Математика и её приложения: ЖИМО. 2009. Вып. 1 (6). С. 139 – 146.

УДК 512.54

С. И. Хашин[1], Ю. А. Хашина[2]

Параметризация пространства ортогональных вейвлетов

Ключевые слова: вейвлет, дискретные вейвлеты, ортогональные вейвлеты.

Построен эффективный способ параметризации всех дискретных ортогональных вейвлетов с конечным носителем. Найдена эффективность построенных вейвлетов.

We construct the effective method of parameterization of all discrete orthogonal wavelets with finite support. We ground the efficiency of this wavelets.

1. Введение

На сегодняшний день вейвлеты — один из основных инструментов исследования в компьютерой графике, цифровой обработке сигналов и во многих других областях [1, 2, 3, 5]. В настоящей статье мы будем исследовать лишь дискретные ортогональные вейвлеты. Они появились первыми и по сей день являются наиболее часто используемым классом вейвлетов, а также наболее удобным. Для нахождения тех или иных конкретных ортогональных вейвлетов приходится решать довольно сложные системы нелинейных (полиномиальных) уравнений от большого числа переменных (см. напр., [1, 2]). Однако, оказывается, что на пространстве всех ортогональных вейвлетов действует довольно большая группа преобразований, и с ее помощью все такие вейвлеты могут быть эффективно параметризованы. Переход от коэффициентов вейвлета к его параметрам существенно облегчает как нахождение вейвлета с данными свойствами, так и дальнейшую работу с ним [6, 7]. Другие подходы к той же задаче можно найти в [4, 7].

2. Дискретные ортогональные вейвлеты

Пусть L — пространство действительнозначных функций на $\mathbf{Z}$ с конечным носителем. На пространстве L будем рассматривать обычное ска-

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: `khash2@mail.ru`. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-07-00155).

[2]Ивановский государственный университет; E-mail: `khashina_julia@mail.ru`. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-07-00155).

лярное произведение и обычную евклидову норму. Через R_k обозначим оператор сдвига на k:

$$R_k(f)(x) = f(x-k). \tag{1}$$

Определение 1. Пусть $f(x)$ — функция из L. Обозначим через $\rho_2(f)$ подпространство в L, порожденное всеми сдвигами функции f на четное число:

$$\rho_2(f) = \{R_{2k}f, k \in \mathbf{Z}\}. \tag{2}$$

Определение 2. Пусть $a(x),\ b(x)$ — пара функций из L, удовлетворяющая условиям:

(1) $(a,a) = (b,b) = 1$;

(2) $(a, R_{2k}(a)) = 0,\ \forall k \in \mathbf{Z}, k \neq 0$;

(3) $(b, R_{2k}(b)) = 0,\ \forall k \in \mathbf{Z}, k \neq 0$;

(4) $(a, R_{2k}(b)) = 0,\ \forall k \in \mathbf{Z}$.

Эти условия означают, что система функций $W = (R_{2k}a, R_{2k}b)$, полученных из пары (a,b) сдвигом на все четные числа образует ортонормальный базис в пространстве L. В этом случае будем называть базис W *ортогональным вейвлет-базисом*, а саму пару функций (a,b) — *ортогональным вейвлетом.*

Таким образом, каждый ортогональный вейвлет задает разложение пространства L в прямую сумму двух подпространств: $L = L' \oplus L''$, где L' — подпространство, порожденное векторами $(R_{2k}a)$, а L'' — векторами $(R_{2k}b)$. При этом векторы $(R_{2k}a)$ образуют ортонормальный базис в пространстве L', а векторы $(R_{2k}b)$ — в пространстве L''.

Пример 1. Функции Хаара. Пусть функции $h_0(x), h_1(x)$ равны 0 при отрицательных x, а для неотрицательных

$$\begin{array}{rlll} h_0(x) = & \alpha, & \alpha, & 0, \ \ldots \\ h_1(x) = & \alpha, & -\alpha, & 0, \ \ldots \end{array} \tag{3}$$

где $\alpha = 1/\sqrt{2}$. Пространство L' состоит из функций, значения которых в двух соседних точках равны, а L'' — из функций, значения которых в двух соседних точках равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Других вейвлетов, носители которых сосредоточены в двух соседних точках, не существует.

3. Ортогональные вейвлеты с носителем длины 4

Предположим, что функции $(a,\, b)$, составляющие ортогональный вейвлет, имеют не более четырех ненулевых компонент: $(a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3)$ и $(b_0,\, b_1,\, b_2,\, b_3)$ соответственно. Тогда наложенные на них условия будут выглядеть так:

$$\begin{array}{ll}
(4.1) & a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \\
(4.2) & b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \\
(4.3) & a_0 a_2 + a_1 a_3 = 0, \\
(4.4) & b_0 b_2 + b_1 b_3 = 0, \\
(4.5) & a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0, \\
(4.6) & a_0 b_2 + a_1 b_3 = 0, \\
(4.7) & a_2 b_0 + a_3 b_1 = 0.
\end{array} \tag{4}$$

Из уравнений (4.1) и (4.3) получим, что вектор $(a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3)$ должен иметь вид

$$(\sin\alpha\cos\varphi,\, \sin\alpha\sin\varphi,\, -\cos\alpha\sin\varphi,\, \cos\alpha\cos\varphi) \tag{5}$$

для некоторых α, φ, а из уравнений (4.2) и (4.4) получаем вид вектора $(b_0,\, b_1,\, b_2,\, b_3)$:

$$(\sin\alpha_1\cos\varphi_1,\, \sin\alpha_1\sin\varphi_1,\, -\cos\alpha_1\sin\varphi_1,\, \cos\alpha_1\cos\varphi_1) \tag{6}$$

для некоторых α_1, φ_1. Уравнения (4.6) и (4.7) будут выполняться лишь в случае $\varphi = \varphi_1$, а уравнение (4.5) будет выполнено лишь в случае $\alpha_1 = \alpha + \pi/2$. Общее решение системы (4) будет выглядеть так:

$$\begin{array}{ll}
(a_i) = & (\sin\alpha\cos\varphi, \quad \sin\alpha\sin\varphi, \quad -\cos\alpha\sin\varphi, \quad \cos\alpha\cos\varphi)\,, \\
(b_i) = & (\cos\alpha\cos\varphi, \quad \cos\alpha\sin\varphi, \quad \sin\alpha\sin\varphi, \quad -\sin\alpha\cos\varphi)
\end{array} \tag{7}$$

для некоторых α, φ.

Для использования в компьютерной графике (как и для многих других приложений) желательно выбрать вейвлет-базис так, чтобы скалярные произведения исходных данных f_i с векторами из второй половины базиса $R_{2k}b$ имели бы наименьшее среднеквадратичное значение. Для этого естественно выбрать вектор $(b_0,\, b_1,\, b_2,\, b_3)$ так, чтобы он был ортогонален полиномам степени 0 и 1, т. е. выполнялись условия

$$\begin{array}{l}
b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 0, \\
0 \cdot b_0 + 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 3 \cdot b_3 = 0.
\end{array} \tag{8}$$

Решением этих уравнений будет вейвлет Добеши $D4$ [2]. Он получается, если в формулах (7) положить $\alpha = \pi/12$, $\varphi = \pi/3$:

$$(b_0, b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}},\ \frac{-\sqrt{3}-3}{4\sqrt{2}},\ \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}} \right) \tag{9}$$

или, приближенно:

$$(b_0, b_1, b_2, b_3) \approx (0.48296291,\ -0.83651630,\ 0.22414387,\ 0.12940952). \quad (10)$$

4. Параметризация ортогональных вейвлетов

Пусть $L = L_2(\mathbf{Z})$ — гильбертово пространство бесконечных в обе стороны последовательностей с суммируемым квадратом. Элементы этого пространства $f = \{\ldots,\ f(-n),\ \ldots,\ f(0),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots\}$ будем называть *функциями.* Через ρ_k обозначим оператор сдвига на k:

$$\rho_k(f)(x) = f(x - k). \quad (11)$$

Функцию f будем называть *порождающей функцией ортогонального вейвлета*, или, кратко, *WO-функцией*, если

$$(f, \rho_{2k} f) = \delta_{0k}. \quad (12)$$

Предложение 1. *Пусть f — WO-функция с конечным носителем длины большей 1. Тогда длина носителя является четной.*

Доказательство. Предположим, что от нуля отличны лишь следующие элементы последовательности $\{f(i)\}$: $f(0),\ \ldots,\ f(2n)$ при некотором $k > 1$. Условие ортогональности (12) при $k = n$ будет выглядеть так: $f(0)f(2n) = 0$. Следовательно, один из сомножителей равен 0 и длина носителя будет четной. ■

Замечание 1. Функция с носителем длины 1 и ненулевым значением 1 является WO-функцией.

Функцию f можно рассматривать как последовательность двумерных векторов двумя способами: $f = \{(u(i)\} = \{(v(i)\}$, где

$$u(i) = (f(2i),\ f(2i+1)) \ \text{ и } \ v(i) = (f(2i+1),\ f(2i+2)).$$

Например, пусть ненулевые компоненты функции f таковы:

$$f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 3,\ f(4) = 4.$$

Тогда ненулевые компоненты последовательности $u(i)$ будут следующими

$$u(0) = (0, 1),\ u(1) = (2, 3),\ u(2) = (4, 0),$$

а ненулевые компоненты последовательности $v(i)$ —

$$v(0) = (1, 2),\ v(1) = (3, 4).$$

Эти представления функции f будем называть *четным* и *нечетным* разложениями соответственно. По каждому из разложений однозначно восстанавливается исходная функция.

Обозначим через r_φ оператор поворота плоскости (x, y) на угол φ против часовой стрелки:

$$\begin{cases} x' = \cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y, \\ y' = -\sin(\varphi)x + \cos(\varphi)y. \end{cases}$$

Определение 3. Пусть $f \in L$ — некоторая функция и пусть $u = \{u(i)\}$ и $v = \{v(i)\}$ — её четное и нечетное разложения соответственно. Её *четным поворотом* на угол φ назовем функцию $R_\varphi f$, соответствующую последовательности векторов $\{r_\varphi u(i)\}$. *Нечетным поворотом* назовем функцию $L_\varphi f$, полученную тем же способом из последовательности v.

Выпишем, для наглядности, координаты функций $R_\varphi f$ и $L_\varphi f$, начиная с 0-го индекса:

$$\begin{array}{ll} & \ldots, \\ R_\varphi f(0) & = \cos(\varphi)f(0) + \sin(\varphi)f(1), \\ R_\varphi f(1) & = -\sin(\varphi)f(1) + \cos(\varphi)f(0), \\ R_\varphi f(2) & = \cos(\varphi)f(2) + \sin(\varphi)f(3), \\ R_\varphi f(3) & = -\sin(\varphi)f(3) + \cos(\varphi)f(2), \\ & \ldots \end{array} \tag{13}$$

и

$$\begin{array}{ll} & \ldots, \\ L_\varphi f(-1) & = \cos(\varphi)f(-1) + \sin(\varphi)f(0), \\ L_\varphi f(0) & = -\sin(\varphi)f(0) + \cos(\varphi)f(-1), \\ L_\varphi f(1) & = \cos(\varphi)f(1) + \sin(\varphi)f(2), \\ L_\varphi f(2) & = -\sin(\varphi)f(2) + \cos(\varphi)f(1), \\ & \ldots . \end{array} \tag{14}$$

Пример 2. Пусть $f(i) = 0$ для всех i, кроме 0, и $f(0) = 1$. Тогда

$$\begin{array}{ll} & \ldots, \\ R_\varphi f(-1) & = 0, \\ R_\varphi f(0) & = \cos(\varphi), \\ R_\varphi f(1) & = \cos(\varphi), \\ R_\varphi f(2) & = 0, \\ & \ldots, \end{array} \tag{15}$$

и

$$
\begin{array}{ll}
 & \ldots, \\
L_\varphi f(-2) & = 0, \\
L_\varphi f(-1) & = \sin(\varphi), \\
L_\varphi f(0) & = -\sin(\varphi), \\
L_\varphi f(1) & = 0, \\
 & \ldots .
\end{array} \tag{16}
$$

Замечание 2. $R_{\varphi+\pi} f = -R_\varphi f$ и $L_{\varphi+\pi} f = -L_\varphi f$.

Замечание 3. Операторы R_φ и L_φ не коммутируют. Например, для вектора f из предыдущего примера,

$$
\begin{array}{ll}
 & \ldots, \\
L_\psi R_\varphi f(-2) & = 0, \\
L_\psi R_\varphi f(-1) & = \sin(\psi)\cos(\varphi), \\
L_\psi R_\varphi f(0) & = -\sin(\psi)\cos(\varphi), \\
L_\psi R_\varphi f(1) & = \cos(\psi)\cos(\varphi), \\
L_\psi R_\varphi f(2) & = \cos(\psi)\cos(\varphi), \\
L_\psi R_\varphi f(3) & = 0, \\
 & \ldots,
\end{array} \tag{17}
$$

но

$$
\begin{array}{ll}
 & \ldots, \\
R_\varphi L_\psi f(-3) & = 0, \\
R_\varphi L_\psi f(-2) & = \sin(\varphi)\cos(\psi), \\
R_\varphi L_\psi f(-1) & = -\sin(\varphi)\cos(\psi), \\
R_\varphi L_\psi f(0) & = \cos(\varphi)\cos(\psi), \\
R_\varphi L_\psi f(1) & = \cos(\varphi)\cos(\psi), \\
R_\varphi L_\psi f(2) & = 0, \\
 & \ldots .
\end{array} \tag{18}
$$

Предложение 2. *Операторы R_φ и L_φ переводят WO-функции в WO-функции.*

Доказательство. Условия ортогональности (12) функции f могут быть выписаны через скалярные произведения как четного, так и нечетного разложения f. А при одновременном повороте всех векторов на один и тот же угол скалярные произведения не изменяются, поэтому условия (12) не изменятся. ■

Следствие 1. *На множестве WO-функций действует группа*

$$
G = S^1 * S^1,
$$

представляющая собой свободное произведение двух окружностей.

Теорема 1. *Пусть f — WO-функция с конечным носителем длины $2k$, $k > 0$. Тогда ее с помощью k четных и нечетных поворотов можно перевести в функцию с носителем длины 1. Углы поворотов при этом определяются однозначно с точностью до π.*

Доказательство. Предположим, что от 0 отличны лишь

$$f(0),\ \ldots,\ f(2k-1).$$

Тогда у двумерного вектора $(f(0), f(1))$ первая координата отлична от 0. Существует единственный угол поворота φ (с точностью до π), переводящий вектор $(f(0),\ f(1))$ в вектор с нулевой первой координатой. Применим к функции f *четный* поворот L_φ: $g = L_\varphi f$. По построению, $g(0) = 0$. Так как длина носителя должна быть четной, получим, что и $g(2k-1) = 0$. Таким образом, существует единственный с точностью до π угол такой, что длина носителя функции $g = L_\varphi f$ меньше $2k$.

Предположим теперь, что от 0 отличны лишь $f(1),\ \ldots,\ f(2k)$. Тогда у двумерного вектора $(f(1),\ f(2))$ первая координата отлична от 0. Существует единственный угол поворота ψ (с точностью до π), переводящий вектор $(f(1),\ f(2))$ в вектор с нулевой первой координатой. Применим к функции f *нечетный* поворот R_ψ: $g = L_\psi f$. По построению, $g(1) = 0$. Так как длина носителя должна быть четной, получим, что и $g(2k) = 0$. Таким образом, существует единственный с точностью до π угол такой, что длина носителя функции $g = L_\psi f$ меньше $2k$. ■

Пример 3. Пусть f — WO-функция, соответствующая вейвлету Добеши D4,

$$f = (\sqrt{3}+1, -\sqrt{3}-3, 3-\sqrt{3}, \sqrt{3}-1)/\sqrt{8},$$

и $g = L_{\pi/6} f$. Тогда

$$\begin{aligned} g(0) &= 0,\\ g(1) &= -\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)/4,\\ g(2) &= \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)/4,\\ g(3) &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Далее, пусть $h = R_{-\pi/12} g$. Тогда

$$\begin{aligned} h(0) &= 0,\\ h(1) &= -1,\\ h(0) &= 0,\\ h(3) &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, порождающая функция вейвлета Добеши D4 получается из функции $f_0 = (\ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots)$.

Список литературы

1. *Воробьев В. И., Грибунин В. Г.* Теория и практика вейвлет-преобразования. – С.-Пб.: ВУС, 1999. – 203 с.
2. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – М.: РХД, 2001. – 461 с.
3. *Дремин И. М., Иванов О. В., Нечитайло В. А.* Вейвлеты и их использование // УФН. – 2001 – Т. 171. – № 5. – С. 465–501.
4. *Умняшкин С. В., Кочетков М. Е.* Анализ эффективности использования дискретных ортогональных преобразований для цифрового кодирования коррелированных данных // Изв. вузов. Электроника. – 1998. – № 6. – С. 79–84.
5. *Фрейзер М.* Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры. – М.: Бином, 2008. – 488 с.
6. *Хашин С. И.* Сравнение эффективности дискретных вейвлетов // Математические методы распознавания образов. Доклады XIV Всероссийской конференции. – М.: Макспресс, 2009. – С. 473–476.
7. *Karel J. M. H. and Co.* Optimal discrete wavelet design for cardiac signal processing // Proc. of the 2005 IEEE Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference, September 1–4. – Shanghai (China), 2005. – P. 769–772.

Поступила в редакцию 17.10.2009