2}{\partial v} - \frac{\partial c_4}{\partial v} = 0, \\ &\frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{c_3}{r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_4}{\partial v} - \frac{\partial F_{13}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial v} + \frac{\partial c_3}{\partial v} + \frac{\partial c_1}{\partial v} = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

[5]Решение получено при нахождении представителя класса $W_{1,2a}$.

и

$$\frac{\partial c_1}{\partial v}+\frac{\partial F_{13}}{\partial r}+\frac{\partial c_3}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial c_2}{\partial r}+\frac{c_2}{r}-\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_1}{\partial v}-\frac{\partial F_{24}}{\partial v}=0,$$
$$\frac{\partial c_2}{\partial v}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial v}+\frac{\partial c_4}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial c_4}{\partial r}+\frac{c_4}{r}-\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_3}{\partial v}+\frac{\partial F_{24}}{\partial v}=0, \tag{34}$$

а связь между координатами задается соотношениями (28).

Пример. Положим $F_{13}=0$. Тогда система (33)–(34) упрощается и приводится к следующему виду

$$c_3=-c_1+\frac{K_1}{r},\quad c_4=-c_2+\frac{K_2}{r},\quad F_{24}=K_3\quad (K_i=\mathrm{const}), \tag{35}$$

где функции $c_1=c_1(r,\,v)$ и $c_2=c_2(r,\,v)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial c_1}{\partial r}+\frac{c_1}{r}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_2}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial c_2}{\partial r}+\frac{c_2}{r}-\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_1}{\partial v}=0. \tag{36}$$

Если возьмем функции $c_1(r,\,v)$ и $c_2(r,\,v)$ в виде

$$c_1=R_1(r)V_1(v),\quad c_2=R_2(r)V_2(v),$$

то получим следующее (не общее) решение системы (36):

$$c_1=\left(\frac{b_1}{r^2}+b_2\right)\left(a_1\cos\frac{v}{\lambda}+a_2\sin\frac{v}{\lambda}\right),$$
$$c_2=\left(-\frac{b_1}{r^2}+b_2\right)\left(-a_1\sin\frac{v}{\lambda}+a_2\cos\frac{v}{\lambda}\right)\quad (a_k,\ b_k=\mathrm{const}). \tag{37}$$

При $K_1=K_2=K$, $K_3=a_1=b_1=0$, $b_2=1$ и $a_2=L$ получим из (32), (37) и (35):

$$F_{12}=L\sin\frac{v}{\lambda}\cos\varphi+L\cos\frac{v}{\lambda}\sin\varphi,\quad F_{13}=F_{24}=0,$$
$$F_{23}=L\sin\frac{v}{\lambda}\sin\varphi-L\cos\frac{v}{\lambda}\cos\varphi,$$
$$F_{14}=\left(\frac{K}{r}-L\sin\frac{v}{\lambda}\right)\cos\varphi+\left(\frac{K}{r}-L\cos\frac{v}{\lambda}\right)\sin\varphi,$$
$$F_{34}=-\left(\frac{K}{r}-L\sin\frac{v}{\lambda}\right)\sin\varphi+\left(\frac{K}{r}-L\cos\frac{v}{\lambda}\right)\cos\varphi. \tag{38}$$

В галилеевых координатах тензор (38) имеет вид

$$F_{12}=L\sin\frac{x^2-x^4}{\lambda},\quad F_{23}=-L\cos\frac{x^2-x^4}{\lambda},$$
$$F_{13}=0,\quad F_{14}=-L\sin\frac{x^2-x^4}{\lambda}+\frac{K(x^1+x^3)}{(x^1)^2+(x^3)^2},$$
$$F_{24}=0,\quad F_{34}=-L\cos\frac{x^2-x^4}{\lambda}-\frac{K(x^1-x^3)}{(x^1)^2+(x^3)^2}. \tag{39}$$

Предложение 6. *Пусть $K \neq 0$ и $L \neq 0$. Тогда ПМНТ, определяемое тензором* (39), *допускает двумерную группу $G_S = G_{2,4}$.*

5. Класс $W_{2,5}$. $\mathcal{L}_{2,5} = L\{e_{24} + \lambda e_3, e_1\}$. Класс $W_{2,5}$ является пересечением классов $W_{1,3a}$ и $C_{1,1a}$.

Теорема 10. [5]. *Класс $W_{2,5}$ ПМНТ задается тензором F_{ij} вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = c_1 \operatorname{ch}\varphi + c_2 \operatorname{sh}\varphi, && F_{14} = -c_1 \operatorname{sh}\varphi - c_2 \operatorname{ch}\varphi, \\ &F_{13} = F_{13}(r, \tilde{x}^3), && F_{24} = F_{24}(r, \tilde{x}^3), \\ &F_{23} = c_3 \operatorname{ch}\varphi + c_4 \operatorname{sh}\varphi, && F_{34} = c_3 \operatorname{sh}\varphi + c_4 \operatorname{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{40}$$

где функции $c_i = c_i(r, \tilde{x}^3)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_2}{\partial r} + \frac{c_2}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^3} = 0, && \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial r} = 0, \\ &\frac{\partial c_4}{\partial r} + \frac{c_4}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, && \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^3} = 0 \end{aligned} \tag{41}$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{c_1}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, && \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \\ &\frac{\partial F_{24}}{\partial r} + \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^3} = 0, && \frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{c_3}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \end{aligned} \tag{42}$$

а замена координат определяется формулами

$$x^1 = \tilde{x}^1, \quad x^2 = r \operatorname{ch}\varphi, \quad x^3 = \lambda\varphi + \tilde{x}^3, \quad x^4 = r \operatorname{sh}\varphi. \tag{43}$$

Пример. Класс $P_{2,5}$ потенциалов A_i, инвариантных относительно группы $G_{2,5}$, состоит из полей вида [14]

$$\begin{aligned} &A_1 = A_1(r, \tilde{x}^3), \quad A_2 = C_1 \operatorname{ch}\varphi + C_2 \operatorname{sh}\varphi, \\ &A_3 = A_3(r, \tilde{x}^3), \quad A_4 = -C_1 \operatorname{sh}\varphi - C_2 \operatorname{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{44}$$

где $C_i = C_i(r, \tilde{x}^3)$. Положим в (44) $A_1 = \Phi$, $C_1 = C_2 = A_3 = 0$, где $\Phi = \Phi(r, \tilde{x}^3)$; получим следующее выражение тензора F_{ij}:

$$\begin{aligned} &F_{12} = -\Phi'_r \operatorname{ch}\varphi - \frac{\lambda}{r}\Phi'_3 \operatorname{sh}\varphi, \quad F_{14} = \Phi'_r \operatorname{sh}\varphi + \frac{\lambda}{r}\Phi'_3 \operatorname{ch}\varphi, \\ &F_{13} = -\Phi'_3, \ F_{23} = F_{24} = F_{34} = 0 \ \left(\Phi'_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \ \Phi'_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}^3}\right). \end{aligned} \tag{45}$$

Сравнивая (45) с (40), получим

$$c_1 = -\Phi'_r, \quad c_2 = -\frac{\lambda}{r}\Phi'_3, \quad F_{13} = -\Phi'_3, \quad c_3 = c_4 = F_{24} = 0. \tag{46}$$

Подставляя (46) в систему уравнений (42) (уравнения (41) должны выполняться автоматически), получим единственное уравнение для функции Φ:

$$\Phi''_{rr} + \frac{1}{r}\Phi'_r + \left(1 - \frac{\lambda^2}{r^2}\right)\Phi''_{33} = 0. \tag{47}$$

Предложение 7. *Пусть* $\Phi''_{33} \neq 0$. *Тогда ПМНТ, определяемое тензором* (45) *и уравнением* (47), *допускает двумерную группу* $G_S = G_{2,5}$.

Например, условиям этого предложения удовлетворяет функция

$$\Phi = \frac{(\tilde{x}^3)^2}{2} - \frac{r^2}{4} + \frac{\lambda^2}{2}\ln^2 r, \tag{48}$$

для которой тензор (45) принимает вид

$$\begin{aligned} &F_{12} = -\left(\lambda^2 \frac{\ln r}{r} - \frac{r}{2}\right)\operatorname{ch}\varphi - \frac{\lambda\tilde{x}^3}{r}\operatorname{sh}\varphi, \quad F_{13} = -\tilde{x}^3, \\ &F_{14} = \left(\lambda^2 \frac{\ln r}{r} - \frac{r}{2}\right)\operatorname{sh}\varphi + \frac{\lambda\tilde{x}^3}{r}\operatorname{ch}\varphi, \quad F_{23} = F_{24} = F_{34} = 0. \end{aligned} \tag{49}$$

6. Класс $W_{2,6}$. $\mathcal{L}_{2,6} = L\{e_{24} + \lambda e_3,\, e_2 - e_4\}$.

Теорема 11. [5]. *Класс ПМНТ* $W_{2,6}$ *задается тензорами* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = c_1 \operatorname{ch}\varphi + c_2 \operatorname{sh}\varphi, \quad F_{14} = -c_1 \operatorname{sh}\varphi - c_2 \operatorname{ch}\varphi, \\ &F_{13} = F_{13}(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \qquad F_{24} = F_{24}(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \\ &F_{23} = c_3 \operatorname{ch}\varphi + c_4 \operatorname{sh}\varphi, \quad F_{34} = c_3 \operatorname{sh}\varphi + c_4 \operatorname{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{50}$$

где функции

$$F_{13}(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \quad F_{24}(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \quad c_i = c_i(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3) \quad (i = 1, \ldots, 4)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_2}{\partial r} + \frac{c_2}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^1} = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial r} + \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^1} = 0, \\ &\frac{\partial c_4}{\partial r} + \frac{c_4}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{c_1}{r} - \frac{\mu}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial F_{24}}{\partial r} - \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \\ &\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\mu}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\mu}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{c_3}{r} = 0, \end{aligned} \tag{52}$$

а также следующей системе

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{c_2}{r} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{c_1}{r} = 0, \\ &\frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{c_4}{r} = 0, \quad \frac{\partial c_4}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{c_3}{r} = 0, \\ &\frac{\partial F_{13}}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \qquad \frac{\partial F_{24}}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \end{aligned} \tag{53}$$

а замена координат определяется формулами (43).

Пример. Возьмем часть класса потенциалов $P_{2,6}$, инвариантных относительно группы $G_{2,6}$, в виде $A_i = (-\Phi, 0, -\Phi, 0)$, где

$$\Phi = \Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \lambda \ln r) = \Phi(t_1, t_2) \quad \text{и} \quad \Psi = \Psi(t_1, t_2),$$

получим

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = -\frac{\lambda}{r}\Phi_2' e^{-\varphi}, \quad F_{13} = \Phi_2' - \Psi_1', \\ &F_{23} = -F_{34} = \frac{\lambda}{r}\Psi_2' e^{-\varphi}, \quad F_{24} = 0 \quad (\Phi_k = \partial\Phi/\partial t_k). \end{aligned} \tag{54}$$

Подставляя (54) в систему уравнений Максвелла (3), получим, что функция Ψ должна удовлетворять уравнению Лапласа $\Psi_{11}'' + \Psi_{22}'' = 0$, а функция Φ — выражаться через нее:

$$\Phi(t_1, t_2) = \int \Psi(t_1, t_2)\, dt_2 + K t_2 + L \quad (K, L = \mathrm{const}). \tag{55}$$

Пусть, например, $\Psi = \sin t_1 \operatorname{sh} t_2$ и $K = L = 0$. Тогда $\Phi = \cos t_1 \operatorname{ch} t_2$, и тензор (54) примет вид

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = -\frac{\lambda}{r} e^{-\varphi} \cos\tilde{x}^1 \operatorname{sh}(\tilde{x}^3 - \lambda \ln r), \quad F_{13} = F_{24} = 0, \\ &F_{23} = -F_{34} = \frac{\lambda}{r} e^{-\varphi} \sin\tilde{x}^1 \operatorname{ch}(\tilde{x}^3 - \lambda \ln r). \end{aligned} \tag{56}$$

Предложение 8. *ПМНТ, определяемое тензором* (56), *допускает двумерную группу* $G_S = G_{2,6}$.

7. Здесь опишем класс ПМНТ, соответствующий алгебре

$$\mathcal{L}_{2,7} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2 + \mu e_3,\ e_2 - e_4\} \quad (\lambda\mu = 0).$$

Рассмотрим случаи: a) $\lambda = \mu = 0$; b) $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$; c) $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$.

7.1. **Класс** $W_{2,7a}$. $\lambda = \mu = 0$. $\mathcal{L}_{2,7a} = L\{e_{12} - e_{14},\ e_2 - e_4\}$.
$W_{2,7a} = C_{2,7a} \cap W_{1,4a}$.

Теорема 12. *Класс ПМНТ* $W_{2,7a}$ *задается тензорами* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = -\frac{A(\tilde{x}^2)^2}{2\tilde{x}^1} - \frac{B\tilde{x}^2}{\tilde{x}^1} + \frac{A(\tilde{x}^3)^2}{2(\tilde{x}^1)^3} + \left[\frac{f(\tilde{x}^1)}{\tilde{x}^1} + f'(\tilde{x}^1)\right]\tilde{x}^3 + g(\tilde{x}^1), \\ &F_{13} = -\frac{A\tilde{x}^3}{(\tilde{x}^1)^2} + f(\tilde{x}^1), \quad F_{14} = F_{12} + \frac{A}{\tilde{x}^1}, \quad F_{24} = \frac{B}{\tilde{x}^1} + \frac{A\tilde{x}^2}{\tilde{x}^1}, \\ &F_{23} = -F_{34} = -\varphi(\tilde{x}^1) + \tilde{x}^2\left[-\frac{A\tilde{x}^3}{(\tilde{x}^1)^2} + f(\tilde{x}^1)\right], \end{aligned} \tag{57}$$

где f, g *и* φ *— произвольные функции,* A, $B = \mathrm{const}$, *а замена координат задается формулами*

$$\tilde{x}^1 = x^2 + x^4,\ \tilde{x}^2 = -\frac{x^1}{x^2 + x^4},\ \tilde{x}^3 = x^3,\ \tilde{x}^4 = \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2(x^2 + x^4). \tag{58}$$

Пример. Положим в (57) $B = f = \varphi = g = 0$:

$$\begin{gathered} F_{12} = -\frac{A(\tilde{x}^2)^2}{2\tilde{x}^1} + \frac{A(\tilde{x}^3)^2}{2(\tilde{x}^1)^3}, \quad F_{13} = -\frac{A\tilde{x}^3}{(\tilde{x}^1)^2}, \\ F_{14} = F_{12} + \frac{A}{\tilde{x}^1}, \quad F_{24} = \frac{A\tilde{x}^2}{\tilde{x}^1}, \quad F_{23} = -F_{34} = -\frac{A\tilde{x}^2\tilde{x}^3}{(\tilde{x}^1)^2}. \end{gathered} \tag{59}$$

Перейдем к гилилеевым координатам в (59) с использованием замены (58):

$$\begin{aligned} &F_{12} = \frac{A[(x^3)^2 - (x^1)^2]}{2(x^2 + x^4)^3}, \quad F_{13} = -\frac{Ax^3}{(x^2 + x^4)^2}, \\ &F_{14} = F_{12} + \frac{A}{x^2 + x^4}, \quad F_{24} = -\frac{Ax^1}{(x^2 + x^4)^2}, \\ &F_{23} = -F_{34} = \frac{Ax^1x^3}{(x^2 + x^4)^3}. \end{aligned} \tag{60}$$

Предложение 9. *Если $A \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором* (60), *допускает двумерную группу $G_S = G_{2,7a}$.*

7.2. **Класс** $W_{2,7b}$**.** $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$. $\mathcal{L}_{2,7b} = L\{e_{12} - e_{14} + \mu e_3,\ e_2 - e_4\}$. $W_{2,7b} = C_{2,7b} \cap W_{1,4b}$.

Теорема 13. *Класс ПМНТ $W_{2,7b}$ задается тензорами F_{ij} вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = -\tilde{x}^2 f(\tilde{x}^1) + \left[\frac{g(\tilde{x}^1)}{\tilde{x}^1} + g'(\tilde{x}^1)\right]\tilde{x}^3 + h(\tilde{x}^1), \\ &F_{13} = g(\tilde{x}^1), \quad F_{23} = -F_{34} = \tilde{x}^2 g(\tilde{x}^1) + \varphi(\tilde{x}^1), \quad F_{24} = f(\tilde{x}^1), \end{aligned} \tag{61}$$

где f, φ и h — произвольные функции,

$$g(\tilde{x}^1) = \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{\tilde{x}^1}\int \tilde{x}^1 f(\tilde{x}^1)\, d\tilde{x}^1 - \tilde{x}^1 f(\tilde{x}^1)\right], \tag{62}$$

а замена координат задается формулами

$$\begin{aligned} &\tilde{x}^1 = x^2 + x^4, &&\tilde{x}^2 = -\frac{x^1}{x^2 + x^4}, \\ &\tilde{x}^3 = x^3 + \frac{\mu x^1}{x^2 + x^4}, &&\tilde{x}^4 = \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2(x^2 + x^4). \end{aligned} \tag{63}$$

Пример. Положим в (61) $h = \varphi = 0$:

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = -\tilde{x}^2 f(\tilde{x}^1) + \left[\frac{g(\tilde{x}^1)}{\tilde{x}^1} + g'(\tilde{x}^1)\right]\tilde{x}^3, \\ &F_{13} = g(\tilde{x}^1), \quad F_{23} = -F_{34} = \tilde{x}^2 g(\tilde{x}^1), \quad F_{24} = f(\tilde{x}^1). \end{aligned} \tag{64}$$

Предложение 10. *Если $f'(\tilde{x}^1) \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором* (64), *допускает двумерную группу $G_S = G_{2,7b}$.*

7.3. **Класс** $W_{2,7c}$. $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$. $\mathcal{L}_{2,7c} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2,\, e_2 - e_4\}$. $W_{2,7c} = C_{2,7c} \cap W_{1,4c}$.

Теорема 14. *Класс ПМНТ* $W_{2,7c}$ *задается тензорами* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned}
&F_{12} = -\frac{(\tilde{x}^2)^2}{2}(\lambda\Phi'_3 - 2\lambda^2\Psi'_1) - L\tilde{x}^2 + \Psi,\\
&F_{13} = (2\lambda^2\Phi'_1 + \lambda\Psi'_3)\tilde{x}^2 + K, \quad F_{14} = F_{12} + \lambda\Phi'_3 - 2\lambda^2\Psi'_1,\\
&F_{23} = \frac{(\tilde{x}^2)^2}{2}(2\lambda^2\Phi'_1 + \lambda\Psi'_3) + K\tilde{x}^2 + \Phi,\\
&F_{24} = (\lambda\Phi'_3 - 2\lambda^2\Psi'_1)\tilde{x}^2 + L, \quad F_{34} = -F_{23} - 2\lambda^2\Phi'_1 - \lambda\Psi'_3,
\end{aligned} \tag{65}$$

где K *и* L *— произвольные константы, функции*

$$\Phi = \Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3), \quad \Psi = \Psi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$$

удовлетворяют уравнению

$$4\lambda^2 f''_{11} + f''_{33} = 0 \qquad \left(f'_i = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i},\ f''_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j}\right), \tag{66}$$

а замена координат задается формулами

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}^1 = 2\lambda x^1 + \left(x^2 + x^4\right)^2, \qquad \tilde{x}^2 = \frac{x^2 + x^4}{\lambda},\\
&\tilde{x}^3 = x^3, \quad \tilde{x}^4 = \lambda x^4 + x^1(x^2 + x^4) + \frac{1}{3\lambda}\left(x^2 + x^4\right)^3.
\end{aligned} \tag{67}$$

Пример. Положим в (65) $K = L = \Psi = 0$, а $\Phi = \operatorname{sh}\dfrac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\sin\tilde{x}^3$:

$$\begin{aligned}
&F_{12} = -\frac{\lambda(\tilde{x}^2)^2}{2}\operatorname{sh}\frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\cos\tilde{x}^3, \quad F_{13} = \lambda\tilde{x}^2\operatorname{ch}\frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\sin\tilde{x}^3,\\
&F_{14} = F_{12} + \lambda\operatorname{sh}\frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\cos\tilde{x}^3, \quad F_{24} = \lambda\tilde{x}^2\operatorname{sh}\frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\cos\tilde{x}^3,\\
&F_{23} = \frac{\lambda(\tilde{x}^2)^2}{2}\operatorname{ch}\frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\sin\tilde{x}^3 + \operatorname{sh}\frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\sin\tilde{x}^3,\\
&F_{34} = -F_{23} - \lambda\operatorname{ch}\frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\sin\tilde{x}^3.
\end{aligned} \tag{68}$$

Предложение 11. *ПМНТ, определяемое тензором* (68), *допускает двумерную группу* $G_S = G_{2,7c}$.

2.8. **Класс** $W_{2,8}$. $\mathcal{L}_{2,8} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2,\ e_3\}$. $W_{2,8} = C_{2,8} \cap W_{1,4c}$.

Теорема 15. *Класс ПМНТ* $W_{2,8}$ *задается тензорами* F_{ij} *вида*

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = -\frac{(\tilde{x}^2)^2}{2}\Phi_4' - (2\Phi_1' + D)\tilde{x}^2 - \left(1 + \frac{\tilde{x}^1}{2\lambda^2}\right)\Phi_4' + K,\\
&F_{13} = \tilde{x}^2\Psi_4' + 2\Psi_1' + B, \quad F_{14} = F_{12} + \Phi_4',\\
&F_{23} = \frac{(\tilde{x}^2)^2}{2}\Psi_4' + \tilde{x}^2\left(2\Psi_1' + B\right) + \frac{\tilde{x}^1}{2\lambda^2}\Psi_4' + L,\\
&F_{24} = \tilde{x}^2\Phi_4' + 2\Phi_1' + D, \quad F_{34} = -F_{23} - \Psi_4',
\end{aligned}
\tag{69}
$$

где K *и* L *— произвольные константы, а функции*

$$
\Phi = \Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4), \quad \Psi = \Psi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4), \quad B = B(\tilde{x}^1), \quad D = D(\tilde{x}^1)
$$

удовлетворяют уравнениям

$$
4\Psi_{11}'' - \left(1 + \frac{\tilde{x}^1}{\lambda^2}\right)\Psi_{44}'' + 2B' = 0, \quad 4\Phi_{11}'' - \left(1 + \frac{\tilde{x}^1}{\lambda^2}\right)\Phi_{44}'' + 2D' = 0 \tag{70}
$$

(замена координат задается формулами (67)*).*

Пример. Положим в (69) $K = L = B = D = \Psi = 0$, а

$$
\Phi = \frac{(\tilde{x}^4)^2}{2} + \frac{(\tilde{x}^1)^2}{8} + \frac{(\tilde{x}^1)^3}{24\lambda^2}. \tag{71}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = -\frac{(\tilde{x}^2)^2}{2}\tilde{x}^4 - \tilde{x}^2\left(\frac{\tilde{x}^1}{2} + \frac{(\tilde{x}^1)^2}{4\lambda^2}\right) - \tilde{x}^4\left(1 + \frac{\tilde{x}^1}{2\lambda^2}\right),\\
&F_{13} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{14} = F_{12} + \tilde{x}^4,\\
&F_{24} = \tilde{x}^2\tilde{x}^4 + \frac{\tilde{x}^1}{2} + \frac{(\tilde{x}^1)^2}{4\lambda^2}.
\end{aligned}
\tag{72}
$$

Предложение 12. *ПМНТ, определяемое тензором* (72)*, допускает двумерную группу* $G_S = G_{2,8}$.

9. **Класс** $W_{2,9}$. $\mathcal{L}_{2,9} = L\{e_{13} + \lambda e_{24},\, e_2 - e_4\}$. $W_{2,9} = C_{2,9} \cap W_{1,5}$.

Теорема 16. *Класс ПМНТ* $W_{2,9}$ *задается тензорами* F_{ij} *вида*

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = (-c_1 \operatorname{ch}\lambda\varphi - c_2 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi + (c_3 \operatorname{ch}\lambda\varphi + c_4 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi,\\
&F_{14} = (c_2 \operatorname{ch}\lambda\varphi + c_1 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi - (c_4 \operatorname{ch}\lambda\varphi + c_3 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi,\\
&F_{23} = (c_1 \operatorname{ch}\lambda\varphi + c_2 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi + (c_3 \operatorname{ch}\lambda\varphi + c_4 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi,\\
&F_{34} = (c_2 \operatorname{ch}\lambda\varphi + c_1 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi + (c_4 \operatorname{ch}\lambda\varphi + c_3 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi,\\
&F_{13} = \Phi\left(r,\, \theta + \frac{\ln\rho}{\lambda}\right), \quad F_{24} = \Psi\left(r,\, \theta + \frac{\ln\rho}{\lambda}\right),
\end{aligned}
\tag{73}
$$

где функции $c_i = c_i(\rho, r, \theta)$, Φ и Ψ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} - \cos\theta\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{c_1}{\lambda\rho} - \frac{c_4}{\rho} - \frac{\partial c_4}{\partial\rho} - \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_3}{\partial\theta} = 0,\\
\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{c_3}{\lambda\rho} - \frac{c_2}{\rho} - \frac{\partial c_2}{\partial\rho} - \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_1}{\partial\theta} = 0,\\
\cos\theta\frac{\partial c_1}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial c_3}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial c_1}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial c_3}{\partial\theta} - \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = 0,\\
\cos\theta\frac{\partial c_2}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial c_4}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial c_2}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial c_4}{\partial\theta} + \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0,
\end{gathered}\tag{74}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial c_1}{\partial\rho} + \frac{c_1}{\rho} + \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_2}{\partial\theta} + \frac{c_4}{\lambda\rho} + \cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0,\\
\frac{\partial c_3}{\partial\rho} + \frac{c_3}{\rho} - \frac{c_2}{\lambda\rho} + \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_4}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0,\\
\sin\theta\frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial c_1}{\partial\theta} - \cos\theta\frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial c_3}{\partial\theta} - \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = 0,\\
\sin\theta\frac{\partial c_2}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial c_2}{\partial\theta} - \cos\theta\frac{\partial c_4}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial c_4}{\partial\theta} + \frac{\partial\Psi}{\partial\rho} = 0
\end{gathered}\tag{75}$$

и

$$\begin{gathered}
\frac{\partial c_1}{\partial\rho} - \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_1}{\partial\theta} - \frac{c_2}{\rho} - \frac{c_3}{\lambda\rho} = 0,\quad \frac{\partial c_2}{\partial\rho} - \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_2}{\partial\theta} - \frac{c_1}{\rho} - \frac{c_4}{\lambda\rho} = 0,\\
\frac{\partial c_3}{\partial\rho} + \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_3}{\partial\theta} - \frac{c_4}{\rho} + \frac{c_1}{\lambda\rho} = 0,\quad \frac{\partial c_4}{\partial\rho} - \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_4}{\partial\theta} - \frac{c_3}{\rho} + \frac{c_2}{\lambda\rho} = 0,
\end{gathered}\tag{76}$$

а замена координат задается формулами

$$x^1 = r\cos(\theta-\varphi),\quad x^2 = \rho\,\mathrm{ch}\,(\lambda\varphi),\quad x^3 = r\sin(\theta-\varphi),\quad x^4 = \rho\,\mathrm{sh}\,(\lambda\varphi).\tag{77}$$

Пример. Часть класса $P_{2,9}$ потенциалов можно задать следующим образом $A_i = (0,\ \rho e^{\lambda\varphi}\Phi,\ 0,\ -\rho e^{\lambda\varphi}\Phi)$, где $\Phi = \Phi(r,u) = \Phi\left(r, \theta + \dfrac{\ln\rho}{\lambda}\right)$ — произвольная функция двух переменных, $u = \theta + \lambda^{-1}\ln\rho$. Соответствующий тензор F_{ij} имеет вид

$$\begin{aligned}
&F_{12} = -F_{14} = \rho e^{\lambda\varphi}\left(\Phi'_r\cos(\theta-\varphi) - \frac{\Phi'_u}{r}\sin(\theta-\varphi)\right),\\
&F_{13} = 0,\quad F_{24} = -2\Phi - \frac{2}{\lambda}\Phi'_u,\\
&F_{23} = F_{34} = -\rho e^{\lambda\varphi}\left(\Phi'_r\sin(\theta-\varphi) + \frac{\Phi'_u}{r}\cos(\theta-\varphi)\right),
\end{aligned}\tag{78}$$

где через Φ'_r и Φ'_u обозначены производные по r и u. Подставляя (78) в уравнения Максвелла (3) и разделяя переменные, получим следующие уравнения для Φ:

$$\Phi''_{rr} + \frac{1}{r}\Phi'_r + \frac{1}{r^2}\Phi''_{uu} = 0,\quad \Phi'_r + \frac{1}{\lambda}\Phi''_{ru} = 0,\quad \Phi'_u + \frac{1}{\lambda}\Phi''_{uu} = 0.\tag{79}$$

Общее решение системы (79) имеет вид

$$\Phi = e^{-\lambda u}[A\cos(\lambda\ln r) + B\sin(\lambda\ln r)] + C \quad (A, B, C = \mathrm{const}). \tag{80}$$

Полагая в (80) $B = C = 0$ и подставляя в (78), получим

$$\begin{aligned} F_{12} &= -F_{14} = \frac{A\lambda}{r} e^{-\lambda(\theta-\varphi)} \sin(\theta - \varphi - \lambda\ln r), \quad F_{13} = 0, \\ F_{23} &= F_{34} = \frac{A\lambda}{r} e^{-\lambda(\theta-\varphi)} \cos(\theta - \varphi - \lambda\ln r), \quad F_{24} = 0. \end{aligned} \tag{81}$$

Предложение 13. *Если $A \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором* (81), *допускает двумерную группу $G_S = G_{2,9}$.*

10. **Класс** $W_{2,10}$. $\mathcal{L}_{2,10} = L\{e_{13}, e_{24}\}$. $W_{2,10} = C_{2,10} \cap W_{1,5}$.

Теорема 17. *Тензоры F_{ij}, задающие класс ПМНТ $W_{2,10}$, определяются формулами*

$$\begin{aligned} F_{12} &= (-c_1 \operatorname{ch}\lambda\varphi - c_2 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi + (c_3 \operatorname{ch}\lambda\varphi + c_4 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi, \\ F_{14} &= (c_2 \operatorname{ch}\lambda\varphi + c_1 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi - (c_4 \operatorname{ch}\lambda\varphi + c_3 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi, \\ F_{23} &= (c_1 \operatorname{ch}\lambda\varphi + c_2 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi + (c_3 \operatorname{ch}\lambda\varphi + c_4 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi, \\ F_{34} &= (c_2 \operatorname{ch}\lambda\varphi + c_1 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi + (c_4 \operatorname{ch}\lambda\varphi + c_3 \operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi, \end{aligned} \tag{82}$$

$$F_{13} = F_{13}(\rho, r), \quad F_{24} = F_{24}(\rho, r), \tag{83}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= -k_3\sin\theta + k_4\cos\theta, \quad c_2 = -k_1\sin\theta + k_2\cos\theta, \\ c_3 &= k_3\cos\theta + k_4\sin\theta, \qquad c_4 = k_1\cos\theta + k_2\sin\theta, \end{aligned} \tag{84}$$

$$k_2 = \frac{K}{r\rho}, \quad k_3 = \frac{L}{r\rho} \quad (K,\, L = \mathrm{const}), \tag{85}$$

где функции $F_{13}(\rho, r)$, $F_{24}(\rho, r)$, $k_1 = k_1(\rho, r)$ и $k_4 = k_4(\rho, r)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_1}{\partial r} + \frac{k_1}{r} - \frac{\partial F_{24}}{\partial\rho} = 0, \quad \frac{\partial k_1}{\partial\rho} + \frac{k_1}{\rho} + \frac{\partial F_{24}}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial k_4}{\partial r} + \frac{k_4}{r} - \frac{\partial F_{13}}{\partial\rho} = 0, \quad \frac{\partial k_4}{\partial\rho} + \frac{k_4}{\rho} + \frac{\partial F_{13}}{\partial r} = 0, \end{aligned} \tag{86}$$

а замена координат определяется формулами

$$x^1 = r\cos(\theta - \varphi), \quad x^2 = \rho\operatorname{ch}\varphi, \quad x^3 = r\sin(\theta - \varphi), \quad x^4 = \rho\operatorname{sh}\varphi. \tag{87}$$

Предложение 14. *Если $K \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором*

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = \frac{Kx^1x^2}{((x^1)^2+(x^3)^2)\cdot((x^2)^2-(x^4)^2)}, \quad F_{13}=0,\\
&F_{14} = -\frac{Kx^1x^4}{((x^1)^2+(x^3)^2)\cdot((x^2)^2-(x^4)^2)},\\
&F_{23} = -\frac{Kx^2x^3}{((x^1)^2+(x^3)^2)\cdot((x^2)^2-(x^4)^2)}, \quad F_{24}=0,\\
&F_{34} = -\frac{Kx^3x^4}{((x^1)^2+(x^3)^2)\cdot((x^2)^2-(x^4)^2)},
\end{aligned} \tag{88}
$$

допускает двумерную группу $G_S = G_{2,10}$[6].

11. Здесь опишем класс ПМНТ, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{2,11} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_1 + \mu e_3,\ e_{23} + e_{34} - \mu e_1 + \lambda e_3\}$ $(\lambda = 0, \mu \neq 0 \sim \sim \lambda \neq 0, \mu = 0)$. Рассмотрим случаи: 1) $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ и 2) $\lambda = \mu = 0$.

11.1. **Класс $W_{2,11}$.** Пусть $\lambda = 0$ и $\mu \neq 0$. Тогда имеем $\mathcal{L}_{2,11} = L\{e_{12} - e_{14} + \mu e_3,\ e_{23} + e_{34} - \mu e_1\}$. $W_{2,11} = C_{2,11} \cap W_{1,4b}$.

Теорема 18. *Тензоры F_{ij}, задающие класс ПМНТ $W_{2,11}$, определяются формулами*

$$
\begin{aligned}
&F_{13} = C_1\tilde{x}^2 + C_2, && F_{24} = C_5\tilde{x}^2 + C_6,\\
&F_{23} = \frac{C_1}{2}\left(\tilde{x}^2\right)^2 + C_2\tilde{x}^2 + C_3, && F_{12} = -\frac{C_5}{2}\left(\tilde{x}^2\right)^2 - C_6\tilde{x}^2 + C_7,\\
&F_{34} = -\frac{C_1}{2}\left(\tilde{x}^2\right)^2 - C_2\tilde{x}^2 + C_4, && F_{14} = -\frac{C_5}{2}\left(\tilde{x}^2\right)^2 - C_6\tilde{x}^2 + C_8,
\end{aligned} \tag{89}
$$

$$
C_1 + C_3 + C_4 = 0, \quad C_5 + C_7 - C_8 = 0, \tag{90}
$$

где функции $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$ удовлетворяют уравнениям

$$
\tilde{x}^1\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{(\tilde{x}^1)^2+\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{91a}
$$

$$
-\tilde{x}^1\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{91b}
$$

$$
\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{(\tilde{x}^1)^2+\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{91c}
$$

$$
\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} + \tilde{x}^1\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{92a}
$$

$$
\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{C_2}{\tilde{x}^1} - \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{(\tilde{x}^1)^2+\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{92b}
$$

$$
\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{C_5}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{(\tilde{x}^1)^2+\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{92c}
$$

$$
\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{C_2}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{92d}
$$

[6] Решение получено при нахождении представителя класса $W_{1,5}$.

$$\frac{(\tilde{x}^1)^2-\mu^2}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3}-\tilde{x}^1\tilde{x}^3\frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4}=0, \tag{93a}$$

$$\frac{(\tilde{x}^1)^2-\mu^2}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3}-\tilde{x}^1\tilde{x}^3\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4}-C_1+\frac{\mu}{\tilde{x}^1}C_5=0, \tag{93b}$$

$$\frac{(\tilde{x}^1)^2-\mu^2}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3}-\tilde{x}^1\tilde{x}^3\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4}+C_2-\frac{\mu}{\tilde{x}^1}C_6=0, \tag{93c}$$

$$\frac{(\tilde{x}^1)^2-\mu^2}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3}-\tilde{x}^1\tilde{x}^3\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4}=0, \tag{93d}$$

$$\frac{(\tilde{x}^1)^2-\mu^2}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3}-\tilde{x}^1\tilde{x}^3\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4}+C_5+\frac{\mu}{\tilde{x}^1}C_1=0, \tag{93e}$$

$$\frac{(\tilde{x}^1)^2-\mu^2}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3}-\tilde{x}^1\tilde{x}^3\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4}+C_6+\frac{\mu}{\tilde{x}^1}C_2=0 \tag{93f}$$

и

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3}-\tilde{x}^1\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4}-\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3}=0, \tag{94a}$$

$$\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^1}+\frac{C_6}{\tilde{x}^1}-\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3}+\frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4}+\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3}=0, \tag{94b}$$

$$-\tilde{x}^1\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4}-\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3}+\frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^1}+\frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4}=0, \tag{94c}$$

$$\frac{C_6}{\tilde{x}^1}+\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^1}+\frac{(\tilde{x}^1)^2+\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4}+\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^3}+\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^3}=0, \tag{94d}$$

$$-\frac{C_1}{\tilde{x}^1}+\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1}+\frac{(\tilde{x}^1)^2+\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4}+\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^1}+\frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^4}+\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3}=0, \tag{94e}$$

а связь между координатами задается формулами (63).

Пример. Классу $W_{2,11}$ принадлежит ПМНТ, определяемое тензором

$$\begin{aligned}
&F_{12}=-\frac{C_5}{2}\left(\tilde{x}^2\right)^2-C_6\tilde{x}^2+C_7,\quad F_{13}=C_2,\quad F_{14}=F_{12}+C_5,\\
&F_{23}=-F_{34}=C_2\tilde{x}^2+C_3,\quad F_{24}=C_5\tilde{x}^2+C_6,
\end{aligned} \tag{95}$$

где

$$\begin{aligned}
&C_2=-\frac{K\tilde{x}^1\tilde{x}^3}{[(\tilde{x}^1)^2-\mu^2]^{3/2}},\quad C_3=\frac{K\mu\{3(\tilde{x}^1\tilde{x}^3)^2+2\tilde{x}^4[(\tilde{x}^1)^2-\mu^2]\}}{2\tilde{x}^1[(\tilde{x}^1)^2-\mu^2]^{5/2}},\\
&C_5=\frac{K}{[(\tilde{x}^1)^2-\mu^2]^{1/2}},\quad C_6=-\frac{K\mu\tilde{x}^3}{[(\tilde{x}^1)^2-\mu^2]^{3/2}},\quad C_7=\frac{K[(\tilde{x}^3)^2-2}{2[(\tilde{x}^1)^2-\mu^2]^{3/2}]}
\end{aligned} \tag{96}$$

($K=\mathrm{const}$).

Предложение 15. *Если $K\neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором* (95)–(96), *допускает двумерную группу $G_S=G_{2,11}$.*

11.2. **Класс** $W_{2,11a}$. $\lambda=\mu=0$. $\mathcal{L}_{2,11a}=L\{e_{12}-e_{14},\,e_{23}+e_{34}\}$.

Теорема 19. *Тензоры F_{ij}, задающие класс ПМНТ $W_{2,11a}$, определяются формулами*

$$\begin{aligned}
&F_{12} = -\frac{C_5}{2}\left(\left(\tilde{x}^2\right)^2 - \left(\tilde{x}^3\right)^2\right) - C_1\tilde{x}^2\tilde{x}^3 - C_4\tilde{x}^2 - C_8\tilde{x}^3 + C_9,\\
&F_{13} = C_1\tilde{x}^2 - C_5\tilde{x}^3 + C_8, \quad F_{14} = F_{12} + C_5,\\
&F_{23} = \frac{C_1}{2}\left(\left(\tilde{x}^2\right)^2 - \left(\tilde{x}^3\right)^2\right) - C_5\tilde{x}^2\tilde{x}^3 + C_8\tilde{x}^2 - C_4\tilde{x}^3 - C_{10},\\
&F_{24} = C_5\tilde{x}^2 + C_1\tilde{x}^3 + C_4, \quad F_{34} = -F_{23} - C_1,
\end{aligned} \tag{97}$$

где

$$\begin{aligned}
&C_1 = \frac{\Phi(\tilde{x}^4/\tilde{x}^1)}{[(\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^4)^2]^{\frac{1}{2}}}, \; C_4 = \frac{L}{(\tilde{x}^1)^2}, \; C_5 = \frac{\Psi(\tilde{x}^4/\tilde{x}^1)}{[(\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^4)^2]^{\frac{1}{2}}},\\
&C_8 = \frac{K}{(\tilde{x}^1)^2}, \quad C_9 = \frac{1}{2}[B(\tilde{x}^1) - C_5], \quad C_{10} = \frac{1}{2}[C_1 - D(\tilde{x}^1)],
\end{aligned} \tag{98}$$

Φ, Ψ, B и D — произвольные функции одной переменной, K и L — произвольные постоянные, а связь между координатами имеет вид

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}^1 = x^2 + x^4, \quad \tilde{x}^2 = -\frac{x^1}{x^2 + x^4}, \quad \tilde{x}^3 = \frac{x^3}{x^2 + x^4},\\
&\tilde{x}^4 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2.
\end{aligned} \tag{99}$$

Пример. Положим в (98) $\Phi = B = D = K = L = 0$. Тогда $C_1 = C_4 = C_8 = C_{10} = 0$,

$$C_5 = \frac{\Psi(\tilde{x}^4/\tilde{x}^1)}{[(\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^4)^2]^{1/2}}, \quad C_9 = -\frac{C_5}{2}, \tag{100}$$

а формулы (97) принимают вид

$$\begin{aligned}
&F_{12} = -\frac{C_5}{2}\left(\left(\tilde{x}^2\right)^2 - \left(\tilde{x}^3\right)^2\right) + C_9, \quad F_{13} = -C_5\tilde{x}^3,\\
&F_{14} = F_{12} + C_5, \quad F_{23} = -F_{34} = -C_5\tilde{x}^2\tilde{x}^3, \quad F_{24} = C_5\tilde{x}^2.
\end{aligned} \tag{101}$$

Предложение 16. *Если $\Psi \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором* (101)–(100), *допускает двумерную группу $G_S = G_{2,11a}$.*

12. Класс $W_{2,12}$. $\mathcal{L}_{2,12} = L\{e_{12} - e_{14},\ e_{24} + \lambda e_3\}$. $W_{2,12} = C_{2,12} \cap W_{1,4a}$.

Теорема 20. *Класс ПМНТ $W_{2,12}$, допускающих группу $G_{2,12}$, задается тензором F_{ij} вида* (89)–(90), *где функции*

$$C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\tilde{x}^1\frac{\partial C_2}{\partial\tilde{x}^4}+\frac{\partial C_5}{\partial\tilde{x}^3}=0, \tag{102a}$$

$$\tilde{x}^1\frac{\partial C_3}{\partial\tilde{x}^4}+\frac{\partial C_1}{\partial\tilde{x}^1}+\frac{(\tilde{x}^1)^2+\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_1}{\partial\tilde{x}^4}+\frac{\partial C_6}{\partial\tilde{x}^3}=0, \tag{102b}$$

$$-\frac{C_2}{\tilde{x}^1}-\frac{\partial C_2}{\partial\tilde{x}^1}-\frac{(\tilde{x}^1)^2+\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial\tilde{x}^4}+\frac{\partial C_7}{\partial\tilde{x}^3}=0, \tag{102c}$$

$$-\frac{C_5}{\tilde{x}^1}+\frac{\partial C_7}{\partial\tilde{x}^1}-\frac{\partial C_8}{\partial\tilde{x}^1}-\frac{(\tilde{x}^1)^2+\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_8}{\partial\tilde{x}^4}+\frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_7}{\partial\tilde{x}^4}=0, \tag{102d}$$

$$-\tilde{x}^1\frac{\partial C_4}{\partial\tilde{x}^4}+\frac{\partial C_6}{\partial\tilde{x}^3}+\frac{\partial C_1}{\partial\tilde{x}^1}+\frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_1}{\partial\tilde{x}^4}=0, \tag{102e}$$

$$\frac{C_2}{\tilde{x}^1}+\frac{\partial C_2}{\partial\tilde{x}^1}+\frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial\tilde{x}^4}-\frac{\partial C_8}{\partial\tilde{x}^3}=0, \tag{102f}$$

$$\frac{\partial C_4}{\partial\tilde{x}^1}+\frac{(\tilde{x}^1)^2+\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_4}{\partial\tilde{x}^4}-\frac{\partial C_6}{\partial\tilde{x}^3}+\frac{\partial C_3}{\partial\tilde{x}^1}+\frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_3}{\partial\tilde{x}^4}=0, \tag{102g}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial\tilde{x}^3}-\tilde{x}^1\frac{\partial C_6}{\partial\tilde{x}^4}=0, \tag{103a}$$

$$\frac{\partial C_6}{\partial\tilde{x}^1}+\frac{C_6}{\tilde{x}^1}-\frac{\partial C_3}{\partial\tilde{x}^3}+\frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_6}{\partial\tilde{x}^4}=0, \tag{103b}$$

$$-\tilde{x}^1\frac{\partial C_7}{\partial\tilde{x}^4}-\frac{\partial C_2}{\partial\tilde{x}^3}+\frac{\partial C_5}{\partial\tilde{x}^1}+\frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_5}{\partial\tilde{x}^4}=0, \tag{103c}$$

$$\frac{C_6}{\tilde{x}^1}+\frac{\partial C_6}{\partial\tilde{x}^1}+\frac{(\tilde{x}^1)^2+\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_6}{\partial\tilde{x}^4}+\frac{\partial C_4}{\partial\tilde{x}^3}=0, \tag{103d}$$

$$-\frac{C_1}{\tilde{x}^1}+\frac{\partial C_3}{\partial\tilde{x}^1}+\frac{(\tilde{x}^1)^2+\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_3}{\partial\tilde{x}^4}+\frac{\partial C_4}{\partial\tilde{x}^1}+\frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_4}{\partial\tilde{x}^4}=0 \tag{103e}$$

и

$$\tilde{x}^1\frac{\partial C_1}{\partial\tilde{x}^1}+\lambda\frac{\partial C_1}{\partial\tilde{x}^3}+\left(\tilde{x}^1\right)^2\frac{\partial C_1}{\partial\tilde{x}^4}-C_1=0, \tag{104a}$$

$$\tilde{x}^1\frac{\partial C_2}{\partial\tilde{x}^1}+\lambda\frac{\partial C_2}{\partial\tilde{x}^3}+\left(\tilde{x}^1\right)^2\frac{\partial C_2}{\partial\tilde{x}^4}=0, \tag{104b}$$

$$\tilde{x}^1\frac{\partial C_3}{\partial\tilde{x}^1}+\lambda\frac{\partial C_3}{\partial\tilde{x}^3}+\left(\tilde{x}^1\right)^2\frac{\partial C_3}{\partial\tilde{x}^4}-C_4=0, \tag{104c}$$

$$\tilde{x}^1\frac{\partial C_5}{\partial\tilde{x}^1}+\lambda\frac{\partial C_5}{\partial\tilde{x}^3}+\left(\tilde{x}^1\right)^2\frac{\partial C_5}{\partial\tilde{x}^4}-C_5=0, \tag{104d}$$

$$\tilde{x}^1\frac{\partial C_6}{\partial\tilde{x}^1}+\lambda\frac{\partial C_6}{\partial\tilde{x}^3}+\left(\tilde{x}^1\right)^2\frac{\partial C_6}{\partial\tilde{x}^4}=0, \tag{104e}$$

$$\tilde{x}^1\frac{\partial C_7}{\partial\tilde{x}^1}+\lambda\frac{\partial C_7}{\partial\tilde{x}^3}+\left(\tilde{x}^1\right)^2\frac{\partial C_7}{\partial\tilde{x}^4}+C_8=0. \tag{104f}$$

а связь между координатами задается формулами (58).

Пример. Используя представление класса потенциалов $P_{2,12}$, положим

$$A_1=\tilde{x}^1\tilde{x}^2\Phi,\quad A_2=\frac{\tilde{x}^1}{2}\left(\left(\tilde{x}^2\right)^2-1\right)\Phi,\quad A_3=\Psi,\quad A_4=A_2+\tilde{x}^1\Phi, \tag{105}$$

где $\Phi = \Phi(u, v)$, $\Psi = \Psi(u, v)$ и

$$u = \tilde{x}^3 - \lambda \ln \tilde{x}^1 = x^3 - \lambda \ln(x^2 + x^4),$$
$$v = \tilde{x}^4 - \frac{1}{2}\left(\tilde{x}^1\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - \left(x^4\right)^2\right). \tag{106}$$

Соответствующий тензор F_{ij} имеет вид

$$\begin{aligned}
&F_{12} = \frac{x^1}{x^2 + x^4}(\Phi - \lambda\Phi_u) + \frac{x^1}{2}\left[x^2 - x^4 + \frac{\left(x^1\right)^2}{x^2 + x^4}\right]\Phi_v,\\
&F_{13} = x^1(\Phi_u + \Psi_v), \quad F_{14} = F_{12},\\
&F_{23} = \left[x^2 + x^4 - \frac{\left(x^1\right)^2}{x^2 + x^4}\right]\frac{\Phi_u}{2} - \frac{\lambda\Psi_u}{x^2 + x^4} + x^2\Psi_v,\\
&F_{24} = \Phi - \lambda\Phi_u + \left[\frac{\left(x^1\right)^2}{2} - x^2(x^2 + x^4)\right]\Phi_v,\\
&F_{34} = \left[x^2 + x^4 + \frac{\left(x^1\right)^2}{x^2 + x^4}\right]\frac{\Phi_u}{2} + \frac{\lambda\Psi_u}{x^2 + x^4} + x^4\Psi_v.
\end{aligned} \tag{107}$$

Подставляя (107) в уравнения Максвелла (3), получим следующее решение

$$\begin{aligned}
&F_{12} = F_{14} = \frac{Mx^1}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = -\frac{Kx^1}{2v^{3/2}}, \quad F_{24} = M,\\
&F_{23} = \frac{Mu + L}{x^2 + x^4} - \frac{Kx^2}{2v^{3/2}}, \quad F_{34} = -\frac{Mu + L}{x^2 + x^4} - \frac{Kx^4}{2v^{3/2}},
\end{aligned} \tag{108}$$

где K, L и M — произвольные константы.

Предложение 17. *Если $M \neq 0$ и $K \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором* (108), *допускает двумерную группу $G_S = G_{2,12}$.*

Заключение. В работе установлено существование пространств Максвелла с нулевым током, допускающих двумерные подгруппы группы Пуанкаре из списка в работе И. В. Белько [1]. Поскольку любая из двумерных подгрупп сопряжена одной из подгрупп этого списка, то тем самым установлено, что *для каждой двумерной подгруппы группы Пуанкаре существует пространство Максвелла с нулевым током, допускающее эту (и только эту!) подгруппу.*

Список использованной литературы

1. *Белько И. В.* Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.

2. *Иванова А. С.* Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих смещение по одной из пространственных координат // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. – 1999. – Вып. 2. – С. 50–62.

3. *Иванова А. С.* Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих эллиптические винты // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2004. – № 1. – С. 51–62.

4. *Иванова А. С.* Электромагнитные волны, допускающие трансляции в изотропном направлении // Фундаментальная и прикладная математика. – 2004. – Т. 10. – № 1. – С. 49–56.

5. *Иванова А. С.* Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих гиперболические винты // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2005. – № 2. – С. 61–72.

6. *Иванова А. С.* Шесть классов электромагнитных волн, допускающих параболические винты // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2006. – Вып. 1 (3). – С. 17–22.

7. *Иванова А. С., Паринов М. А.* Некоторые классы электромагнитных волн, допускающих параболические винты // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – № 7. – С. 79–92.

8. *Иванова А. С., Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца для некоторых классов электромагнитных полей // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. – 2002. – Т. 236. – С. 197–203.

9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. – 5-е изд. – М.: Наука, 1967. – 460 с.

10. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна – Максвелла и уравнения Лоренца. – Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. – 180 с.

11. *Паринов М. А.* Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. – 2004. – Т. 10. – № 1. – С. 183–237.

12. *Паринов М. А.* Шесть классов пространств Максвелла, допускающих нетривиальные группы симметрий // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2006. – № 1. – С. 170–171.

13. *Паринов М. А.* Об одном способе получения представителей классов пространств Максвелла // Современная математика и ее приложения. – 2006. – Т. 38. – С. 76–81.

14. *Паринов М. А.* Классификация потенциальных структур на пространстве Минковского по подгруппам группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – № 7. – С. 177–225.

15. *Паринов М. А.* Статические пространства Максвелла с нулевым током // Современная математика и ее приложения. – 2007. – Т. 57. – С. 47–53.

Поступила в редакцию 30.11.2008.