Математика и её приложения: ЖИМО. 2009. Вып. 1 (6). С. 59 – 82.

УДК 514.8 + 514.74

М. А. Паринов[1]

Пространства Максвелла с нулевым током, допускающие одномерные подгруппы группы Пуанкаре

Ключевые слова: группа Пуанкаре, уравнения Максвелла, пространство Максвелла, электромагнитная волна.

Дано описание классов пространств Максвелла с нулевым током (в частности, электромагнитных волн), допускающих одномерные подгруппы группы Пуанкаре. Найдены представители всех этих классов. Установлено существование таких пространств, допускающих любую одномерную подгруппу группы Пуанкаре.

We describe classes $W_{1,l}$ of Maxwell spaces without current that admit one-dimensional subgroups of the Poincaré group. We construct representatives of these classes.

1. Введение. *Пространство Максвелла* [11] есть тройка (M, g, F), где M — гладкое 4-мерное многообразие, $g = g_{ij}\,dx^i dx^j$ — псевдоевклидова метрика лоренцевой сигнатуры $(- - -+)$, а $F = \frac{1}{2}F_{ij}\,dx^i \wedge dx^j$ — обобщенная симплектическая структура (замкнутая дифференциальная 2-форма) на M. Без ограничения общности под M можно понимать область в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$. Любому электромагнитному полю соответствует свое пространство Максвелла.

Среди всех пространств Максвелла особый интерес представляют такие, для которых группа $G_S = G_g \cap G_F$ преобразований многообразия M, сохраняющих g и F, нетривиальна. Например, уравнения Лоренца для таких (M, g, F) допускают первые интегралы [7]. В работах [11, 13, 14] описана классификация пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре с использованием классификации подгрупп группы Пуанкаре [1].

На основе групповой классификации пространств Максвелла в работах [2, 3, 4, 5, 6, 8, 9] описаны классы электромагнитных волн, допускающих подгруппы группы Пуанкаре. При этом электромагнитная волна трактуется в соответствии с [10], § 46, как пространство Максвелла, задаваемое непостоянным по времени кососимметричным тензором F_{ij} $(\partial F_{ij}/\partial x^4 \neq 0)$ на пространстве Минковского, который удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\partial_{[i}F_{jk]} = 0, \tag{1.1}$$

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: mparinov@ivanovo.ac.ru.

$$\nabla_k F^{ik} = 0. \tag{1.2}$$

Однако, условие $\partial F_{ij}/\partial x^4 \neq 0$ не является ковариантным, и поэтому с теоретико-групповой точки зрения представляется неестественным. Для завершения групповой классификации пространств Максвелла с нулевым током необходимо добавить классы *статических пространств Максвелла* ($\partial F_{ij}/\partial x^4 = 0$), для которых выполняется уравнение (1.2)[1]. Классы статических пространств Максвелла описаны в работе [12].

Следует сказать, что описание классов $W_{k,l}$ электромагнитных волн в работах [2, 3, 4, 5, 6, 8, 9] страдает тем недостатком, что не для каждой группы $G_{k,l}$ — подгруппы группы Пуанкаре из списка в [1], — установлено существование таких электромагнитных волн, что $G_S = G_{k,l}$. В настоящей работе мы найдем представителей классов $W_{1,l}$ пространств Максвелла с нулевым током (ПМНТ), допускающих одномерные группы трансляций, эллиптических, гиперболических и параболических винтов, а также пропорциональных бивращений. Для этого используем метод, предложенный в [15], и классификацию потенциальных структур на пространстве Минковского по подгруппам группы Пуанкаре [16].

2. Постановка задачи. Все используемые в статье обозначения соответствуют [11, 13]. Через $\{x^i\}$ обозначены галилеевы координаты, в которых метрический тензор имеет диагональный вид $g_{ij} = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,1)$. Используется следующий стандартный базис алгебры Ли группы Пуанкаре:

$$\begin{gathered}
e_1 = (1,0,0,0),\ e_2 = (0,1,0,0),\ e_3 = (0,0,1,0),\ e_4 = (0,0,0,1),\\
e_{12} = (-x^2, x^1, 0, 0),\quad e_{13} = (x^3, 0, -x^1, 0),\quad e_{23} = (0, -x^3, x^2, 0),\\
e_{14} = (x^4, 0, 0, x^1),\quad e_{24} = (0, x^4, 0, x^2),\quad e_{34} = (0, 0, x^4, x^3).
\end{gathered}$$

Подгруппы группы Пуанкаре из списка в [1] и соответствующие алгебры Ли векторных полей обозначены $G_{k,l}$ и $\mathcal{L}_{k,l}$. Выражение $L\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ всюду означает линейную оболочку векторов $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Компоненты всех тензоров отнесены к галилеевым координатам, даже если выражены как функции других координат.

Класс ПМНТ, допускающих группу $G_{k,l}$, обозначен через $W_{k,l}$. Он задается кососимметричными тензорными полями F_{ij}, удовлетворяющими уравнениям (1.1), (1.2) и условиям инвариантности F_{ij} относительно группы $G_{k,l}$:

$$L_{\xi_\alpha} F_{ij} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, k = \mathrm{dim}\mathcal{L}_{k,l}) \tag{2.3}$$

(L_ξ — производная Ли, $\mathcal{L}_{k,l} = L\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$). Ясно, что класс $W_{k,l}$ есть подкласс класса $C_{k,l}$ пространств Максвелла, задаваемых тензорами F_{ij}, удовлетворяющими уравнению (1.2).

Учитывая связь ковариантных и контравариантных компонент тензора F_{ij} в галилеевых координатах, уравнение (1.2) можно записать в виде

[1] С точки зрения [10] последние не являются электромагнитными волнами.

следующей системы

$$\begin{aligned} &\partial_1 F_{12} - \partial_3 F_{23} + \partial_4 F_{24} = 0, \quad \partial_1 F_{13} + \partial_2 F_{23} + \partial_4 F_{34} = 0, \\ &\partial_1 F_{14} + \partial_2 F_{24} + \partial_3 F_{34} = 0, \quad \partial_2 F_{12} + \partial_3 F_{13} - \partial_4 F_{14} = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Решая систему уравнений (1.1)–(2.3), мы получаем класс пространств Максвелла $C_{k,l}$, соответствующий группе $G_{k,l}$; для задания класса $W_{k,l}$ к этой системе надо добавить (2.4). Поэтому $W_{k,l} \subset C_{k,l}$. Так получаются классификации пространств Максвелла и электромагнитных волн.

Заметим, что группа G_S для конкретного представителя класса $C_{k,l}$ или $W_{k,l}$ может быть шире, чем $G_{k,l}$. Получение представителей классов $W_{k,l}$, для которых $G_S = G_{k,l}$, либо доказательство несуществования таковых завершит групповую классификацию пространств Максвелла с нулевым током. В настоящей статье получены такие примеры для классов $W_{1,l}$, соответствующих 1-мерным группам $G_{1,l}$.

Доказательства всех предложений, касающихся представителей классов, получаются путем решения уравнения

$$L_\xi F_{ij} \equiv \xi^k \partial_k F_{ij} + F_{kj} \partial_i \xi^k + F_{ik} \partial_j \xi^k = 0 \tag{2.5}$$

при заданном F_{ij} относительно $\xi \in \mathcal{L}_g$[2], т. е. для векторных полей вида

$$\xi^i = a^i_{\cdot j} x^j + b^i, \text{ где } a^i_{\cdot j} = g^{ik} a_{kj}, \quad a_{kj} = -a_{jk}, \quad (a_{kj},\, b^i \in \mathbb{R}). \tag{2.6}$$

Уравнение (2.5) для полей (2.6) имеет вид

$$(a^k_{\cdot l} x^l + b^k) \partial_k F_{ij} + F_{kj} a^k_{\cdot i} + F_{ik} a^k_{\cdot j} = 0, \tag{2.7}$$

неизвестными в нем являются матрицы $a^k_{\cdot l}$ и b^k.

3. Классы ПМНТ, допускающих одномерные группы трансляций.

3.1. *Класс* $W_{1,1a}$. $\mathcal{L}_{1,1a} = L\{e_1\}$. $W_{1,1a} \subset C_{1,1a}$. Класс $C_{1,1a}$ задается тензором F_{ij}, компоненты которого удовлетворяют системе уравнений (см.[11, 13])

$$\begin{aligned} &\partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0, \quad \partial_2 F_{41} + \partial_4 F_{12} = 0, \quad \partial_3 F_{41} + \partial_4 F_{13} = 0, \\ &\partial_2 F_{34} + \partial_3 F_{42} + \partial_4 F_{23} = 0 \quad \left(F_{ij} = F_{ij}(x^2, x^3, x^4)\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Система уравнений (2.4) для тензора $F_{ij} = F_{ij}(x^2, x^3, x^4)$ принимает следующий вид

$$\begin{aligned} -\partial_3 F_{23} + \partial_4 F_{24} = 0, \quad \partial_2 F_{23} + \partial_4 F_{34} = 0, \\ \partial_2 F_{24} + \partial_3 F_{34} = 0, \quad \partial_2 F_{12} + \partial_3 F_{13} - \partial_4 F_{14} = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

[2]Здесь $\mathcal{L}_g$ — алгебра Ли векторных полей, соответствующая группе Пуанкаре G_g, а $\mathcal{L}_S$ соответствует G_S.

Теорема 1. *Класс $W_{1,1a}$ электромагнитных волн задается тензором F_{ij}, компоненты которого удовлетворяют системе уравнений* (3.1)–(3.2).

Пример 1. Класс $P_{1,1a}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{1,1a}$, состоит из полей вида $A_i = A_i(x^2, x^3, x^4)$ [16]. Полагая $A_i = (-\Phi, 0, 0, 0)$, где $\Phi = \Phi(x^2, x^3, x^4)$, получим тензор F_{ij} вида

$$F_{12} = \Phi_2,\ F_{13} = \Phi_3,\ F_{14} = \Phi_4,\ F_{23} = F_{24} = F_{34} = 0, \tag{3.3}$$

где $\Phi_k = \partial_k\Phi$, а функция Φ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Phi_{22} + \Phi_{33} - \Phi_{44} = 0 \ \ (\Phi_{ij} = \partial_i\partial_j\Phi). \tag{3.4}$$

Предложение 1. *Если функции Φ_2, Φ_3, Φ_{24}, Φ_{34}, Φ_{44}, $x^3\Phi_{24} - x^2\Phi_{34}$, $x^4\Phi_{24}+x^2\Phi_{44}+\Phi_2$, $x^4\Phi_{34}+x^3\Phi_{44}+\Phi_3$ линейно независимы, то ПМНТ, определяемое тензором* (3.3)–(3.4)*, допускает 1-мерную группу $G_S = G_{1,1a}$.*

Например, условиям предложения 1 удовлетворяет функция

$$\Phi = \sin x^2 \sin x^3 \sin(\sqrt{2}\, x^4),$$

для которой тензор (3.3) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&F_{12} = \cos x^2 \sin x^3 \sin(\sqrt{2}\, x^4), \quad F_{13} = \sin x^2 \cos x^3 \sin(\sqrt{2}\, x^4),\\
&F_{14} = \sqrt{2}\, \sin x^2 \sin x^3 \cos(\sqrt{2}\, x^4), \quad F_{23} = F_{24} = F_{34} = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

3.2. *Класс $W_{1,1b}$. $\mathcal{L}_{1,1b} = L\{e_4\}$. $W_{1,1b} \subset C_{1,1b}$.* Класс $C_{1,1b}$ задается тензором F_{ij}, компоненты которого удовлетворяют системе уравнений (см. [11, 13])

$$\begin{aligned}
&\partial_1 F_{24} - \partial_2 F_{14} = 0, \quad \partial_1 F_{34} - \partial_3 F_{14} = 0, \quad \partial_2 F_{34} - \partial_3 F_{24} = 0,\\
&\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 \ \ (F_{ij} = F_{ij}(x^1, x^2, x^3)).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Система уравнений (2.4) для тензора $F_{ij} = F_{ij}(x^1, x^2, x^3)$ принимает следующий вид

$$\begin{aligned}
&\partial_1 F_{12} - \partial_3 F_{23} = 0, \quad \partial_1 F_{13} + \partial_2 F_{23} = 0,\\
&\partial_2 F_{12} + \partial_3 F_{13} = 0, \quad \partial_1 F_{14} + \partial_2 F_{24} + \partial_3 F_{34} = 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Теорема 2. *Класс $W_{1,1b}$ статических ПМНТ задается тензором F_{ij}, компоненты которого удовлетворяют системе уравнений* (3.6)–(3.7).

Пример 2. Возьмем произвольное электростатическое поле

$$F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0, \quad F_{\alpha 4} = \partial_\alpha \Phi \ \ (\Phi = \Phi(x^1, x^2, x^3),\ \alpha = 1, 2, 3). \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.7), получим, что функция Φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} = 0 \ \ (\Phi_{ij} = \partial_i\partial_j\Phi). \tag{3.9}$$

Предложение 2. *Статическое ПМНТ, определяемое тензором* (3.8) *и уравнением* (3.9)*, допускает одномерную группу* $G_S = G_{1,1b}$ *при следующих условиях: 1) производные* $\Phi_1 = \partial_1\Phi$ *и* $\Phi_2 = \partial_2\Phi$ *линейно независимы и 2) функции* Φ_{12}, Φ_{13}, $x^2\Phi_{11} - x^1\Phi_{12} - \Phi_2$, $x^3\Phi_{11} - x^1\Phi_{13} - \Phi_3$ *и* $x^3\Phi_{12} - x^2\Phi_{13}$ *линейно независимы.*

Например, условиям предложения 2 удовлетворяет функция

$$\Phi = \sin x^1 \sin x^2 \,\mathrm{sh}\,(\sqrt{2}\,x^3),$$

для которой тензор (3.8) принимает вид:

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0, \quad F_{14} = \cos x^1 \sin x^2 \,\mathrm{sh}\,(\sqrt{2}\,x^3), \\ &F_{24} = \sin x^1 \cos x^2 \,\mathrm{sh}\,(\sqrt{2}\,x^3), \quad F_{34} = \sqrt{2}\,\sin x^1 \sin x^2 \,\mathrm{ch}\,(\sqrt{2}\,x^3). \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.3. *Класс* $W_{1,1c}$. $\mathcal{L}_{1,1c} = L\{e_2 + e_4\}$. $W_{1,1c} \subset C_{1,1c}$. Класс $C_{1,1c}$ задается тензором F_{ij}, компоненты которого

$$F_{ij} = F_{ij}(v^1, v^3, v^4) = F_{ij}(x^1, x^3, x^2 - x^4) \tag{3.11}$$

удовлетворяют системе уравнений (см. [11, 13])

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_{23}}{\partial v^1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial v^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial v^4} = 0, \quad \frac{\partial F_{24}}{\partial v^1} - \frac{\partial F_{12}}{\partial v^4} - \frac{\partial F_{14}}{\partial v^4} = 0, \\ &\frac{\partial F_{34}}{\partial v^1} - \frac{\partial F_{14}}{\partial v^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial v^4} = 0, \quad \frac{\partial F_{34}}{\partial v^4} - \frac{\partial F_{23}}{\partial v^4} - \frac{\partial F_{24}}{\partial v^3} = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Система уравнений (2.4) для тензора (3.11) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_{12}}{\partial v^4} + \frac{\partial F_{13}}{\partial v^3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial v^4} = 0, \quad \frac{\partial F_{12}}{\partial v^1} - \frac{\partial F_{23}}{\partial v^3} - \frac{\partial F_{24}}{\partial v^4} = 0, \\ &\frac{\partial F_{13}}{\partial v^1} + \frac{\partial F_{23}}{\partial v^4} - \frac{\partial F_{34}}{\partial v^4} = 0, \quad \frac{\partial F_{14}}{\partial v^1} + \frac{\partial F_{24}}{\partial v^4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial v^3} = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Теорема 3. *Класс* $W_{1,1c}$ *ПМНТ задается тензором* (3.11)*, компоненты которого удовлетворяют системе уравнений* (3.12)–(3.13)*.*

Пример 3. Класс $P_{1,1c}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{1,1c}$, состоит из полей вида (см. [16])

$$A_i = A_i(v^1, v^3, v^4) = A_i(x^1, x^3, x^2 - x^4).$$

Полагая

$$A_i = (0, \Phi, 0, \Psi, 0), \quad \Phi = \Phi(v^1, v^3, v^4), \quad \Psi = \Psi(v^1, v^3, v^4),$$

получим тензор F_{ij} вида

$$\begin{aligned} &F_{12} = \frac{\partial \Phi}{\partial v^1}, \quad F_{13} = 0, \quad F_{14} = \frac{\partial \Psi}{\partial v^1}, \\ &F_{23} = -\frac{\partial \Phi}{\partial v^3}, \quad F_{24} = \frac{\partial \Psi}{\partial v^4} + \frac{\partial \Phi}{\partial v^4}, \quad F_{34} = \frac{\partial \Phi}{\partial v^3}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Подставляя (3.14) в (3.13), получим, что функции Φ и Ψ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^1\partial v^4}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^1\partial v^4}=0,\quad -\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^3\partial v^4}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^3\partial v^4}=0,\\ \frac{\partial^2\Phi}{(\partial v^1)^2}+\frac{\partial^2\Phi}{(\partial v^3)^2}-\frac{\partial^2\Psi}{(\partial v^4)^2}-\frac{\partial^2\Phi}{(\partial v^4)^2}=0,\\ \frac{\partial^2\Psi}{(\partial v^1)^2}+\frac{\partial^2\Psi}{(\partial v^3)^2}+\frac{\partial^2\Phi}{(\partial v^4)^2}+\frac{\partial^2\Psi}{(\partial v^4)^2}=0.\end{gathered}\tag{3.15}$$

В результате решения системы (3.15), получим вместо (3.14)

$$F_{12}=-F_{14}=\frac{\partial\Phi}{\partial x^1},\ F_{13}=0,\ F_{23}=F_{34}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x^3},\ F_{24}=C,\tag{3.16}$$

где $C=C(v^4)=C(x^2-x^4)$ — произвольная функция, а

$$\Phi=\Phi(v^1,v^3,v^4)=\Phi(x^1,x^3,x^2-x^4)$$

удовлетворяет уравнению Пуассона по переменным x^1 и x^3 с правой частью, зависящей от параметра $v^4=x^2-x^4$:

$$\frac{\partial^2\Phi}{(\partial x^1)^2}+\frac{\partial^2\Phi}{(\partial x^3)^2}=\frac{dC}{dv^4}.\tag{3.17}$$

Пусть $C=0$. Тогда $\Phi=(x^2-x^4)\sin x^1\operatorname{sh}x^3$ — решение уравнения (3.17); тензор (3.16) для него имеет вид

$$\begin{aligned}&F_{12}=-F_{14}=(x^2-x^4)\cos x^1\operatorname{sh}x^3,\quad F_{13}=F_{24}=0,\\ &F_{23}=F_{34}=-(x^2-x^4)\sin x^1\operatorname{ch}x^3.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Предложение 3. *ПМНТ, определяемое тензором* (3.18)*, допускает одномерную группу* $G_S=G_{1,1c}$.

4. ПМНТ, допускающие эллиптические винты.

Алгебры $\mathcal{L}_{1,2}=L\{e_{13}+\lambda e_2+\mu e_4\}$ $(\lambda\mu(\lambda-\mu)=0)$ при различных значениях параметров соответствуют одномерным группам эллиптических винтов. $W_{1,2}\subset C_{1,2}$. Класс $C_{1,2}$ задается тензором (см. [11, 13])

$$\begin{aligned}&F_{12}=c_1\cos\varphi+c_2\sin\varphi, && F_{23}=c_1\sin\varphi-c_2\cos\varphi,\\ &F_{13}=F_{13}(r,\tilde x^2,\tilde x^4), && F_{24}=F_{24}(r,\tilde x^2,\tilde x^4),\\ &F_{14}=c_3\cos\varphi+c_4\sin\varphi, && F_{34}=-c_3\sin\varphi+c_4\cos\varphi,\end{aligned}\tag{4.1}$$

где функции $c_i=c_i(r,\tilde x^2,\tilde x^4)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}&\frac{\partial c_1}{\partial r}+\frac{c_1}{r}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_2}{\partial\tilde x^2}+\frac{\mu}{r}\frac{\partial c_2}{\partial\tilde x^4}-\frac{\partial F_{13}}{\partial\tilde x^2}=0,\\ &\frac{\partial F_{24}}{\partial r}+\frac{\partial c_2}{\partial\tilde x^4}-\frac{\partial c_4}{\partial\tilde x^2}=0,\\ &\frac{\partial c_3}{\partial r}+\frac{c_3}{r}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_4}{\partial\tilde x^2}+\frac{\mu}{r}\frac{\partial c_4}{\partial\tilde x^4}-\frac{\partial F_{13}}{\partial\tilde x^4}=0,\\ &\frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial\tilde x^2}+\frac{\mu}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial\tilde x^4}+\frac{\partial c_3}{\partial\tilde x^2}-\frac{\partial c_1}{\partial\tilde x^4}=0,\end{aligned}\tag{4.2}$$

а переход к системе координат $\{\tilde{x}^i\} = \{r, \tilde{x}^2, \varphi, \tilde{x}^4\}$ определяется формулами

$$x^1 = r\sin\varphi, \quad x^2 = \lambda\varphi + \tilde{x}^2, \quad x^3 = r\cos\varphi, \quad x^4 = \mu\varphi + \tilde{x}^4. \tag{4.3}$$

Система уравнений (2.4) для тензора (4.1) преобразуется в результате замены (4.3) к следующему эквивалентному виду (см. [3]):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial r} - \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^4} = 0,\\
&\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^4} = 0,\\
&\frac{\partial c_2}{\partial r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{c_2}{r} - \frac{\mu}{r}\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^4} = 0,\\
&\frac{\partial c_4}{\partial r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{c_4}{r} - \frac{\mu}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^2} = 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Класс $W_{1,2}$ ПМНТ задается тензором* (4.1)*, компоненты которого удовлетворяют системе уравнений* (4.2)–(4.4).

Можно выделить 4 геометрически различные случая: a) класс $W_{1,2a}$ ($\mu = 0,\ \lambda \neq 0$), соответствущий группе $G_{1,2a}$ эллиптических винтов с пространственной осью Ox^2; b) класс $W_{1,2b}$ ($\lambda = 0,\ \mu \neq 0$), соответствущий группе $G_{1,2b}$ эллиптических винтов с временно́й осью Ox^4; c) класс $C_{1,2c}$ ($\lambda = \mu \neq 0$), соответствущий группе $G_{1,2c}$ эллиптических винтов с изотропной осью; d) класс $C_{1,2d}$ ($\lambda = \mu = 0$), соответствущий группе $G_{1,2d}$ поворотов в плоскости Ox^1x^3.

Для получения представителей классов $W_{1,2a}$, $W_{1,2b}$, $W_{1,2c}$ и $W_{1,2d}$ возьмем в выражении потенциала класса $P_{1,2}$, допускающего группу $G_{1,2}$,

$$\begin{aligned}
&A_1 = C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi, \quad A_2 = A_2(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4),\\
&A_3 = -C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi, \quad A_4 = A_4(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4),
\end{aligned}$$

(см. [16]) $C_1 = -\Phi(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4)$, $A_4 = \Psi(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4)$, $C_2 = A_2 = 0$. Получим потенциал $A_i = (-\Phi\cos\varphi,\ 0,\ \Phi\sin\varphi,\ \Psi)$, для которого тензор

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \tag{4.5}$$

имеет вид

$$\begin{aligned}
&F_{12} = \frac{\partial\Phi}{\partial \tilde{x}^2}\cos\varphi, \quad F_{13} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\Phi,\\
&F_{14} = \frac{\partial\Psi}{\partial r}\sin\varphi - \left(\frac{\lambda}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial\Phi}{\partial \tilde{x}^4}\right)\cos\varphi,\\
&F_{23} = \frac{\partial\Phi}{\partial \tilde{x}^2}\sin\varphi, \quad F_{24} = \frac{\partial\Psi}{\partial \tilde{x}^2},\\
&F_{34} = \frac{\partial\Psi}{\partial r}\cos\varphi + \left(\frac{\lambda}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial\Phi}{\partial \tilde{x}^4}\right)\sin\varphi.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Тензор (4.6) автоматически удовлетворяет уравнениям (4.2), представляющим собой уравнение (1.1) для тензора (4.1) в координатах $\{\tilde{x}^i\} = \{r, \tilde{x}^2, \varphi, \tilde{x}^4\}$, которое является условием замкнутости формы F. Остается добавить, что тензор (4.5) удовлетворяет уравнению (1.1) для любого ковекторного поля A_i.

Сопоставляя (4.6) с (4.1), получим

$$\begin{aligned} &c_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}^2}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad c_4 = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}^4}, \\ &F_{13} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\Phi, \quad F_{24} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{x}^2}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Подставляя (4.7) в (4.4) и разделяя переменные, получим, что функции $\Phi = \Phi(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4)$ и $\Psi = \Psi(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4)$ должны удовлетворять следующим уравнениям

$$\begin{aligned} &\lambda\Phi_{22} + \mu\Phi_{24} - r\Psi_{24} = 0, \\ &\Phi_{11} + \Phi_{22} - \Phi_{44} + \frac{1}{r}\,\Phi_1 - \frac{1}{r^2}\,\Phi + \frac{\lambda}{r}\,\Psi_{24} + \frac{\mu}{r}\,\Psi_{44} = 0, \\ &\lambda\Phi_{12} + \mu\Phi_{14} + \frac{\lambda}{r}\,\Phi_2 + \frac{\mu}{r}\,\Phi_4 - r\Psi_{14} = 0, \\ &\Psi_{11} + \frac{\lambda}{r}\left(\frac{\lambda}{r}\,\Psi_{22} + \frac{\mu}{r}\,\Psi_{42} - \Phi_{24}\right) + \frac{1}{r}\,\Psi_1 + \\ &+ \frac{\mu}{r}\left(\frac{\lambda}{r}\,\Psi_{24} + \frac{\mu}{r}\,\Psi_{44} - \Phi_{44}\right) + \Psi_{22} = 0, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где обозначено $f_i = \partial f/\partial \tilde{x}^i$ и $f_{ij} = \partial^2 f/\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j$. Рассмотрим частные случаи.

4.1. *Представители класса* $W_{1,2a}$. Пусть $\lambda \neq 0$ и $\mu = 0$. В этом случае замена (4.3) принимает вид

$$x^1 = r\sin\varphi, \quad x^2 = \lambda\varphi + \tilde{x}^2, \quad x^3 = r\cos\varphi, \quad x^4 = \tilde{x}^4. \tag{4.9}$$

Найдем ПМНТ, допускающие одномерную группу $G_S = G_{1,2a}$.

Предположим, что функции Φ и Ψ зависят только от двух переменных:

$$\Phi = D(r, \tilde{x}^4), \quad \Psi = C(r, \tilde{x}^2). \tag{4.10}$$

Подставляя (4.10) в (4.6) и (4.8) и решая полученную систему уравнений, получим следующий вид тензора F_{ij}

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{23} = 0, \quad F_{13} = \frac{\partial D}{\partial r} + \frac{D}{r}, \quad F_{24} = \frac{\partial C}{\partial \tilde{x}^2}, \\ &F_{14} = \frac{\partial C}{\partial r}\sin\varphi - \left(\frac{\lambda}{r}\frac{\partial C}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial D}{\partial \tilde{x}^4}\right)\cos\varphi, \\ &F_{34} = \frac{\partial C}{\partial r}\cos\varphi + \left(\frac{\lambda}{r}\frac{\partial C}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial D}{\partial \tilde{x}^4}\right)\sin\varphi, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где функции $D = D(r, \tilde{x}^4)$ и $C = C(r, \tilde{x}^2)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$C_{11} + \left(1 + \frac{\lambda^2}{r^2}\right) C_{22} + \frac{1}{r}\, C_1 = 0, \tag{4.12a}$$

$$D_{11} - D_{44} + \frac{1}{r}\, D_1 - \frac{D}{r^2} = 0 \tag{4.12b}$$

(см. обозначения после уравнений (4.8)). Справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть выполнены следующие условия*

$$C_{22} \neq 0, \quad D_{41} + \frac{1}{r}\, D_4 \neq 0. \tag{4.13}$$

Тогда ПМНТ, определяемое тензором (4.11) *и уравнениями* (4.12) *допускает одномерную группу* $G_S = G_{1,2a}$.

Например, условиям этого предложения удовлетворяют функции

$$C = \frac{\left(\tilde{x}^2\right)^2}{2} - \frac{r^2}{4} - \frac{\lambda^2}{2} \ln^2 r \quad \text{и} \quad D = \frac{r \tilde{x}^4}{2}, \tag{4.14}$$

для которых тензор (4.11) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&F_{12} = F_{23} = 0, \quad F_{13} = \tilde{x}^4, \quad F_{24} = \tilde{x}^2, \\
&F_{14} = -\left(\frac{r}{2} + \lambda^2 \frac{\ln r}{r}\right) \sin\varphi - \left(\frac{\lambda \tilde{x}^2}{r} - \frac{r}{2}\right) \cos\varphi, \\
&F_{34} = -\left(\frac{r}{2} + \lambda^2 \frac{\ln r}{r}\right) \cos\varphi + \left(\frac{\lambda \tilde{x}^2}{r} - \frac{r}{2}\right) \sin\varphi.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

4.2. *Представители класса* $W_{1,2b}$. Пусть $\lambda = 0$ и $\mu \neq 0$. В этом случае замена (4.3) принимает вид

$$x^1 = r \sin\varphi, \quad x^2 = \tilde{x}^2, \quad x^3 = r \cos\varphi, \quad x^4 = \mu\varphi + \tilde{x}^4. \tag{4.16}$$

Найдем ПМНТ, допускающие одномерную группу $G_S = G_{1,2b}$.

Пусть теперь функции Φ и Ψ зависят от других двух переменных:

$$\Phi = \Phi(r, \tilde{x}^2), \quad \Psi = \Psi(r, \tilde{x}^4). \tag{4.17}$$

Подставляя (4.17) в (4.6), а затем полученный тензор F_{ij} в уравнения (4.8), и частично интегрируя получившуюся систему, получим следующий вид тензора F_{ij}

$$\begin{aligned}
&F_{12} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}^2} \cos\varphi, \quad F_{13} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\, \Phi, \\
&F_{14} = \left(-K\mu^2 \frac{\ln r}{r} + \frac{M}{r}\right) \sin\varphi - \frac{\mu}{r} \left(K \tilde{x}^4 + L\right) \cos\varphi, \\
&F_{23} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}^2} \sin\varphi, \quad F_{24} = 0, \\
&F_{34} = \left(-K\mu^2 \frac{\ln r}{r} + \frac{M}{r}\right) \cos\varphi + \frac{\mu}{r} \left(K \tilde{x}^4 + L\right) \sin\varphi,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

где K, L и M — произвольные постоянные, а функция $\Phi = \Phi(r, \tilde{x}^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi_{11} + \Phi_{22} + \frac{1}{r}\,\Phi_1 - \frac{1}{r^2}\,\Phi + \frac{\mu}{r}\,K = 0. \tag{4.19}$$

Предложение 5. *Пусть* $\Phi_{22} \neq 0$ *и* $K \neq 0$. *Тогда ПМНТ, определяемое тензором* (4.18) *и уравнением* (4.19), *допускает одномерную группу* $G_S = G_{1,2b}$.

Одним из решений уравнения (4.19) является следующая функция:

$$\Phi = -\frac{K\mu}{2r}\left(\tilde{x}^2\right)^2.$$

Подставляя ее в (4.18) и полагая $L = M = 0$, получим тензор

$$\begin{aligned}
&F_{12} = -\frac{K\mu\tilde{x}^2}{r}\cos\varphi, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \quad F_{23} = -\frac{K\mu\tilde{x}^2}{r}\sin\varphi,\\
&F_{14} = -K\mu^2\,\frac{\ln r}{r}\sin\varphi - \frac{K\mu\tilde{x}^4}{r}\cos\varphi,\\
&F_{34} = -K\mu^2\,\frac{\ln r}{r}\cos\varphi + \frac{K\mu\tilde{x}^4}{r}\sin\varphi,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

задающий ПМНТ с группой симметрий $G_S = G_{1,2b}$.

4.3. *Представители класса* $W_{1,2c}$. Пусть $\lambda = \mu \neq 0$. В этом случае замена (4.3) принимает вид

$$x^1 = r\sin\varphi, \quad x^2 = \lambda\varphi + \tilde{x}^2, \quad x^3 = r\cos\varphi, \quad x^4 = \lambda\varphi + \tilde{x}^4. \tag{4.21}$$

Решением (не общим) системы (4.8) будет тензор F_{ij} следующего вида

$$\begin{aligned}
&F_{12} = \frac{E'}{r}\cos\varphi, \quad F_{13} = 0, \quad F_{14} = \frac{\partial C}{\partial r}\sin\varphi - \frac{1}{r}\left(\lambda\frac{\partial C}{\partial\tilde{x}^2} + E'\right)\cos\varphi,\\
&F_{23} = \frac{E'}{r}\sin\varphi, \quad F_{24} = \frac{\partial C}{\partial\tilde{x}^2}, \quad F_{34} = \frac{\partial C}{\partial r}\cos\varphi + \frac{1}{r}\left(\lambda\frac{\partial C}{\partial\tilde{x}^2} + E'\right)\sin\varphi,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

где $E = E(\tilde{x}^2 - \tilde{x}^4) = E(x^2 - x^4)$ — произвольная функция одной переменной, а $C = C(r, \tilde{x}^2)$ удовлетворяет уравнению (4.12a).

Предложение 6. *Пусть* $C_{22} \neq 0$ *и* $E'' \neq 0$. *Тогда ПМНТ, определяемое тензором* (4.22) *и уравнением* (4.12a), *допускает одномерную группу* $G_S = G_{1,2c}$.

Например, функцию $C = C(r, \tilde{x}^2)$ можно взять в виде (4.14).

4.4. *Представители класса* $W_{1,2d}$. Пусть $\lambda = \mu = 0$. Замена (4.3) принимает вид

$$x^1 = r\sin\varphi, \quad x^2 = \tilde{x}^2, \quad x^3 = r\cos\varphi, \quad x^4 = \tilde{x}^4. \tag{4.23}$$

Пусть функции Φ и Ψ имеют вид (4.10). Тогда

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{23} = 0, \quad F_{13} = \frac{\partial D}{\partial r} + \frac{D}{r}, \quad F_{24} = \frac{\partial C}{\partial \tilde{x}^2}, \\ &F_{14} = \frac{\partial C}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial D}{\partial \tilde{x}^4}\cos\varphi, \quad F_{34} = \frac{\partial C}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial D}{\partial \tilde{x}^4}\sin\varphi, \end{aligned} \tag{4.24}$$

где $D = D(r, \tilde{x}^4)$ удовлетворяет уравнению (4.12b), а $C = C(r, \tilde{x}^2)$ — следующему уравнению

$$C_{11} + C_{22} + \frac{1}{r}C_1 = 0. \tag{4.25}$$

Предложение 7. *Пусть* $C_{22} \neq 0$ *и* $D_{44} \neq 0$. *Тогда ПМНТ, определяемое тензором* (4.24) *и уравнением* (4.25), *допускает одномерную группу* $G_S = G_{1,2d}$.

Решения уравнения (4.12b), выражаемого элементарными функциями и удовлетворяющего условию $D_{44} \neq 0$, найти не удалось. Однако, функции

$$C = \frac{\left(\tilde{x}^2\right)^2}{2} - \frac{r^2}{4} \quad \text{и} \quad D = \frac{r\tilde{x}^4}{2}$$

определяют при подстановке в (4.24) тензор

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{23} = 0, \quad F_{13} = \tilde{x}^4, \quad F_{14} = -\frac{r}{2}(\sin\varphi - \cos\varphi), \\ &F_{24} = \tilde{x}^2, \quad F_{34} = -\frac{r}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi), \end{aligned} \tag{4.26}$$

задающий ПМНТ с группой симметрий $G_S = G_{1,2d}$. В галилеевых координатах тензор (4.26) имеет вид

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{23} = 0, \quad F_{13} = x^4, \quad F_{14} = -\frac{1}{2}(x^1 - x^3), \\ &F_{24} = x^2, \quad F_{34} = -\frac{1}{2}(x^1 + x^3). \end{aligned} \tag{4.27}$$

5. ПМНТ, допускающие гиперболические винты. Алгебры

$$\mathcal{L}_{1,3} = L\{e_{24} + \lambda e_1\}$$

при $\lambda \neq 0$ соответствуют одномерным группам гиперболических винтов, а при $\lambda = 0$ — одномерной группе псевдовращений (преобразований Лоренца). $W_{1,3} \subset C_{1,3}$. Класс $C_{1,3}$ задается тензором F_{ij} вида (см. [11, 13])

$$\begin{aligned} &F_{12} = c_1 \operatorname{ch}\varphi + c_2 \operatorname{sh}\varphi, \quad F_{14} = -c_1 \operatorname{sh}\varphi - c_2 \operatorname{ch}\varphi, \\ &F_{13} = F_{13}(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \qquad F_{24} = F_{24}(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \\ &F_{23} = c_3 \operatorname{ch}\varphi + c_4 \operatorname{sh}\varphi, \quad F_{34} = c_3 \operatorname{sh}\varphi + c_4 \operatorname{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где функции $c_i = c_i(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3)$ $(i = 1, \ldots, 4)$, F_{13} и F_{24} удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_2}{\partial r} + \frac{c_2}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^1} = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial r} + \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^1} = 0,\\ &\frac{\partial c_4}{\partial r} + \frac{c_4}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

а переход к системе координат $\{\tilde{x}^i\} = \{\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3, \varphi\}$ определяется формулами

$$x^1 = \lambda\varphi + \tilde{x}^1, \quad x^2 = r\operatorname{ch}\varphi, \quad x^3 = \tilde{x}^3, \quad x^4 = r\operatorname{sh}\varphi. \tag{5.3}$$

Система уравнений (2.4) для тензора (5.1) преобразуется в результате замены (5.3) к следующему эквивалентному виду [5]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{c_1}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial F_{24}}{\partial r} - \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^3} = 0,\\ &\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^1} = 0, \quad \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{c_3}{r} = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Класс $W_{1,3}$ ПМНТ задается тензором* (5.1)*, компоненты которого удовлетворяют системе уравнений* (5.2)–(5.4)*.*

5.1. *Представители класса $W_{1,3}$.* Для получения представителей класса $W_{1,3}$ возьмем в выражении потенциала класса $P_{1,3}$

$$\begin{aligned} &A_1 = A_1(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \quad A_2 = C_1\operatorname{ch}\varphi + C_2\operatorname{sh}\varphi,\\ &A_3 = A_3(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \quad A_4 = -C_1\operatorname{sh}\varphi - C_2\operatorname{ch}\varphi \end{aligned}$$

(см. [16]) $A_1 = -\Phi(\tilde{x}^1, r)$, $C_1 = -\Psi(r, \tilde{x}^3)$, $C_2 = A_3 = 0$. Получим потенциал $A_i = (-\Phi, -\Psi\operatorname{ch}\varphi, 0, \Psi\operatorname{sh}\varphi)$, для которого тензор F_{ij} имеет вид

$$\begin{aligned} &F_{12} = \frac{\lambda}{r}\Phi_1\operatorname{sh}\varphi + \Phi_2\operatorname{ch}\varphi, \quad F_{13} = 0, \quad F_{23} = \Psi_3\operatorname{ch}\varphi,\\ &F_{14} = -\frac{\lambda}{r}\Phi_1\operatorname{ch}\varphi - \Phi_2\operatorname{sh}\varphi, \quad F_{24} = 0, \quad F_{34} = \Psi_3\operatorname{sh}\varphi \end{aligned} \tag{5.5}$$

$(f_i = \partial f/\partial\tilde{x}^i)$. Сопоставляя (5.5) и (5.1), видим, что

$$c_1 = \Phi_2, \quad c_2 = \frac{\lambda}{r}\Phi_1, \quad c_3 = \Psi_3, \quad c_4 = F_{13} = F_{24} = 0. \tag{5.6}$$

Уравнения (5.2) для (5.6) заведомо обращаются в тождества, а подстановка (5.7) в (5.2) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda}{r}\Phi_{11} = 0, \quad \Phi_{12} - \Psi_{33} = 0, \quad -\frac{\lambda^2}{r^2}\Phi_{11} + \Phi_{22} + \frac{1}{r}\Phi_2 = 0,\\ &\Psi_{32} + \frac{1}{r}\Psi_3 = 0 \quad \left(f_i = \frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^i}, \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j}\right). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Подставляя общее решение системы (5.7) в (5.5), получим

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{\lambda(K_1 \ln r + K_2)}{r} \operatorname{sh}\varphi + \frac{K_1 \tilde{x}^1 + K_3}{r} \operatorname{ch}\varphi, \quad F_{13} = 0, \\ F_{14} &= -\frac{\lambda(K_1 \ln r + K_2)}{r} \operatorname{ch}\varphi - \frac{K_1 \tilde{x}^1 + K_3}{r} \operatorname{sh}\varphi, \quad F_{24} = 0, \\ F_{23} &= \frac{K_1 \tilde{x}^3 + K_4}{r} \operatorname{ch}\varphi, \quad F_{34} = \frac{K_1 \tilde{x}^3 + K_4}{r} \operatorname{sh}\varphi, \end{aligned} \tag{5.8}$$

где $K_i = \mathrm{const}$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 8. *Пусть $K_1 \neq 0$. Тогда ПМНТ, определяемое тензором* (5.8)*, допускает одномерную группу $G_S = G_{1,3}$.*

5.2. *Представители класса $W_{1,3a}$.* В случае $\lambda = 0$ алгебра $\mathcal{L}_{1,3}$ принимает вид $\mathcal{L}_{1,3a} = L\{e_{24}\}$. Соответствующий класс $W_{1,3a}$ задается теми же формулами и уравнениями, что и $W_{1,3}$; в них надо положить $\lambda = 0$.

Выбирая потенциал в той же форме, как и для класса $W_{1,3}$, получим в результате

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{K_1 \tilde{x}^1 + K_2}{r} \operatorname{ch}\varphi, \quad F_{13} = 0, \quad F_{14} = -\frac{K_1 \tilde{x}^1 + K_2}{r} \operatorname{sh}\varphi, \\ F_{23} &= \frac{K_1 \tilde{x}^3 + K_3}{r} \operatorname{ch}\varphi, \quad F_{24} = 0, \quad F_{34} = \frac{K_1 \tilde{x}^3 + K_3}{r} \operatorname{sh}\varphi, \end{aligned} \tag{5.9}$$

где $K_i = \mathrm{const}$, а замена координат определяется формулами

$$x^1 = \tilde{x}^1, \quad x^2 = r \operatorname{ch}\varphi, \quad x^3 = \tilde{x}^3, \quad x^4 = r \operatorname{sh}\varphi. \tag{5.10}$$

Предложение 9. *Пусть $K_1 \neq 0$. Тогда ПМНТ, определяемое тензором* (5.9)*, допускает одномерную группу $G_S = G_{1,3a}$.*

Отметим, что тензор (5.9) получается из (5.8) при $\lambda = 0$ с очевидной заменой обозначений. В галилеевых координатах он имеет вид

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{(K_1 x^1 + K_2) x^2}{(x^2)^2 - (x^4)^2}, \quad F_{13} = 0, \quad F_{14} = -\frac{(K_1 x^1 + K_2) x^4}{(x^2)^2 - (x^4)^2}, \\ F_{23} &= \frac{(K_1 x^3 + K_3) x^2}{(x^2)^2 - (x^4)^2}, \quad F_{24} = 0, \quad F_{34} = \frac{(K_1 x^3 + K_3) x^4}{(x^2)^2 - (x^4)^2}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

6. ПМНТ, допускающие параболические винты. Здесь опишем класс $W_{1,4}$ пространств Максвелла с нулевым током, соответствующий алгебре

$$\mathcal{L}_{1,4} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2 + \mu e_3\} \quad (\lambda, \mu = \mathrm{const}, \ \lambda\mu = 0).$$

Рассмотрим 3 случая: a) $\lambda = \mu = 0$; b) $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$; c) $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$.

6.1. *Класс* $W_{1,4a}$ $(\lambda = \mu = 0)$. $\mathcal{L}_{1,4a} = L\{e_{12} - e_{14}\}$; $W_{1,4a} \subset C_{1,4a}$. Здесь мы используем замену

$$\begin{aligned} &\tilde{x}^1 = x^2 + x^4, \quad \tilde{x}^2 = -\frac{x^1}{x^2 + x^4}, \\ &\tilde{x}^3 = x^3, \qquad\quad \tilde{x}^4 = \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2(x^2 + x^4). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Класс $C_{1,4a}$ пространств Максвелла, соответствующий группе $G_{1,4a}$, задается тензором F_{ij} вида (см. [11, 13])

$$\begin{aligned} &F_{13} = C_1\tilde{x}^2 + C_2, && F_{24} = C_5\tilde{x}^2 + C_6, \\ &F_{23} = \frac{C_1}{2}(\tilde{x}^2)^2 + C_2\tilde{x}^2 + C_3, && F_{12} = -\frac{C_5}{2}(\tilde{x}^2)^2 - C_6\tilde{x}^2 + C_7, \\ &F_{34} = -\frac{C_1}{2}(\tilde{x}^2)^2 - C_2\tilde{x}^2 + C_4, && F_{14} = -\frac{C_5}{2}(\tilde{x}^2)^2 - C_6\tilde{x}^2 + C_8, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$ — гладкие функции, удовлетворяющие уравнениям

$$C_1 + C_3 + C_4 = 0, \quad C_5 + C_7 - C_8 = 0 \tag{6.3}$$

и

$$\tilde{x}^1\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{6.4a}$$

$$\tilde{x}^1\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{6.4b}$$

$$-\frac{C_2}{\tilde{x}^1} - \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{6.4c}$$

$$-\frac{C_5}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{6.4d}$$

$$-\tilde{x}^1\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{6.4e}$$

$$\frac{C_2}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{6.4f}$$

$$\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial . C_3}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} = 0. \tag{6.4g}$$

Подставляя (6.2) в уравнения Максвелла (2.4), учитывая, что функции C_k не зависят от $\tilde{x}^2$, группируя в уравнениях слагаемые с одинаковыми степенями $\tilde{x}^2$, пользуясь линейной независимостью степеней переменной $\tilde{x}^2$ и уравнениями (6.3), получим, что функции C_k удовлетворяют уравнениям (см. [8])

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^1 \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{6.5a}$$

$$\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{C_6}{\tilde{x}^1} - \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{6.5b}$$

$$-\tilde{x}^1 \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{6.5c}$$

$$\frac{C_6}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{6.5d}$$

$$-\frac{C_1}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^4} = 0. \tag{6.5e}$$

Теорема 6. *Класс $W_{1,4a}$ ПМНТ, допускающих группу $G_{1,4a}$, задается тензором вида* (6.2) *при выполнении условий* (6.3), (6.4), (6.5).

Пример 4. Для получения представителей класса $W_{1,4a}$ возьмем часть класса потенциалов $P_{1,4a}$ (см. [16]) в виде

$$A_1 = \Phi \cdot \tilde{x}^2, \quad A_2 = \frac{1}{2}\,\Phi \cdot (\tilde{x}^2)^2, \quad A_3 = \Theta, \quad A_4 = A_2 + \Phi, \tag{6.6}$$

где $\Phi = \Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ и $\Theta = \Theta(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$. Соответствующий тензор F_{ij} имеет вид

$$\begin{aligned}
&F_{12} = F_{14} = -\tilde{x}^2\Phi_1, \quad F_{13} = -\tilde{x}^2(\tilde{x}^1\Theta_4 + \Phi_3),\\
&F_{23} = \Theta_1 + \left(\tilde{x}^1 + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\right)\Theta_4 - \frac{(\tilde{x}^2)^2}{2}\left(\tilde{x}^1\Theta_4 + \Phi_3\right),\\
&F_{24} = \Phi_1, \quad F_{34} = -F_{23} + \Phi_3 \quad (f_i = \partial f/\partial \tilde{x}^i).
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Сопоставляя (6.7) и (6.2), видим, что

$$\begin{aligned}
&C_1 = -(\tilde{x}^1\Theta_4 + \Phi_3), \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \Theta_1 + \left(\tilde{x}^1 + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\right)\Theta_4,\\
&C_4 = \Phi_3 - \Theta_1 - \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\Theta_4, \quad C_5 = C_7 = C_8 = 0, \quad C_6 = \Phi_1.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Подставляя (6.8) в (6.5), получим

$$\Theta_{34} = -\frac{1}{\tilde{x}^1}\Phi_{33}, \tag{6.9a}$$

$$\Theta_{31} + \left(\tilde{x}^1 + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\right)\Theta_{34} = \Phi_{11} + \frac{1}{\tilde{x}^1}\Phi_1, \tag{6.9b}$$

$$\Phi_{13} + \frac{1}{\tilde{x}^1}\Phi_3 = -2\tilde{x}^1\Theta_{14} - 3\Theta_4 - \left(2\tilde{x}^4 + \left(\tilde{x}^1\right)^2\right)\Theta_{44} \tag{6.9c}$$

($f_{ij} = \partial f/\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j$). Применяя к системе уравнений (6.9a) и (6.9b) условие интегрируемости $\Theta_{341} - \Theta_{314} = 0$, получим, что $\Phi_{331} = 0$, т. е. функция Φ должна иметь вид

$$\Phi = A(\tilde{x}^1)\left(\tilde{x}^3\right)^2 + B(\tilde{x}^1)\tilde{x}^3 + C(\tilde{x}^1). \tag{6.10}$$

Нетривиальное решение системы (6.9), удовлетворяющее нашей цели, получается, если в (6.10) положить $A(\tilde{x}^1) = 0$, $B(\tilde{x}^1) = K/\tilde{x}^1$ ($K = \mathrm{const}$) и $C(\tilde{x}^1) = 0$. Таким образом, часть множества решений системы (6.9) имеет вид

$$\Phi = \frac{K\tilde{x}^3}{\tilde{x}^1}, \quad \Theta = -\frac{K(\tilde{x}^3)^2}{4(\tilde{x}^1)^2} + D(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4), \tag{6.11}$$

где функция $D = D(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$2\tilde{x}^1 D_{14} + 3D_4 + \left(2\tilde{x}^4 + \left(\tilde{x}^1\right)^2\right) D_{44} = 0. \tag{6.12}$$

Подставляя (6.11) в (6.7), получим окончательно

$$\begin{aligned}
&F_{12} = F_{14} = \frac{K\tilde{x}^2\tilde{x}^3}{(\tilde{x}^1)^2}, \quad F_{13} = -\tilde{x}^2\left(\frac{K}{\tilde{x}^1} + \tilde{x}^1 D_4\right),\\
&F_{23} = -\frac{(\tilde{x}^2)^2}{2}\left(\frac{K}{\tilde{x}^1} + \tilde{x}^1 D_4\right) + \frac{K(\tilde{x}^3)^2}{2(\tilde{x}^1)^3} + D_1 + \left(\tilde{x}^1 + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\right) D_4,\\
&F_{24} = \frac{K\tilde{x}^3}{(\tilde{x}^1)^2}, \quad F_{34} = -F_{23} + \frac{K}{\tilde{x}^1} + \tilde{x}^1 D_4.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Предложение 10. *Пусть* $K \neq 0$ *и* $D_4 = \partial D/\partial \tilde{x}^4 \neq 0$. *Тогда ПМНТ, определяемое тензором* (6.13) *и уравнением* (6.12), *допускает одномерную группу параболических вращений* $G_S = G_{1,4a}$.

6.2. *Класс* $W_{1,4b}$ ($\lambda = 0$, $\mu \neq 0$). $\mathcal{L}_{1,4b} = L\{e_{12} - e_{14} + \mu e_3\}$; $W_{1,4b} \subset C_{1,4b}$. Здесь мы используем замену

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}^1 = x^2 + x^4, && \tilde{x}^2 = -\frac{x^1}{x^2 + x^4},\\
&\tilde{x}^3 = x^3 + \frac{\mu x^1}{x^2 + x^4}, && \tilde{x}^4 = \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2(x^2 + x^4),
\end{aligned} \tag{6.14}$$

переходящую в (6.1) при $\mu = 0$. Класс $C_{1,4b}$ пространств Максвелла, соответствующий группе $G_{1,4b}$, задается формулами (6.2), где функции $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$ удовлетворяют системе уравнений (6.3), (6.4b), (6.4e), (6.4g) и

$$\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} + \tilde{x}^1\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{6.15a}$$

$$\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{C_2}{\tilde{x}^1} - \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{6.15b}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{C_5}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^1} -\\
&\quad -\frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} = 0,
\end{aligned} \tag{6.15c}$$

$$\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{C_2}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^3} = 0 \tag{6.15d}$$

(см. [11, 13]). Подставляя (6.2) в (2.4) в этом случае получим вместо (6.5):

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^1 \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{6.16a}$$

$$\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{C_6}{\tilde{x}^1} - \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{6.16b}$$

$$-\tilde{x}^1 \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{6.16c}$$

$$\frac{C_6}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{6.16d}$$

$$-\frac{C_1}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^1} + \\ + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} = 0. \tag{6.16e}$$

Теорема 7. *Класс* $W_{1,4b}$ *ПМНТ, допускающих группу* $G_{1,4b}$*, задается тензором вида* (6.2) *при выполнении условий* (6.3)*,* (6.4b)*,* (6.4e)*,* (6.4g)*,* (6.15) *и* (6.16) [*8*].

Пример 5. Для получения представителей класса $W_{1,4b}$ возьмем часть класса потенциалов $P_{1,4b}$ в виде (6.6), где $\Phi = \Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$, $\Theta = \Theta(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$ и замена координат имеет вид (6.14). В этом случае тензор F_{ij} имеет вид

$$\begin{aligned}
&F_{12} = -\tilde{x}^2 \Phi_1 - \frac{\mu (\tilde{x}^2)^2}{2\tilde{x}^1} \Phi_3, \quad F_{13} = \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \Theta_3 - \tilde{x}^2 (\tilde{x}^1 \Theta_4 + \Phi_3), \\
&F_{23} = \Theta_1 + \left(\tilde{x}^1 + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \right) \Theta_4 + \frac{\mu \tilde{x}^2}{\tilde{x}^1} \Theta_3 - \frac{(\tilde{x}^2)^2}{2} \left(\tilde{x}^1 \Theta_4 + \Phi_3 \right), \\
&F_{14} = F_{12} + \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \Phi_3, \quad F_{24} = \Phi_1 + \frac{\mu \tilde{x}^2}{\tilde{x}^1} \Phi_3, \\
&F_{34} = -F_{23} + \Phi_3 + \tilde{x}^1 \Theta_4 \quad (f_i = \partial f / \partial \tilde{x}^i).
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Вместо (6.8) имеем

$$\begin{aligned}
&C_1 = -(\tilde{x}^1 \Theta_4 + \Phi_3), \quad C_2 = \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \Theta_3, \quad C_3 = \Theta_1 + \left(\tilde{x}^1 + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \right) \Theta_4, \\
&C_4 = \Phi_3 - \Theta_1 - \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \Theta_4, \quad C_5 = C_8 = \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \Phi_3, \quad C_6 = \Phi_1, \quad C_7 = 0.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Подставляя (6.18) в (6.16), получим вместо (6.9):

$$\Theta_{34} = -\frac{(\tilde{x}^1)^2+\mu^2}{(\tilde{x}^1)^3}\Phi_{33}, \tag{6.19a}$$

$$\Theta_{31} + \left(\tilde{x}^1 + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\right)\Theta_{34} = \Phi_{11} + \frac{1}{\tilde{x}^1}\Phi_1, \tag{6.19b}$$

$$\begin{aligned} 2\tilde{x}^1\Theta_{14} + 3\Theta_4 + \left(2\tilde{x}^4 + \left(\tilde{x}^1\right)^2\right)\Theta_{44} + \left(\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\right)^2\Theta_{33} = \\ = -\Phi_{13} - \frac{1}{\tilde{x}^1}\Phi_3, \end{aligned} \tag{6.19c}$$

$$\Theta_{33} = \Phi_{13} - \frac{1}{\tilde{x}^1}\Phi_{33} \tag{6.19d}$$

($f_i = \partial f/\partial\tilde{x}^i$, $f_{ij} = \partial f/\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j$). Часть множества решений системы (6.19) имеет вид

$$\Phi = K\tilde{x}^3 + C(\tilde{x}^1), \quad \Theta = \tilde{x}^3 H(\tilde{x}^1) + D(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4), \tag{6.20}$$

где $K = \mathrm{const}$, $H(\tilde{x}^1)$ — произвольная функция,

$$C(\tilde{x}^1) = \ln\tilde{x}^1 \int \tilde{x}^1 H'(\tilde{x}^1)\,d\tilde{x}^1 - \int \tilde{x}^1 \ln\tilde{x}^1 H'(\tilde{x}^1)\,d\tilde{x}^1, \tag{6.21}$$

а функция $D(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{K}{\tilde{x}^1} + 2\tilde{x}^1 D_{14} + 3D_4 + \left(2\tilde{x}^4 + \left(\tilde{x}^1\right)^2\right)D_{44} = 0, \tag{6.22}$$

переходящему в (6.12) при $K = 0$. Полагая в (6.21)–(6.20) $K = 0$ и $H'(\tilde{x}^1) = L = \mathrm{const}$, а также подставляя в (6.17), получим следующее выражение для тензора F_{ij}:

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = -\frac{L}{2}\tilde{x}^1\tilde{x}^2, \quad F_{13} = \mu L - \tilde{x}^1\tilde{x}^2 D_4, \\ &F_{23} = L\tilde{x}^3 + D_1 + \left(\tilde{x}^1 + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\right)D_4 + \mu L\tilde{x}^2 - \frac{1}{2}\tilde{x}^1\left(\tilde{x}^2\right)^2 D_4, \\ &F_{24} = \frac{L}{2}\tilde{x}^1, \quad F_{34} = -F_{23} + \tilde{x}^1 D_4. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Предложение 11. *Пусть* $L \neq 0$ *и* $D_4 = \partial D/\partial\tilde{x}^4 \neq 0$. *Тогда ПМНТ, определяемое тензором* (6.23) *и уравнением* (6.12), *допускает одномерную группу параболических винтов* $G_S = G_{1,4b}$.

6.3. *Класс* $W_{1,4c}$ ($\lambda \neq 0$, $\mu = 0$). $\mathcal{L}_{1,4c} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2\}$; $W_{1,4c} \subset C_{1,4c}$. Здесь мы используем замену

$$\begin{aligned} &\tilde{x}^1 = 2\lambda x^1 + \left(x^2 + x^4\right)^2, \qquad \tilde{x}^2 = \frac{x^2 + x^4}{\lambda}, \\ &\tilde{x}^3 = x^3, \quad \tilde{x}^4 = \lambda x^4 + x^1(x^2 + x^4) + \frac{1}{3\lambda}\left(x^2 + x^4\right)^3. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Класс $C_{1,4c}$ пространств Максвелла, соответствующий группе $G_{1,4c}$, задается формулами (6.2), где вместо замены (6.1) используется (6.24), а функции $C_k = C_k(\tilde{x}^1,\ \tilde{x}^3,\ \tilde{x}^4)$ удовлетворяют системе уравнений (6.3) и

$$\frac{C_1}{\lambda} + \frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} - 2\lambda\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{6.25a}$$

$$\frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} - \lambda\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{6.25b}$$

$$2\lambda\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} - \lambda\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{6.25c}$$

$$\frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4} - 2\lambda\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^1} - \lambda\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} = 0 \tag{6.25d}$$

(см. [11, 13]). Подставляя (6.2) в уравнения Максвелла (2.4) и разделяя переменные, получим, что функции C_k удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4} - \lambda\frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{6.26a}$$

$$-2\lambda\frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{6.26b}$$

$$2\lambda\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} + \lambda\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{6.26c}$$

$$2\lambda\frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{C_5}{\lambda} + \frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^3} = 0. \tag{6.26d}$$

Теорема 8. *Класс $W_{1,4c}$ ПМНТ, допускающих группу $G_{1,4c}$, задается тензором вида* (6.2) *при выполнении условий* (6.3), (6.25) *и* (6.26) (*замена координат задается формулами* (6.24)) [*8*].

Пример 6. Как и в случае класса $W_{1,4a}$, для получения представителей класса $W_{1,4c}$ возьмем часть класса потенциалов $P_{1,4c}$ в виде (6.6), где по-прежнему $\Phi = \Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ и $\Theta = \Theta(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$, но замена координат определяется формулами (6.24). Соответствующий тензор F_{ij} имеет вид

$$\begin{aligned}
&F_{12} = -\lambda\left(\tilde{x}^2\right)^2\Phi_1 - \frac{\Phi}{\lambda},\quad F_{13} = \tilde{x}^2(\lambda\Theta_4 - \Phi_3) + 2\lambda\Theta_1,\\
&F_{14} = F_{12} + 2\lambda\Phi_1,\ F_{23} = \frac{\left(\tilde{x}^2\right)^2}{2}(\lambda\Theta_4 - \Phi_3) + 2\lambda\Theta_1\tilde{x}^2 + \frac{\tilde{x}^1\Theta_4}{2\lambda},\\
&F_{24} = 2\lambda\Phi_1\tilde{x}^2,\quad F_{34} = -F_{23} + \Phi_3 - \lambda\Theta_4\quad (f_i = \partial f/\partial\tilde{x}^i).
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Сопоставляя (6.27) и (6.2), видим, что

$$C_1 = \lambda\Theta_4 - \Phi_3,\quad C_2 = 2\lambda\Theta_1,\quad C_3 = \frac{\tilde{x}^1\Theta_4}{2\lambda},\quad C_4 = -\frac{\tilde{x}^1\Theta_4}{2\lambda} + \Phi_3 - \lambda\Theta_4,$$
$$C_5 = 2\lambda\Phi_1,\quad C_6 = 0,\quad C_7 = -\frac{\Phi}{\lambda},\quad C_8 = 2\lambda\Phi_1 - \frac{\Phi}{\lambda}. \tag{6.28}$$

Подставляя (6.28) в (6.26), получим систему уравнений

$$\Theta_{13} = 0, \tag{6.29a}$$

$$4\lambda^2\Phi_{11} + \Phi_{33} - \lambda\Theta_{34} = 0, \tag{6.29b}$$

$$4\lambda^2\Theta_{11} - (\tilde{x}^1 + \lambda^2)\Theta_{44} = 0, \tag{6.29c}$$

$$4\lambda^2\Phi_{11} + \Phi_{33} - \left(\lambda + \frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\right)\Theta_{34} = 0 \tag{6.29d}$$

$(f_{ij} = \partial f/\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j)$. Из (6.29a) следует, что

$$\Theta = A(\tilde{x}^3,\, \tilde{x}^4) + B(\tilde{x}^1,\, \tilde{x}^4). \tag{6.30}$$

Разность (6.29b) и (6.29d) приводит к уравнению $\Theta_{34} = 0$; подставляя в него (6.30), получим $A(\tilde{x}^3,\, \tilde{x}^4) = C(\tilde{x}^3) + D(\tilde{x}^4)$ и

$$\Theta = B(\tilde{x}^1,\, \tilde{x}^4) + C(\tilde{x}^3) + D(\tilde{x}^4). \tag{6.31}$$

Подстановка (6.31) в систему (6.29) приводит к двум тождествам и двум уравнениям:

$$4\lambda^2\Phi_{11} + \Phi_{33} = 0, \tag{6.32}$$

$$4\lambda^2 B_{11} - (\tilde{x}^1 + \lambda^2)(B_{44} + D''(\tilde{x}^4)) = 0. \tag{6.33}$$

Полагая теперь $C(\tilde{x}^3) = D(\tilde{x}^4) = 0$, получим вместо (6.27) следующее выражение тензора F_{ij}

$$\begin{aligned} &F_{12} = -\lambda\left(\tilde{x}^2\right)^2\Phi_1 - \frac{\Phi}{\lambda}, \quad F_{13} = \tilde{x}^2(\lambda B_4 - \Phi_3) + 2\lambda B_1, \\ &F_{14} = F_{12} + 2\lambda\Phi_1, \; F_{23} = \frac{\left(\tilde{x}^2\right)^2}{2}(\lambda B_4 - \Phi_3) + 2\lambda B_1\tilde{x}^2 + \frac{\tilde{x}^1 B_4}{2\lambda}, \\ &F_{24} = 2\lambda\Phi_1\tilde{x}^2, \quad F_{34} = -F_{23} + \Phi_3 - \lambda B_4 \quad (f_i = \partial f/\partial\tilde{x}^i), \end{aligned} \tag{6.34}$$

где функция $\Phi = \Phi(\tilde{x}^1,\, \tilde{x}^3)$ удовлетворяет уравнению (6.32), а функция $B = B(\tilde{x}^1,\, \tilde{x}^4)$ — уравнению

$$4\lambda^2 B_{11} - (\tilde{x}^1 + \lambda^2)B_{44} = 0. \tag{6.35}$$

Поиск условий, при которых группа симметрий пространства Максвелла, задаваемого тензором (6.34), является одномерной, т. е. $G_S = G_{1,4c}$, приводит к очень громоздким вычислениям. Приведем пример решения уравнений (6.32) и (6.35), полученного путем разделения переменных, удовлетворяющего нашей цели:

$$\Phi = \sin\tilde{x}^3 \cdot \operatorname{sh}\frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}, \quad B = \sin\tilde{x}^4 \cdot f(\tilde{x}^1), \tag{6.36}$$

где функция $f(\tilde{x}^1) \neq 0$ удовлетворяет уравнению

$$4\lambda^2 f'' + (\tilde{x}^1 + \lambda^2)f = 0. \tag{6.37}$$

Предложение 12. *ПМНТ, определяемое тензором* (6.34), *формулами* (6.36) *и уравнением* (6.37), *допускает одномерную группу параболических винтов* $G_S = G_{1,4c}$.

7. ПМНТ, допускающие пропорциональные бивращения. Здесь опишем класс $W_{1,5}$ пространств Максвелла с нулевым током, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{1,5} = L\{e_{13}+\lambda e_{24}\}$. $W_{1,5} \subset C_{1,5}$. Класс $C_{1,5}$ задается тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned}
F_{12} &= (-c_1 \operatorname{ch} \lambda\varphi - c_2 \operatorname{sh} \lambda\varphi) \sin\varphi + (c_3 \operatorname{ch} \lambda\varphi + c_4 \operatorname{sh} \lambda\varphi) \cos\varphi, \\
F_{14} &= (c_2 \operatorname{ch} \lambda\varphi + c_1 \operatorname{sh} \lambda\varphi) \sin\varphi - (c_4 \operatorname{ch} \lambda\varphi + c_3 \operatorname{sh} \lambda\varphi) \cos\varphi, \\
F_{23} &= (c_1 \operatorname{ch} \lambda\varphi + c_2 \operatorname{sh} \lambda\varphi) \cos\varphi + (c_3 \operatorname{ch} \lambda\varphi + c_4 \operatorname{sh} \lambda\varphi) \sin\varphi, \\
F_{34} &= (c_2 \operatorname{ch} \lambda\varphi + c_1 \operatorname{sh} \lambda\varphi) \cos\varphi + (c_4 \operatorname{ch} \lambda\varphi + c_3 \operatorname{sh} \lambda\varphi) \sin\varphi,
\end{aligned} \tag{7.1}$$

$$F_{13} = F_{13}(\rho, r, \theta), \quad F_{24} = F_{24}(\rho, r, \theta), \tag{7.2}$$

где функции $c_i = c_i(\rho, r, \theta)$, $F_{13}(\rho, r, \theta)$ и $F_{24}(\rho, r, \theta)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial\theta} - \cos\theta\frac{\partial F_{24}}{\partial r} + \frac{c_1}{\lambda\rho} - \frac{c_4}{\rho} - \frac{\partial c_4}{\partial\rho} - \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_3}{\partial\theta} &= 0, \\
\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial F_{24}}{\partial r} - \frac{c_3}{\lambda\rho} - \frac{c_2}{\rho} - \frac{\partial c_2}{\partial\rho} - \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_1}{\partial\theta} &= 0, \\
\cos\theta\frac{\partial c_1}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial c_3}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial c_1}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial c_3}{\partial\theta} - \frac{\partial F_{13}}{\partial\rho} &= 0, \\
\cos\theta\frac{\partial c_2}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial c_4}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial c_2}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial c_4}{\partial\theta} + \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial F_{13}}{\partial\theta} &= 0,
\end{aligned} \tag{7.3}$$

а замена координат задается формулами

$$\begin{aligned}
x^1 &= r\cos(\theta - \varphi), \quad x^2 = \rho \operatorname{ch}(\lambda\varphi), \\
x^3 &= r\sin(\theta - \varphi), \quad x^4 = \rho \operatorname{sh}(\lambda\varphi)
\end{aligned} \tag{7.4}$$

(см. [11, 13]). Подставляя (7.1) и (7.2) в уравнения Максвелла (2.4) и разделяя переменные, получим следующие уравнения для c_k:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_1}{\partial\rho} + \frac{c_1}{\rho} + \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_2}{\partial\theta} + \frac{c_4}{\lambda\rho} + \cos\theta\frac{\partial F_{13}}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial\theta} &= 0, \\
\frac{\partial c_3}{\partial\rho} + \frac{c_3}{\rho} - \frac{c_2}{\lambda\rho} + \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_4}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial F_{13}}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial\theta} &= 0, \\
\sin\theta\frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial c_1}{\partial\theta} - \cos\theta\frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial c_3}{\partial\theta} - \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial F_{24}}{\partial\theta} &= 0, \\
\sin\theta\frac{\partial c_2}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial c_2}{\partial\theta} - \cos\theta\frac{\partial c_4}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial c_4}{\partial\theta} + \frac{\partial F_{24}}{\partial\rho} &= 0.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Теорема 9. *Класс* $W_{1,5}$ *ПМНТ, допускающих группу* $G_{1,5}$, *задается тензором вида* (7.1)–(7.2) *при выполнении условий* (7.3) *и* (7.5) [*9*].

Пример 7. Для получения представителей класса $W_{1,5}$ возьмем часть класса потенциалов $P_{1,5}$ (см. [16]) в виде

$$A_i = (0,\, \Phi \operatorname{ch} \lambda\varphi,\, 0,\, -\Phi \operatorname{sh} \lambda\varphi), \tag{7.6}$$

где $\Phi = \Phi(\rho,\, r)$. Соответствующий тензор F_{ij} имеет вид

$$\begin{aligned}
&F_{12} = \sin\theta\,\Phi_r \operatorname{ch}\lambda\varphi \sin\varphi + \cos\theta\,\Phi_r \operatorname{ch}\lambda\varphi\cos\varphi, \quad F_{13} = 0,\\
&F_{14} = -\sin\theta\,\Phi_r \operatorname{sh}\lambda\varphi \sin\varphi - \cos\theta\,\Phi_r \operatorname{sh}\lambda\varphi\cos\varphi,\\
&F_{23} = -\sin\theta\,\Phi_r \operatorname{ch}\lambda\varphi \cos\varphi + \cos\theta\,\Phi_r \operatorname{ch}\lambda\varphi\sin\varphi, \quad F_{24} = 0,\\
&F_{34} = -\sin\theta\,\Phi_r \operatorname{sh}\lambda\varphi \cos\varphi + \cos\theta\,\Phi_r \operatorname{sh}\lambda\varphi\sin\varphi,
\end{aligned} \tag{7.7}$$

где $\Phi_r = \partial\Phi/\partial r$. Сопоставляя (7.7) с (7.1), получим

$$c_1 = -\sin\theta\,\Phi_r, \quad c_3 = \cos\theta\,\Phi_r, \quad c_2 = c_4 = F_{13} = F_{24} = 0. \tag{7.8}$$

Подставляя (7.8) в систему (7.5), найдем

$$\Phi = \frac{K\ln r + L}{\rho} + f(\rho) \quad (K,\, L = \text{const}), \quad \Phi_r = \frac{K}{\rho r},$$

откуда получаем тензор $F_{ij}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
&F_{12}^{(1)} = \frac{K\operatorname{ch}\lambda\varphi}{\rho r}\cos(\theta-\varphi), \quad F_{14}^{(1)} = -\frac{K\operatorname{sh}\lambda\varphi}{\rho r}\cos(\theta-\varphi),\\
&F_{23}^{(1)} = -\frac{K\operatorname{ch}\lambda\varphi}{\rho r}\sin(\theta-\varphi), \quad F_{34}^{(1)} = -\frac{K\operatorname{sh}\lambda\varphi}{\rho r}\sin(\theta-\varphi),\\
&F_{13}^{(1)} = 0, \quad F_{24}^{(1)} = 0.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Проверка показывает, что пространство Максвелла, задаваемое тензором (7.9), допускает двумерную группу $G_{2,10}$, соответствующую алгебре $\mathcal{L}_{2,10} = L\{e_{13},\, e_{24}\}$, и наша цель не достигнута. Если теперь взять потенциал в виде

$$A_i = (\Psi\cos\varphi,\, \Phi\operatorname{ch}\lambda\varphi,\, -\Psi\sin\varphi,\, -\Phi\operatorname{sh}\lambda\varphi) \tag{7.10}$$

($\Phi = \Phi(\rho,\, r)$, $\Psi = \Psi(\rho,\, r)$), то можно получить следующее решение уравнений Максвелла $F_{ij}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
&F_{12}^{(2)} = -\frac{K_1}{\lambda\rho}\left(\cos\frac{\ln\rho}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda\varphi\sin\varphi - \sin\frac{\ln\rho}{\lambda}\operatorname{ch}\lambda\varphi\cos\varphi\right),\\
&F_{14}^{(2)} = \frac{K_1}{\lambda\rho}\left(\cos\frac{\ln\rho}{\lambda}\operatorname{ch}\lambda\varphi\sin\varphi - \sin\frac{\ln\rho}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda\varphi\cos\varphi\right),\\
&F_{23}^{(2)} = \frac{K_1}{\lambda\rho}\left(\cos\frac{\ln\rho}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda\varphi\cos\varphi + \sin\frac{\ln\rho}{\lambda}\operatorname{ch}\lambda\varphi\sin\varphi\right),\\
&F_{34}^{(2)} = \frac{K_1}{\lambda\rho}\left(\cos\frac{\ln\rho}{\lambda}\operatorname{ch}\lambda\varphi\cos\varphi + \sin\frac{\ln\rho}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda\varphi\sin\varphi\right),\\
&F_{13}^{(2)} = F_{24}^{(2)} = 0 \quad (K_1 = \text{const}).
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Проверка показывает, что пространство Максвелла, задаваемое тензором (7.11), допускает трехмерную группу $G_{3,11}$, соответствующую алгебре $\mathcal{L}_{3,11} = L\{e_{13} + \lambda e_{24},\, e_1,\, e_3\}$. Сумма полей (7.9) и (7.11)

$$F_{ij} = F_{ij}^{(1)} + F_{ij}^{(2)} \tag{7.12}$$

также удовлетворяет уравнениям Максвелла.

Предложение 13. *ПМНТ, определяемое тензором* (7.12)*, допускает одномерную группу пропорциональных бивращений* $G_S = G_{1,5}$.

8. Общий вывод. В работе установлено существование пространств Максвелла с нулевым током, допускающих одномерные подгруппы группы Пуанкаре из списка в работе И. В. Белько [1]. Поскольку любая из одномерных подгрупп сопряжена одной из подгрупп этого списка, то тем самым установлено, что *для каждой одномерной подгруппы группы Пуанкаре существует ПМНТ, допускающее эту (и только эту!) подгруппу.*

9. Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность участникам семинара кафедры дифференциальной геометрии и приложений МГУ за внимательное и конструктивное обсуждение работы.

Список литературы

1. *Белько И. В.* Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.
2. *Иванова А. С.* Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих смещение по одной из пространственных координат // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. – 1999. – Вып. 2. – С. 50–62.
3. *Иванова А. С.* Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих эллиптические винты // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2004. – № 1. – С. 51–62.
4. *Иванова А. С.* Электромагнитные волны, допускающие трансляции в изотропном направлении // Фундаментальная и прикладная математика. – 2004. – Т. 10. – є 1. – С. 49–56.
5. *Иванова А. С.* Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих гиперболические винты // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2005. – № 2. – С. 61–72.
6. *Иванова А. С.* Шесть классов электромагнитных волн, допускающих параболические винты // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2006. – Вып 1 (3). – С. 17–22.
7. *Иванова А. С., Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца для некоторых классов электромагнитных полей // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. – 2002. – Т. 236. – С. 197–203.
8. *Иванова А. С., Паринов М. А.* Некоторые классы электромагнитных волн, допускающих параболические винты // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – № 7. – С. 79–92.

9. *Иванова А. С., Паринов М. А.* Классы электромагнитных волн, допускающих пропорциональные бивращения // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2007. – № 1. – С. 46–48.

10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. – М.: Наука, 1967. – 460 с.

11. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна – Максвелла и уравнения Лоренца. – Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. – 180 с.

12. *Паринов М. А.* Классы статических пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. – 2004. – № 1. – С. 123–129.

13. *Паринов М. А.* Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. – 2004. – Т. 10. – № 1. – С. 183–237.

14. *Паринов М. А.* Шесть классов пространств Максвелла, допускающих нетривиальные группы симметрий // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2006. – № 1. – С. 170–171.

15. *Паринов М. А.* Об одном способе получения представителей классов пространств Максвелла // Современная математика и ее приложения. – 2006. – Т. 38. – С. 76–81.

16. *Паринов М. А.* Классификация потенциальных структур на пространстве Минковского по подгруппам группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – № 7. – С. 177–225.

Поступила в редакцию 19.03.2009.