Математика и её приложения: ЖИМО. 2009. Вып. 1 (6). С. 83 – 102.

УДК 514.8 + 514.74

М. А. Паринов[1]

Пространства Максвелла с нулевым током, допускающие подгруппы группы Пуанкаре размерностей 3 – 6

Ключевые слова: группа Пуанкаре, уравнения Максвелла, пространство Максвелла, электромагнитная волна.

Дано описание классов пространств Максвелла с нулевым током (в частности, электромагнитных волн), допускающих подгруппы группы Пуанкаре размерностей 3 – 6. Найдены представители всех непустых классов.

For $3 \leqslant k \leqslant 6$ we describe classes $W_{k,l}$ of Maxwell spaces without current that admit k-dimensional subgroups of the Poincaré group. We construct representatives of non-empty classes.

Настоящая работа является продолжением статей [2, 3]. Здесь завершается классификация пространств Максвелла с нулевым током (ПМНТ) по подгруппам группы Пуанкаре: описаны классы ПМНТ $W_{k,l}$, соответствующие группам $G_{k,l}$ ($3 \leqslant k \leqslant 6$) из списка И. В. Белько. Все используемые в статье обозначения соответствуют [1, 2, 3].

1. Классы ПМНТ, допускающих 3-мерные группы G_S

1.1. Здесь опишем классы ПМНТ, инвариантных относительно трехмерных групп трансляций.

1.1.1. *Класс* $W_{3,1a}$. $\mathcal{L}_{3,1a} = L\{e_1, e_2, e_3\}$. *Класс* $W_{3,1a}$ *состоит из однородных пространств Максвелла, задаваемых тензором* $F_{ij} = \mathrm{const}$; каждое из них имеет 6-мерную группу симметрий. Поэтому *ПМНТ, допускающих в точности трехмерную группу* $G_S = G_{3,1a}$, *не существует.*

1.1.2. *Класс* $W_{3,1b}$. $\mathcal{L}_{3,1b} = L\{e_1, e_2, e_4\}$. *Класс* $W_{3,1b}$ *состоит из однородных пространств Максвелла, а ПМНТ, допускающих в точности трехмерную группу* $G_S = G_{3,1b}$, *не существует.*

1.1.3. *Класс* $W_{3,1c}$. $\mathcal{L}_{3,1c} = L\{e_1, e_3, e_2 + e_4\}$. *ПМНТ класса* $W_{3,1c}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = \Phi, \quad F_{13} = C_1, \quad F_{14} = C_2 - \Phi, \\ &F_{23} = \Psi, \quad F_{24} = C_3, \quad F_{34} = C_4 + \Psi, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $C_k = \mathrm{const}$, *а* $\Phi = \Phi(x^2 - x^4)$ *и* $\Psi = \Psi(x^2 - x^4)$ — *произвольные функции одной переменной.*

[1]Ивановский государственный университет, Ивановская государственная текстильная академия; E-mail: mparinov@ivanovo.ac.ru.

Пример 1. Положим в (1.1) $\Phi = A\sin(x^2 - x^4)$, $\Psi = B\sin 2(x^2 - x^4)$, $C_1 = C_3 = 0$, $C_2 = C$, $C_4 = D$:

$$\begin{gathered} F_{12} = A\sin(x^2 - x^4), \quad F_{13} = 0, \quad F_{14} = C - A\sin(x^2 - x^4), \\ F_{23} = B\sin 2(x^2 - x^4), \; F_{24} = 0, \; F_{34} = D - B\sin 2(x^2 - x^4). \end{gathered} \tag{1.2}$$

Предложение 1. *Если $A \neq 0$, $B \neq 0$ и $C^2 + D^2 \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором* (1.2), *допускает трехмерную группу $G_S = G_{3,1c}$.*

1.2. Здесь опишем ПМНТ, соответствующие алгебре

$$\mathcal{L}_{3,2} = L\{e_{13} + \lambda e_2, \, e_1, \, e_3\}.$$

Рассмотрим случаи $\lambda \neq 0$ и $\lambda = 0$, для которых тензор F_{ij} имеет существенно различный вид.

1.2.1. *Класс $W_{3,2a}$. $\mathcal{L}_{3,2a} = \mathcal{L}_{3,2}$ $(\lambda \neq 0)$. ПМНТ класса $W_{3,2a}$ задается тензором F_{ij} вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = A\cos\frac{x^2 + x^4}{\lambda} + B\sin\frac{x^2 + x^4}{\lambda} + C\cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + D\sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{14} = A\cos\frac{x^2 + x^4}{\lambda} + B\sin\frac{x^2 + x^4}{\lambda} - C\cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} - D\sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{23} = -B\cos\frac{x^2 + x^4}{\lambda} + A\sin\frac{x^2 + x^4}{\lambda} - D\cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + C\sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{34} = B\cos\frac{x^2 + x^4}{\lambda} - A\sin\frac{x^2 + x^4}{\lambda} - D\cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + C\sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{13} = K, \quad F_{24} = L, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где A, B, C, D, K, L — произвольные константы.

Предложение 2. *Пусть выполнено одно из следующих двух условий: 1) $A \neq 0$ и $C \neq 0$; 2) $B \neq 0$ и $D \neq 0$. Тогда ПМНТ, определяемое тензором* (1.3), *допускает 3-мерную группу $G_S = G_{3,2a}$.*

1.2.2. *Класс $W_{3,2b}$. $\mathcal{L}_{3,2b} = L\{e_{13}, \, e_1, \, e_3\}$. Класс $W_{3,2b}$ состоит из однородных пространств Максвелла, задаваемых тензором*

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = C, \quad F_{24} = D, \tag{1.4}$$

$(C, D = \mathrm{const})$, *а ПМНТ, допускающих в точности трехмерную группу $G_S = G_{3,2b}$, не существует.*

1.3. Класс $W_{3,3}$. *$\mathcal{L}_{3,3} = L\{e_{13} + \mu e_4, \, e_1, \, e_3\}$ $(\mu \neq 0)$. ПМНТ класса $W_{3,3}$ задается тензором F_{ij} вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = A\cos\frac{x^2 + x^4}{\mu} + B\sin\frac{x^2 + x^4}{\mu} + C\cos\frac{x^2 - x^4}{\mu} + D\sin\frac{x^2 - x^4}{\mu}, \\ &F_{14} = A\cos\frac{x^2 + x^4}{\mu} + B\sin\frac{x^2 + x^4}{\mu} - C\cos\frac{x^2 - x^4}{\mu} - D\sin\frac{x^2 - x^4}{\mu}, \\ &F_{23} = -B\cos\frac{x^2 + x^4}{\mu} + A\sin\frac{x^2 + x^4}{\mu} + D\cos\frac{x^2 - x^4}{\mu} - C\sin\frac{x^2 - x^4}{\mu}, \\ &F_{34} = B\cos\frac{x^2 + x^4}{\mu} - A\sin\frac{x^2 + x^4}{\mu} + D\cos\frac{x^2 - x^4}{\mu} - C\sin\frac{x^2 - x^4}{\mu}, \\ &F_{13} = K, \quad F_{24} = L, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где A, B, C, D, K, L *— произвольные константы.*

Предложение 3. *Пусть выполнено одно из следующих двух условий: 1)* $A \neq 0$ *и* $C \neq 0$*; 2)* $B \neq 0$ *и* $D \neq 0$*. Тогда ПМНТ, определяемое тензором* (1.5)*, допускает 3-мерную группу* $G_S = G_{3,3}$.

1.4. Класс $W_{3,4}$**.** $\mathcal{L}_{3,4} = L\{e_{13} + \lambda(e_2 + e_4),\ e_1,\ e_3\}$ $(\lambda \neq 0)$. *ПМНТ класса* $W_{3,4}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = F_{14} = a_1 \sin\frac{x^2 + x^4}{2\lambda} + a_2 \cos\frac{x^2 + x^4}{2\lambda}, \quad F_{13} = a_3,\\
&F_{34} = -F_{23} = a_1 \cos\frac{x^2 + x^4}{2\lambda} - a_2 \sin\frac{x^2 + x^4}{2\lambda}, \quad F_{24} = a_4,
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

где $a_i = \mathrm{const}$. Пространство Максвелла, определяемое тензором (1.6), допускает для произвольных наборов параметров a_i 4-мерную группу G_S, соответствующую алгебре $L\{e_{13} + \lambda(e_2 + e_4),\ e_1,\ e_3,\ e_2 - e_4\}$. Поэтому *не существует ПМНТ с группой симметрий* $G_S = G_{3,4}$.

1.5. Класс $W_{3,5}$**.** $\mathcal{L}_{3,5} = L\{e_{24},\ e_1,\ e_3\}$. *ПМНТ класса* $W_{3,5}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = \frac{Ax^2 + Bx^4}{(x^2)^2 - (x^4)^2}, \quad F_{13} = K, \quad F_{14} = -\frac{Bx^2 + Ax^4}{(x^2)^2 - (x^4)^2},\\
&F_{23} = \frac{Cx^2 + Dx^4}{(x^2)^2 - (x^4)^2}, \quad F_{24} = L, \quad F_{34} = \frac{Dx^2 + Cx^4}{(x^2)^2 - (x^4)^2},
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

где $A, B, C, D, K, L = \mathrm{const}$.

Пример 2. Положим в (1.7) $B = C = 0$:

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = \frac{Ax^2}{(x^2)^2 - (x^4)^2}, \quad F_{13} = K, \quad F_{14} = -\frac{Ax^4}{(x^2)^2 - (x^4)^2},\\
&F_{23} = \frac{Dx^4}{(x^2)^2 - (x^4)^2}, \quad F_{24} = L, \quad F_{34} = \frac{Dx^2}{(x^2)^2 - (x^4)^2}.
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Предложение 4. *Если* $A^2 + D^2 \neq 0$*, то ПМНТ, определяемое тензором* (1.8)*, допускает 3-мерную группу* $G_S = G_{3,5}$.

1.6. Класс $W_{3,6}$**.** Здесь опишем класс ПМНТ, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{3,6} = L\{e_{24} + \lambda e_3,\ e_2,\ e_4\}$. Рассмотрим случаи $\lambda \neq 0$ и $\lambda = 0$, для которых тензор F_{ij} имеет существенно различный вид.

1.6.1. *Класс* $W_{3,6a}$. $\mathcal{L}_{3,6a} = \mathcal{L}_{3,6}$ $(\lambda \neq 0)$. *ПМНТ класса* $W_{3,6a}$ *задается* *тензором* F_{ij} *вида*

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = \operatorname{ch}\frac{x^3}{\lambda}\left(A\sin\frac{x^1}{\lambda} - B\cos\frac{x^1}{\lambda}\right) + \operatorname{sh}\frac{x^3}{\lambda}\left(C\sin\frac{x^1}{\lambda} - D\cos\frac{x^1}{\lambda}\right),\\
&F_{14} = \operatorname{sh}\frac{x^3}{\lambda}\left(B\cos\frac{x^1}{\lambda} - A\sin\frac{x^1}{\lambda}\right) + \operatorname{ch}\frac{x^3}{\lambda}\left(D\cos\frac{x^1}{\lambda} - C\sin\frac{x^1}{\lambda}\right),\\
&F_{23} = \operatorname{sh}\frac{x^3}{\lambda}\left(A\cos\frac{x^1}{\lambda} + B\sin\frac{x^1}{\lambda}\right) + \operatorname{ch}\frac{x^3}{\lambda}\left(C\cos\frac{x^1}{\lambda} + D\sin\frac{x^1}{\lambda}\right),\\
&F_{34} = \operatorname{ch}\frac{x^3}{\lambda}\left(A\cos\frac{x^1}{\lambda} + B\sin\frac{x^1}{\lambda}\right) + \operatorname{sh}\frac{x^3}{\lambda}\left(C\cos\frac{x^1}{\lambda} + D\sin\frac{x^1}{\lambda}\right),\\
&F_{13} = K, \quad F_{24} = L \quad (A, B, C, D, K, L = \mathrm{const}).
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

Пример 3. Положим в (1.9) $B = C = D = 0$:

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = A\sin\frac{x^1}{\lambda}\operatorname{ch}\frac{x^3}{\lambda}, \quad F_{13} = K, \quad F_{14} = -A\sin\frac{x^1}{\lambda}\operatorname{sh}\frac{x^3}{\lambda},\\
&F_{23} = A\cos\frac{x^1}{\lambda}\operatorname{sh}\frac{x^3}{\lambda}, \quad F_{24} = L, \quad F_{34} = A\cos\frac{x^1}{\lambda}\operatorname{ch}\frac{x^3}{\lambda}.
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

Предложение 5. *Если* $A \neq 0$, *то ПМНТ, определяемое тензором* (1.10), *допускает 3-мерную группу* $G_S = G_{3,6a}$.

1.6.2. *Класс* $W_{3,6b}$. $\mathcal{L}_{3,6b} = L\{e_{24}, e_2, e_4\}$. *Класс* $W_{3,6b}$ *состоит из однородных пространств Максвелла, задаваемых тензором вида* (1.4), *а ПМНТ, допускающих в точности трехмерную группу* $G_S = G_{3,6b}$, *не существует.*

1.7. Класс $W_{3,7}$. $\mathcal{L}_{3,7} = L\{e_{24} + \lambda e_3, e_1, e_2 - e_4\}$. *ПМНТ класса* $W_{3,7}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = F_{14} = -\frac{\lambda K}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = K,\\
&F_{23} = -F_{34} = \frac{M}{x^2 + x^4}, \quad F_{24} = L \quad (K, L, M = \mathrm{const}).
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

Можно проверить, что пространства Максвелла, определяемые тензорами вида (1.11), допускают 4-мерную группу, соответствующую алгебре $L\{e_{24}, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$. Таким образом, *не существует ПМНТ, допускающих в точности трехмерную группу* $G_S = G_{3,7}$.

1.8. Класс $W_{3,8}$. $\mathcal{L}_{3,8} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2, e_3, e_2 - e_4\}$. *ПМНТ класса* $W_{3,8}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = -\frac{a_4}{2}\left(\tilde{x}^2\right)^2 - a_3\tilde{x}^2 - \frac{a_4}{2\lambda^2}\tilde{x}^1 + a_6, \quad F_{14} = F_{12} + a_4,\\
&F_{23} = \frac{a_1}{2}\left(\tilde{x}^2\right)^2 + a_5\tilde{x}^2 + \frac{a_1}{2\lambda^2}\tilde{x}^1 + a_2, \quad F_{13} = a_1\tilde{x}^2 + a_5,\\
&F_{24} = a_4\tilde{x}^2 + a_3, \quad F_{34} = -F_{23} - a_1,
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

где $a_k = \text{const}$, *а замена координат определяется формулами*

$$\begin{aligned} &\tilde{x}^1 = 2\lambda x^1 + \left(x^2 + x^4\right)^2, && \tilde{x}^2 = \frac{x^2 + x^4}{\lambda}, \\ &\tilde{x}^3 = x^3, \quad \tilde{x}^4 = \lambda x^4 + x^1(x^2 + x^4) + \frac{1}{3\lambda}\left(x^2 + x^4\right)^3. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Пример 4. Положим в (1.12) $a_4 = K$ и $a_k = 0$ для $k \neq 4$, а также перейдем к галилеевым координатам по формулам (1.13):

$$\begin{aligned} &F_{12} = -\frac{K}{\lambda}x^1 - \frac{K}{\lambda^2}\left(x^2 + x^4\right)^2, \quad F_{13} = F_{23} = F_{34} = 0, \\ &F_{14} = F_{12} + K, \quad F_{24} = \frac{K}{\lambda}(x^2 + x^4). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Предложение 6. *Если* $K \neq 0$, *то ПМНТ, определяемое тензором* (1.14), *допускает 3-мерную группу* $G_S = G_{3,8}$.

1.9. Здесь опишем класс $W_{3,9}$ пространств Максвелла, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{3,9} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2 + \mu e_3, e_1, e_2 - e_4\}$. Рассмотрим 3 случая: a) $\lambda = \mu = 0$; b) $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$; c) $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$.

1.9.1. *Класс* $W_{3,9a}$. $\mathcal{L}_{3,9a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_1, e_2 - e_4\}$. *ПМНТ класса* $W_{3,9a}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = \Phi(x^2 + x^4), \qquad F_{13} = F_{24} = 0, \\ &F_{34} = -F_{23} = \Psi(x^2 + x^4), \end{aligned} \tag{1.15}$$

где Φ *и* Ψ *— произвольные функции одной переменной.*

Можно проверить, что пространства Максвелла, задаваемые тензором (1.15), допускают 5-мерную группу $G_{5,5}$ ($\lambda = 0$), соответствующую алгебре $\mathcal{L}_{5,5a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$. Поэтому *не существует ПМНТ, допускающих в точности трехмерную группу* $G_S = G_{3,9a}$.

1.9.2. *Класс* $W_{3,9b}$. $\mathcal{L}_{3,9b} = L\{e_{12} - e_{14} + \mu e_3, e_1, e_2 - e_4\}$. *ПМНТ класса* $W_{3,9b}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} &F_{13} = C_1\tilde{x}^2 + C_2, && F_{24} = C_5\tilde{x}^2 + C_6, \\ &F_{23} = \frac{C_1}{2}(\tilde{x}^2)^2 + C_2\tilde{x}^2 + C_3, && F_{12} = -\frac{C_5}{2}(\tilde{x}^2)^2 - C_6\tilde{x}^2 + C_7, \\ &F_{34} = -\frac{C_1}{2}(\tilde{x}^2)^2 - C_2\tilde{x}^2 + C_4, && F_{14} = -\frac{C_5}{2}(\tilde{x}^2)^2 - C_6\tilde{x}^2 + C_8, \end{aligned} \tag{1.16}$$

где

$$\begin{aligned} &C_1 = 0, \quad C_2 = \mu\left(b_1\cos\frac{\tilde{x}^1}{\mu} + b_2\sin\frac{\tilde{x}^1}{\mu}\right), \\ &C_3 = -C_4 = \tilde{x}^3\left(b_1\cos\frac{\tilde{x}^1}{\mu} + b_2\sin\frac{\tilde{x}^1}{\mu}\right) + \Psi_1(\tilde{x}^1), \\ &C_5 = 0, \quad C_6 = \mu^2\left(b_1\sin\frac{\tilde{x}^1}{\mu} - b_2\cos\frac{\tilde{x}^1}{\mu}\right), \\ &C_7 = C_8 = \mu\tilde{x}^3\left(-b_1\sin\frac{\tilde{x}^1}{\mu} + b_2\cos\frac{\tilde{x}^1}{\mu}\right) + \Psi_2(\tilde{x}^1), \end{aligned} \tag{1.17}$$

b_1, $b_2 = \mathrm{const}$, $\Psi_1(\tilde{x}^1)$ *и* $\Psi_2(\tilde{x}^1)$ *— произвольные функции, а связь между координатами задается формулами*

$$\begin{aligned} &\tilde{x}^1 = x^2 + x^4, &&\tilde{x}^2 = -\frac{x^1}{x^2+x^4}, \\ &\tilde{x}^3 = x^3 + \frac{\mu x^1}{x^2+x^4}, &&\tilde{x}^4 = \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2(x^2+x^4). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Пример 5. Подставляя (1.17) в (1.16), полагая $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$ и возвращаясь к галилеевым координатам $\{x^i\}$, получим

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = -x^3\left(b_1 \sin\frac{x^2+x^4}{\mu} - b_2\cos\frac{x^2+x^4}{\mu}\right), \\ &F_{13} = \mu\left(b_1\cos\frac{x^2+x^4}{\mu} + b_2\sin\frac{x^2+x^4}{\mu}\right), \\ &F_{23} = -F_{34} = x^3\left(b_1\cos\frac{x^2+x^4}{\mu} + b_2\sin\frac{x^2+x^4}{\mu}\right), \\ &F_{24} = \mu\left(b_1\sin\frac{x^2+x^4}{\mu} - b_2\cos\frac{x^2+x^4}{\mu}\right). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Предложение 7. *Если $b_1 \neq 0$ или $b_2 \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором* (1.19)*, допускает 3-мерную группу $G_S = G_{3,9b}$.*

1.9.3. *Класс $W_{3,9c}$. $\mathcal{L}_{3,9c} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2,\ e_1,\ e_2 - e_4\}$. ПМНТ класса $W_{3,9c}$ задается тензором F_{ij} вида* (1.16)*, где*

$$\begin{aligned} &C_1 = \lambda a_1,\ C_2 = a_2,\ C_3 = \frac{a_3}{\lambda}\tilde{x}^3 + a_4,\ C_4 = -\lambda a_1 - \frac{a_3}{\lambda}\tilde{x}^3 - a_4, \\ &C_5 = a_3,\ C_6 = a_5,\ C_7 = a_1\tilde{x}^3 + a_6,\quad C_8 = a_1\tilde{x}^3 + a_6 + a_3, \end{aligned} \tag{1.20}$$

$a_i = \mathrm{const}$*, а связь между координатами задается формулами* (1.13)*.*

Пример 6. Подставляя (1.20) в (1.16), полагая $a_3 = K$, $a_i = 0$ для $i \neq 3$ и возвращаясь к галилеевым координатам, получим

$$\begin{aligned} &F_{12} = \frac{K}{2\lambda^2}(x^2+x^4)^2,\quad F_{13} = 0,\quad F_{14} = F_{12} + K, \\ &F_{23} = -F_{34} = \frac{K}{\lambda}x^3,\quad F_{24} = \frac{K}{\lambda}(x^2+x^4). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Предложение 8. *Если $K \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором* (1.21)*, допускает 3-мерную группу $G_S = G_{3,9c}$.*

1.10. Здесь опишем класс $W_{3,10}$ пространств Максвелла, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{3,10} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2,\ e_1 + \mu e_3,\ e_2 - e_4\}$. Рассмотрим два случая: a) $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ и b) $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$.

1.10.1. *Класс $W_{3,10a}$* ($\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$)*. $\mathcal{L}_{3,10a} = \mathcal{L}_{3,10}$. Класс ПМНТ $W_{3,10a}$ задается тензором F_{ij}* (1.16)*, где*

$$\begin{aligned} &C_1 = -2\lambda^2 L,\quad C_2 = K,\quad C_3 = -\frac{A\cdot(\mu\tilde{x}^1 - 2\lambda\tilde{x}^3)}{2\lambda^2(\mu^2+1)} + N, \\ &C_4 = -C_1 - C_3,\quad C_5 = A - 2\mu\lambda^2 L,\quad C_6 = B, \\ &C_7 = \mu C_3 + L\cdot(\mu\tilde{x}^1 - 2\lambda\tilde{x}^3) + M,\quad C_8 = C_5 + C_7, \end{aligned} \tag{1.22}$$

A, B, K, L, M, N — произвольные константы, а замена координат определяется формулами (1.13).

Пример 7. Положим в (1.22) $B = K = L = M = N = 0$:

$$\begin{aligned} &C_1 = C_2 = C_6 = 0, \quad C_3 = -C_4 = -\frac{A\cdot(\mu\tilde{x}^1 - 2\lambda\tilde{x}^3)}{2\lambda^2(\mu^2+1)}, \\ &C_5 = A, \quad C_7 = \mu C_3, \quad C_8 = C_5 + C_7. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Подставляя (1.23) в (1.16) и возвращаясь к галилеевым координатам, получим

$$\begin{aligned} &F_{12} = -\frac{A(1+2\mu^2)}{2\lambda^2(1+\mu^2)}(x^2+x^4)^2 - \frac{\mu A}{\lambda(1+\mu^2)}(\mu x^1 - x^3), \\ &F_{13} = 0, \quad F_{14} = F_{12} + A, \quad F_{24} = \frac{A}{\lambda}(x^2+x^4), \\ &F_{23} = -F_{34} = -\frac{A}{2\lambda^2(1+\mu^2)}\left[2\lambda\mu x^1 + \mu(x^2+x^4)^2 - 2\lambda x^3\right]. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Предложение 9. *Если $A \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором* (1.24), *допускает 3-мерную группу $G_S = G_{3,10a}$.*

1.10.2. *Класс* $W_{3,10b}$ $(\lambda = 0,\ \mu \neq 0)$. $\mathcal{L}_{3,10b} = L\{e_{12} - e_{14},\ e_1 + \mu e_3,\ e_2 - e_4\}$. *Класс ПМНТ $W_{3,10b}$ задается тензором F_{ij} вида* (1.16), *где функции C_k определяются формулами*

$$\begin{aligned} &C_1 = C_5 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{\mu\tilde{x}^1}\left(K\cos\frac{\ln\tilde{x}^1}{\mu} + L\sin\frac{\ln\tilde{x}^1}{\mu}\right), \\ &C_3 = -C_4 = \Phi(\tilde{x}^1) + \frac{\tilde{x}^3}{\mu^2(\tilde{x}^1)^2}\left(K\cos\frac{\ln\tilde{x}^1}{\mu} + L\sin\frac{\ln\tilde{x}^1}{\mu}\right), \\ &C_6 = \frac{1}{\mu\tilde{x}^1}\left(K\sin\frac{\ln\tilde{x}^1}{\mu} - L\cos\frac{\ln\tilde{x}^1}{\mu}\right), \\ &C_7 = C_8 = \Psi(\tilde{x}^1) - \frac{\tilde{x}^3}{\mu^2(\tilde{x}^1)^2}\left(K\sin\frac{\ln\tilde{x}^1}{\mu} - L\cos\frac{\ln\tilde{x}^1}{\mu}\right) \end{aligned} \tag{1.25}$$

(K и L — произвольные константы, $\Phi(\tilde{x}^1)$ и $\Psi(\tilde{x}^1)$ — произвольные функции), а замена координат определяется формулами

$$\begin{aligned} &\tilde{x}^1 = x^2 + x^4, \quad \tilde{x}^2 = -\frac{x^1}{x^2+x^4}, \\ &\tilde{x}^3 = x^3, \qquad \tilde{x}^4 = \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2(x^2+x^4). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Пример 8. Положим в (1.25) $L = \Phi = \Psi = 0$:

$$\begin{aligned} &C_1 = C_5 = 0, \quad C_2 = \frac{K}{\mu\tilde{x}^1}\cos\frac{\ln\tilde{x}^1}{\mu}, \\ &C_3 = -C_4 = \frac{K\tilde{x}^3}{\mu^2(\tilde{x}^1)^2}\cos\frac{\ln\tilde{x}^1}{\mu}, \quad C_6 = \frac{K}{\mu\tilde{x}^1}\sin\frac{\ln\tilde{x}^1}{\mu}, \\ &C_7 = C_8 = -\frac{K\tilde{x}^3}{\mu^2(\tilde{x}^1)^2}\sin\frac{\ln\tilde{x}^1}{\mu}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Подставляя (1.27) в (1.16) и возвращаясь к галилеевым координатам, получим

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = F_{14} = \frac{K(\mu x^1 - x^3)}{\mu^2(x^2+x^4)^2}\sin\frac{\ln(x^2+x^4)}{\mu},\\
&F_{13} = \frac{K}{\mu(x^2+x^4)}\cos\frac{\ln(x^2+x^4)}{\mu},\\
&F_{24} = \frac{K}{\mu(x^2+x^4)}\sin\frac{\ln(x^2+x^4)}{\mu},\\
&F_{23} = -F_{34} = -\frac{K(\mu x^1 - x^3)}{\mu^2(x^2+x^4)^2}\cos\frac{\ln(x^2+x^4)}{\mu}.
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

Предложение 10. *Если $K \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором* (1.28), *допускает 3-мерную группу $G_S = G_{3,10b}$.*

1.11. Класс $W_{3,11}$. $\mathcal{L}_{3,11} = L\{e_{13} + \lambda e_{24},\, e_1,\, e_3\}$. *Тензор F_{ij}, определяющий класс ПМНТ $W_{3,11}$, задается формулами*

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = (-c_1\operatorname{ch}\lambda\varphi - c_2\operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi + (c_3\operatorname{ch}\lambda\varphi + c_4\operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi,\\
&F_{14} = (c_2\operatorname{ch}\lambda\varphi + c_1\operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi - (c_4\operatorname{ch}\lambda\varphi + c_3\operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi,\\
&F_{23} = (c_1\operatorname{ch}\lambda\varphi + c_2\operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi + (c_3\operatorname{ch}\lambda\varphi + c_4\operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi,\\
&F_{34} = (c_2\operatorname{ch}\lambda\varphi + c_1\operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi + (c_4\operatorname{ch}\lambda\varphi + c_3\operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi,\\
&F_{13} = \mathrm{const}, \quad F_{24} = \mathrm{const},
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&c_1 = \frac{1}{\rho}\left(-A\sin\frac{\ln\rho}{\lambda} + B\cos\frac{\ln\rho}{\lambda}\right),\\
&c_2 = \frac{1}{\rho}\left(D\cos\frac{\ln\rho}{\lambda} + E\sin\frac{\ln\rho}{\lambda}\right),\\
&c_3 = \frac{1}{\rho}\left(-D\sin\frac{\ln\rho}{\lambda} + E\cos\frac{\ln\rho}{\lambda}\right),\\
&c_4 = \frac{1}{\rho}\left(A\cos\frac{\ln\rho}{\lambda} + B\sin\frac{\ln\rho}{\lambda}\right),
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

A, B, D, E — произвольные константы, замена координат определяется формулами

$$
\begin{aligned}
&x^1 = r\cos(\theta - \varphi), \quad x^2 = \rho\operatorname{ch}(\lambda\varphi),\\
&x^3 = r\sin(\theta - \varphi), \quad x^4 = \rho\operatorname{sh}(\lambda\varphi).
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

Пример 9. Положим в (1.30) $B = D = E = 0$ и подставим в (1.29).

Тогда в результате элементарных преобразований тензор F_{ij} примет вид

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = \frac{A}{2\rho}\left(e^{\lambda\varphi}\cos\left(\varphi - \frac{\ln\rho}{\lambda}\right) - e^{-\lambda\varphi}\cos\left(\varphi + \frac{\ln\rho}{\lambda}\right)\right),\\
&F_{14} = -\frac{A}{2\rho}\left(e^{\lambda\varphi}\cos\left(\varphi - \frac{\ln\rho}{\lambda}\right) + e^{-\lambda\varphi}\cos\left(\varphi + \frac{\ln\rho}{\lambda}\right)\right),\\
&F_{23} = \frac{A}{2\rho}\left(e^{\lambda\varphi}\sin\left(\varphi - \frac{\ln\rho}{\lambda}\right) - e^{-\lambda\varphi}\sin\left(\varphi + \frac{\ln\rho}{\lambda}\right)\right),\\
&F_{34} = \frac{A}{2\rho}\left(e^{\lambda\varphi}\sin\left(\varphi - \frac{\ln\rho}{\lambda}\right) + e^{-\lambda\varphi}\sin\left(\varphi + \frac{\ln\rho}{\lambda}\right)\right),\\
&F_{13} = \mathrm{const}, \quad F_{24} = \mathrm{const}\,.
\end{aligned}
\tag{1.32}
$$

Предложение 11. *Если $A \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором* (1.32), *допускает 3-мерную группу $G_S = G_{3,11}$.*

1.12. Класс $W_{3,12}$**.** $\mathcal{L}_{3,12} = L\{e_{13} + \lambda e_{24},\, e_2,\, e_4\}$. *Тензор F_{ij}, определяющий класс ПМНТ $W_{3,12}$, имеет вид*

$$
F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = C_1, \quad F_{24} = C_2, \tag{1.33}
$$

где C_1, C_2 = const. Таким образом, *класс $W_{3,12}$ состоит из однородных пространств Максвелла, а ПМНТ, допускающих в точности трехмерную группу $G_S = G_{3,12}$, не существует.*

1.13. Класс $W_{3,13}$**.** $\mathcal{L}_{3,13} = L\{e_{13},\, e_{24},\, e_2 - e_4\}$. *Тензор F_{ij}, определяющий класс ПМНТ $W_{3,13}$, имеет вид*

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = F_{14} = -\frac{Lx^1 + Kx^3}{(x^2+x^4)[(x^1)^2 + (x^3)^2]}, \quad F_{13} = M,\\
&F_{23} = F_{34} = \frac{Lx^3 - Kx^1}{(x^2+x^4)[(x^1)^2 + (x^3)^2]}, \quad F_{24} = N,
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

где $K, L, M, N = \mathrm{const}$.

Предложение 12. *Если $K \neq 0$ или $L \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором* (1.34), *допускает 3-мерную группу $G_S = G_{3,13}$.*

1.14. Класс $W_{3,14}$**.** $\mathcal{L}_{3,14} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_1 + \mu e_3,\, e_{23} + e_{34} + \nu e_1 + \lambda e_3,\, e_2 - e_4\}$. *Тензор F_{ij}, определяющий класс ПМНТ $W_{3,14}$, задается формулами*

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = F_{14} = -\varphi\,\Phi_1(u) + \psi\,\Phi_2(u) + \Phi_4(u), \quad F_{13} = \Phi_1(u),\\
&F_{23} = -F_{34} = \varphi\,\Phi_2(u) + \psi\,\Phi_1(u) + \Phi_3(u), \quad F_{24} = \Phi_2(u),
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

где

$$
u = x^2 + x^4, \; \varphi = \frac{\mu x^1 + (u-\lambda)x^3}{u^2 - \lambda^2 + \mu\nu}, \; \psi = \frac{\nu x^3 - (u+\lambda)x^1}{u^2 - \lambda^2 + \mu\nu}, \tag{1.36}
$$

$\Phi_3(u)$ *и* $\Phi_4(u)$ *— произвольные функции,* $\Phi_1(u)$ *— решение уравнения*

$$
\Phi_1'' + \frac{2u}{u^2 - \lambda^2 + \mu\nu}\Phi_1' - \frac{2u^2 + 2\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{(u^2 - \lambda^2 + \mu\nu)^2}\Phi_1 = 0, \tag{1.37}
$$

а $\Phi_2(u)$ *находится по формуле*

$$\Phi_2(u) = \frac{2u\Phi_1(u) + (u^2 - \lambda^2 + \mu\nu)\Phi_1'(u)}{\mu + \nu}. \tag{1.38}$$

1.15. Класс $W_{3,15}$**.** $\mathcal{L}_{3,15} = L\{e_{12} - e_{14},\ e_{24},\ e_3\}$. *Класс ПМНТ* $W_{3,15}$ *определяется тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = \frac{B}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \\ &F_{23} = -F_{34} = \frac{A}{x^2 + x^4} \ \ (A,\, B = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{1.39}$$

Можно показать, что все пространства Максвелла класса $W_{3,15}$ допускают шестимерную подгруппу группы Пуанкаре $G_{6,6}$. Таким образом, *не существует ПМНТ, допускающих в точности трехмерную группу* $G_S = G_{3,15}$.

1.16. Здесь опишем класс ПМНТ $W_{3,16}$, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{3,16} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_1 + \mu e_3, e_2 - e_4\}$. Рассмотрим 4 случая: a) $\lambda = \mu = 0$; b) $\lambda \neq 0,\ \mu = 0$; c) $\lambda \neq 0,\ \mu \neq 0$; d) $\lambda = 0,\ \mu \neq 0$.

1.16.1. *Класс* $W_{3,16a}$ $(\lambda = \mu = 0)$. $\mathcal{L}_{3,16a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24}, e_2 - e_4\}$. *Класс ПМНТ* $W_{3,16a}$ *определяется тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = \frac{Ax^3 + Dx^1 + B}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = A, \\ &F_{34} = -F_{23} = \frac{Ax^1 - Dx^3 + C}{x^2 + x^4}, \quad F_{24} = D \end{aligned} \tag{1.40}$$

$(A,\, B,\, C,\, D = \mathrm{const})$.

Предложение 13. *Если* $A \neq 0$ *или* $D \neq 0$, *то ПМНТ, определяемое тензором* (1.40), *допускает 3-мерную группу* $G_S = G_{3,16a}$.

1.16.2. *Класс* $W_{3,16b}$ $(\lambda \neq 0,\ \mu = 0)$. $\mathcal{L}_{3,16b} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_1, e_2 - e_4\}$. *Класс ПМНТ* $W_{3,16b}$ *определяется тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = \frac{Ax^3 + D(x^1 - \lambda \ln(x^2 + x^4)) + B}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = A, \\ &F_{34} = -F_{23} = \frac{A(x^1 - \lambda \ln(x^2 + x^4)) - Dx^3 + C}{x^2 + x^4}, \quad F_{24} = D \end{aligned} \tag{1.41}$$

$(A,\, B,\, C,\, D = \mathrm{const})$.

Предложение 14. *Если* $A \neq 0$ *или* $D \neq 0$, *то ПМНТ, определяемое тензором* (1.41), *допускает 3-мерную группу* $G_S = G_{3,16b}$.

1.16.3. *Класс* $W_{3,16c}$ $(\lambda \neq 0,\ \mu \neq 0)$. *Класс ПМНТ* $W_{3,16c}$ *определяется тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = \frac{A(x^3 - \mu \ln(x^2 + x^4)) + D(x^1 - \lambda \ln(x^2 + x^4)) + B}{x^2 + x^4}, \\ &F_{34} = -F_{23} = \frac{A(x^1 - \lambda \ln(x^2 + x^4)) - D(x^3 - \mu \ln(x^2 + x^4)) + C}{x^2 + x^4}, \\ &F_{13} = A, \quad F_{24} = D \ \ (A,\, B,\, C,\, D = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{1.42}$$

Предложение 15. *Если $A \neq 0$ или $D \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором (1.42), допускает 3-мерную группу $G_S = G_{3,16}$ ($\lambda \neq 0,\ \mu \neq 0$).*

1.16.4. *Класс $W_{3,16d}$ ($\lambda = 0,\ \mu \neq 0$). $\mathcal{L}_{3,16d} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \mu e_3, e_2 - e_4\}$. Класс ПМНТ $W_{3,16d}$ определяется тензором F_{ij} вида*

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = F_{14} = \frac{A(x^3 - \mu\ln(x^2 + x^4)) + Dx^1 + B}{x^2 + x^4},\\
&F_{34} = -F_{23} = \frac{Ax^1 - D(x^3 - \mu\ln(x^2 + x^4)) + C}{x^2 + x^4},\\
&F_{13} = A, \quad F_{24} = D \ \ (A, B, C, D = \mathrm{const}).
\end{aligned}
\tag{1.43}
$$

Предложение 16. *Если $A \neq 0$ или $D \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором (1.43), допускает 3-мерную группу $G_S = G_{3,16d}$.*

Замечание 3. Формулы (1.42) при различных комбинациях параметров λ и μ задают ПМНТ всех классов $W_{3,16a}$, $W_{3,16b}$, $W_{3,16c}$ и $W_{3,16d}$, так что можно считать, что есть один класс ПМНТ $W_{3,16} = W_{3,16c}$.

1.17. Класс $W_{3,17}$. $\mathcal{L}_{3,17} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{24}\}$. *Класс ПМНТ $W_{3,17}$ определяется тензором F_{ij} вида*

$$
\begin{aligned}
F_{12} &= \frac{2Ax^1x^3 + B\left[(x^1)^2 - (x^3)^2 + (x^2 + x^4)^2\right]}{2(x^2 + x^4)\left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2\right]^2} + \frac{C}{x^2 + x^4},\\
F_{13} &= \frac{Bx^3 - Ax^1}{\left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2\right]^2},\\
F_{14} &= \frac{2Ax^1x^3 + B\left[(x^1)^2 - (x^3)^2 - (x^2 + x^4)^2\right]}{2(x^2 + x^4)\left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2\right]^2} + \frac{C}{x^2 + x^4},\\
F_{23} &= \frac{-2Bx^1x^3 + A\left[(x^1)^2 - (x^3)^2 - (x^2 + x^4)^2\right]}{2(x^2 + x^4)\left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2\right]^2} + \frac{D}{x^2 + x^4},\\
F_{24} &= \frac{Bx^1 + Ax^3}{\left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2\right]^2},\\
F_{34} &= \frac{2Bx^1x^3 - A\left[(x^1)^2 - (x^3)^2 + (x^2 + x^4)^2\right]}{2(x^2 + x^4)\left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2\right]^2} - \frac{D}{x^2 + x^4},
\end{aligned}
\tag{1.44}
$$

где $A, B, C, D = \mathrm{const}$.

Предложение 17. *Если $A \neq 0$ или $B \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором (1.44), допускает 3-мерную группу $G_S = G_{3,17}$.*

1.18. Здесь опишем класс ПМНТ $W_{3,18}$, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{3,18} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda(e_2 - e_4)\}$. Рассмотрим 2 случая: a) $\lambda \neq 0$; b) $\lambda = 0$.

1.18.1. *Класс $W_{3,18a}$ ($\lambda \neq 0$). $\mathcal{L}_{3,18a} = \mathcal{L}_{3,18}$. Класс ПМНТ $W_{3,18a}$ опре-*

деляется тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned}
&F_{12} = -\frac{C_5}{2}\left(\left(\tilde{x}^2\right)^2 - \left(\tilde{x}^3\right)^2 + 1\right) - C_1\tilde{x}^2\tilde{x}^3 - C_4\tilde{x}^2 - C_8\tilde{x}^3,\\
&F_{13} = C_1\tilde{x}^2 - C_5\tilde{x}^3 + C_8, \quad F_{14} = F_{12} + C_5,\\
&F_{23} = \frac{C_1}{2}\left(\left(\tilde{x}^2\right)^2 - \left(\tilde{x}^3\right)^2 - 1\right) - C_5\tilde{x}^2\tilde{x}^3 + C_8\tilde{x}^2 - C_4\tilde{x}^3,\\
&F_{24} = C_5\tilde{x}^2 + C_1\tilde{x}^3 + C_4, \quad F_{34} = -F_{23} - C_1,
\end{aligned} \tag{1.45}$$

где функции C_k имеют вид

$$\begin{aligned}
&C_1 = 2C_{10} = \frac{1}{\tilde{x}^1}\left(A\cos\frac{\tilde{x}^4}{2\lambda\tilde{x}^1} + B\sin\frac{\tilde{x}^4}{2\lambda\tilde{x}^1}\right),\\
&C_5 = -2C_9 = \frac{1}{\tilde{x}^1}\left(-A\sin\frac{\tilde{x}^4}{2\lambda\tilde{x}^1} + B\cos\frac{\tilde{x}^4}{2\lambda\tilde{x}^1}\right),\\
&C_4 = \frac{L}{(\tilde{x}^1)^2}, \quad C_8 = \frac{K}{(\tilde{x}^1)^2} \quad (A, B, K, L = \mathrm{const}),
\end{aligned} \tag{1.46}$$

а замена координат определяется формулами

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}^1 = x^2 + x^4, \quad \tilde{x}^2 = -\frac{x^1}{x^2 + x^4}, \quad \tilde{x}^3 = \frac{x^3}{x^2 + x^4},\\
&\tilde{x}^4 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2.
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Предложение 18. *Если $A \neq 0$ или $B \neq 0$, то ПМНТ, определяемое тензором* (1.45)–(1.46), *допускает трехмерную группу $G_S = G_{3,18a}$.*

1.18.2. *Класс* $W_{3,18b}$ ($\lambda = 0$). $\mathcal{L}_{3,18b} = L\{e_{12} - e_{14},\ e_{23} + e_{34},\ e_{13}\}$. *Класс ПМНТ $W_{3,18b}$ определяется тензором F_{ij} вида*

$$\begin{aligned}
&F_{12} = F_{14} = \frac{Lx^1 - Kx^3}{(x^2 + x^4)^3}, \quad F_{13} = \frac{K}{(x^2 + x^4)^2},\\
&F_{34} = -F_{23} = \frac{Kx^1 + Lx^3}{(x^2 + x^4)^3}, \quad F_{24} = \frac{L}{(x^2 + x^4)^2},
\end{aligned} \tag{1.48}$$

где K, $L = \mathrm{const}$.

Все пространства Максвелла класса $W_{3,18b}$ допускают четырехмерную подгруппу группы Пуанкаре, соответствующую алгебре $L\{e_{12} - e_{14},$ $e_{23}+e_{34},\ e_{13},\ e_2-e_4\}$. Таким образом, *не существует ПМНТ, допускающих в точности трехмерную группу $G_S = G_{3,18b}$.*

1.19. Класс $W_{3,19}$**.** $\mathcal{L}_{3,19} = L\{e_{12}-e_{14},\ e_{23}+e_{34},\ e_{13}+\lambda e_{24}\}$. *Класс ПМНТ $W_{3,19}$ определяется тензором F_{ij} вида*

$$\begin{aligned}
&F_{12} = -\frac{C_5}{2}\left(\left(\tilde{x}^2\right)^2 - \left(\tilde{x}^3\right)^2 + 1\right) - C_1\tilde{x}^2\tilde{x}^3 + \varphi(\tilde{x}^1),\\
&F_{13} = C_1\tilde{x}^2 - C_5\tilde{x}^3, \quad F_{14} = F_{12} + C_5,\\
&F_{23} = \frac{C_1}{2}\left(\left(\tilde{x}^2\right)^2 - \left(\tilde{x}^3\right)^2 - 1\right) - C_5\tilde{x}^2\tilde{x}^3 + \psi(\tilde{x}^1),\\
&F_{24} = C_5\tilde{x}^2 + C_1\tilde{x}^3, \quad F_{34} = -F_{23} - C_1,
\end{aligned} \tag{1.49}$$

где

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\tilde{x}^1}{(\tilde{x}^4)^2}\left[\left(A\cos\frac{\ln\tilde{x}^4}{\lambda} + B\sin\frac{\ln\tilde{x}^4}{\lambda}\right)\cos\frac{\ln\tilde{x}^1}{\lambda} + \right.\\
&\qquad\left. + \left(A\sin\frac{\ln\tilde{x}^4}{\lambda} - B\cos\frac{\ln\tilde{x}^4}{\lambda}\right)\sin\frac{\ln\tilde{x}^1}{\lambda}\right],\\
C_5 &= \frac{\tilde{x}^1}{(\tilde{x}^4)^2}\left[\left(A\sin\frac{\ln\tilde{x}^4}{\lambda} - B\cos\frac{\ln\tilde{x}^4}{\lambda}\right)\cos\frac{\ln\tilde{x}^1}{\lambda} - \right.\\
&\qquad\left. - \left(A\cos\frac{\ln\tilde{x}^4}{\lambda} + B\sin\frac{\ln\tilde{x}^4}{\lambda}\right)\sin\frac{\ln\tilde{x}^1}{\lambda}\right],\\
\varphi(\tilde{x}^1) &= \frac{1}{2\tilde{x}^1}\left(A\cos\frac{\ln\tilde{x}^1}{\lambda} + B\sin\frac{\ln\tilde{x}^1}{\lambda}\right),\\
\psi(\tilde{x}^1) &= \frac{1}{2\tilde{x}^1}\left(A\sin\frac{\ln\tilde{x}^1}{\lambda} - B\cos\frac{\ln\tilde{x}^1}{\lambda}\right) \quad (A, B = \mathrm{const})
\end{aligned}
\tag{1.50}
$$

и замена координат определяется формулами (1.47).

Предложение 19. *Если* $A \neq 0$ *или* $B \neq 0$, *то ПМНТ, определяемое тензором* (1.49)–(1.50), *допускает трехмерную группу* $G_S = G_{3,19}$.

1.20. Класс $W_{3,20}$**.** $\mathcal{L}_{3,20} = L\{e_{12},\, e_{13},\, e_{23}\}$. *Класс ПМНТ* $W_{3,20}$ *определяется тензором* F_{ij} *вида*

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0, \quad F_{14} = \frac{Kx^1}{\rho^3}, \quad F_{24} = \frac{Kx^2}{\rho^3},\\
&F_{34} = \frac{Kx^3}{\rho^3} \quad \left(\rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2},\ K = \mathrm{const}\right).
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

Так как $W_{3,20} = {}_{4,18}$, то все пространства Максвелла класса $W_{3,20}$ допускают четырехмерную группу $G_{4,18}$, поэтому *не существует ПМНТ, допускающих в точности трехмерную группу* $G_{3,20}$.

1.21. Класс $W_{3,21}$**.** $\mathcal{L}_{3,21} = L\{e_{12},\, e_{14},\, e_{24}\}$. *Класс ПМНТ* $W_{3,21}$ *определяется тензором* F_{ij} *вида*

$$
\begin{aligned}
&F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = \frac{Kx^1}{\rho^3}, \quad F_{23} = \frac{Kx^2}{\rho^3},\\
&F_{34} = \frac{Kx^4}{\rho^3} \quad \left(\rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^4)^2},\ K = \mathrm{const}\right).
\end{aligned}
\tag{1.52}
$$

Так как $W_{3,21} = {}_{4,19}$, то все пространства Максвелла класса $W_{3,21}$ допускают четырехмерную группу $G_{4,19}$, поэтому *не существует ПМНТ, допускающих в точности трехмерную группу* $G_{3,21}$.

2. Классы ПМНТ, допускающих 4-мерные группы G_S

2.1. Класс $W_{4,1}$**.** $\mathcal{L}_{4,1} = L\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. *Класс* $W_{4,1}$ *совпадает с* $C_{4,1}$ *и состоит из однородных пространств Максвелла*, каждое из которых имеет

6-мерную группу симметрий. Поэтому *ПМНТ, допускающих в точности четырехмерную группу $G_S = G_{4,1}$, не существует.*

2.2. Класс $W_{4,2}$**.** $\mathcal{L}_{4,2} = L\{e_{13} + \mu e_4,\, e_1,\, e_2,\, e_3\}$. *Класс $W_{4,2}$ состоит из однородных пространств Максвелла, задаваемых тензорами вида*

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = A, \quad F_{24} = B, \quad (A, B = \mathrm{const}), \tag{2.1}$$

а ПМНТ, допускающих в точности четырехмерную группу $G_S = G_{4,2}$, не существует.

2.3. Класс $W_{4,3}$**.** $\mathcal{L}_{4,3} = L\{e_{13} + \lambda e_2,\, e_1,\, e_3,\, e_4\}$. *Класс $W_{4,3}$ состоит из однородных пространств Максвелла, задаваемых тензорами вида* (2.1), *а ПМНТ, допускающих в точности четырехмерную группу $G_S = G_{4,3}$, не существует.*

2.4. Класс $W_{4,4}$**.** $\mathcal{L}_{4,4} = L\{e_{13} + \lambda e_2,\ e_1,\, e_3,\, e_2 + e_4\}$. *Класс ПМНТ $W_{4,4}$ при $\lambda \neq 0$ совпадает с классом $C_{4,4a}$ и определяется тензором F_{ij} вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = -F_{14} = b_1 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} - b_2 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{23} = F_{34} = b_1 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + b_2 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{13} = b_3, \quad F_{24} = b_4 \quad (b_i = \mathrm{const}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

а при $\lambda = 0$ состоит из однородных пространств Максвелла, задаваемых тензорами вида (2.1).

Предложение 20. *Пусть выполнены* следующие два *условия: 1) $b_1 \neq 0$ или $b_2 \neq 0$, 2) $b_3 \neq 0$ или $b_4 \neq 0$. Тогда пространство Максвелла, определяемое тензором* (2.2), *допускает 4-мерную группу $G_S = G_{4,4}$* ($\lambda \neq 0$). *При $\lambda = 0$ не существует ПМНТ,* допускающих в точности *четырехмерную группу $G_S = G_{4,4}$.*

2.5. Класс $W_{4,5}$**.** $\mathcal{L}_{4,5} = L\{e_{24},\, e_1,\, e_3,\, e_2 + e_4\}$. *Класс ПМНТ $W_{4,5}$ совпадает с классом $C_{4,5}$ и определяется тензором F_{ij} вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = -F_{14} = \frac{b_1}{x^2 - x^4}, \quad F_{13} = b_3, \\ &F_{23} = F_{34} = \frac{b_2}{x^2 - x^4}, \quad F_{24} = b_4 \quad (b_k = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Предложение 21. *Пусть выполнено любое из следующих условий: 1) $b_1 \neq 0$ и $b_3 \neq 0$, 2) $b_1 \neq 0$ и $b_4 \neq 0$, 3) $b_2 \neq 0$ и $b_3 \neq 0$, 4) $b_2 \neq 0$ и $b_4 \neq 0$. Тогда пространство Максвелла, определяемое тензором* (2.3), *допускает 4-мерную группу $G_S = G_{4,5}$.*

2.6. Класс $W_{4,6}$**.** $\mathcal{L}_{4,6} = L\{e_{24} + \lambda e_3,\, e_1,\, e_2,\, e_4\}$. *Класс $W_{4,6}$ состоит из однородных пространств Максвелла, задаваемых тензорами вида* (2.1), *а ПМНТ, допускающих в точности четырехмерную группу $G_S = G_{4,6}$, не существует.*

2.7. Класс $W_{4,7}$. $\mathcal{L}_{4,7} = L\{e_{13} + \lambda e_{24},\, e_1,\, e_3,\, e_2 + e_4\}$ $(\lambda \neq 0)$. *ПМНТ класса* $W_{4,7}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} -F_{12} = F_{14} &= \frac{e^{\lambda\varphi}}{\rho}\left[K_1 \sin\left(\varphi - \frac{\ln\rho}{\lambda}\right) + K_2 \cos\left(\varphi - \frac{\ln\rho}{\lambda}\right)\right], \\ F_{23} = F_{34} &= \frac{e^{\lambda\varphi}}{\rho}\left[K_1 \cos\left(\varphi - \frac{\ln\rho}{\lambda}\right) - K_2 \sin\left(\varphi - \frac{\ln\rho}{\lambda}\right)\right], \\ F_{13} = K_3, &\quad F_{24} = K_4 \quad (K_i = \mathrm{const}), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где замена координат определяется формулами (1.31).

Предложение 22. *Пусть выполнены следующие два условия: 1)* $K_1 \neq 0$ *или* $K_2 \neq 0$*; 2)* $K_3 \neq 0$ *или* $K_4 \neq 0$*. Тогда ПМНТ, определяемое тензором* F_{ij} *вида* (2.4)*, допускает четырехмерную группу* $G_S = G_{4,7}$.

2.8. Класс $W_{4,8}$. $\mathcal{L}_{4,8} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_3,\, e_1,\, e_2,\, e_4\}$. *Класс* $W_{4,8}$ *состоит из однородных пространств Максвелла, задаваемых тензорами вида*

$$F_{12} = F_{14} = K_1, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \quad F_{23} = -F_{34} = K_2 \tag{2.5}$$

$(K_1, K_2 = \mathrm{const})$*, а ПМНТ, допускающих в точности четырехмерную группу* $G_S = G_{4,8}$*, не существует.*

2.9. $\mathcal{L}_{4,9} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2,\, e_1,\, e_3,\, e_2 - e_4\}$. Рассмотрим случаи $\lambda \neq 0$ и $\lambda = 0$.

2.9.1. *Класс* $W_{4,9a}$ $(\lambda \neq 0)$*. ПМНТ класса* $W_{4,9a}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} &= -\frac{A}{\lambda}(x^2 + x^4) + D, \quad F_{13} = B, \quad F_{24} = A, \\ F_{23} = -F_{34} &= \frac{B}{\lambda}(x^2 + x^4) + C, \quad (A, B, C, D = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Предложение 23. *Пусть выполнено одно из следующих двух условий:1)* $A \neq 0$ *и* $C \neq 0$ *или 2)* $D \neq 0$ *и* $B \neq 0$*. Тогда ПМНТ, определяемое тензором* F_{ij} *вида* (2.6)*, допускает четырехмерную группу* $G_S = G_{4,9a}$.

2.9.2. *Класс* $W_{4,9b}$ $(\lambda = 0)$*. Класс* $W_{4,9b}$ *совпадает с классом* $C_{4,9b}$. А так как все пространства Максвелла класса $C_{4,9b}$ допускают пятимерную группу симметрий, то *не существует ПМНТ, допускающих в точности четырехмерную группу* $G_S = G_{4,9b}$.

2.10. Класс $W_{4,10}$. $\mathcal{L}_{4,10} = L\{e_{13},\, e_{24},\, e_1,\, e_3\}$. *Класс* $W_{4,10}$ *состоит из однородных пространств Максвелла, задаваемых тензорами вида* (2.1)*, а ПМНТ, допускающих в точности четырехмерную группу* $G_S = G_{4,10}$*, не существует.*

2.11. Класс $W_{4,11}$. $\mathcal{L}_{4,11} = L\{e_{13},\, e_{24},\, e_2,\, e_4\}$. *Класс* $W_{4,11}$ *состоит из однородных пространств Максвелла, задаваемых тензорами вида* (2.1)*, а ПМНТ, допускающих в точности четырехмерную группу* $G_S = G_{4,11}$*, не существует.*

2.12. $\mathcal{L}_{4,12} = L\{e_{12} - e_{14} + \mu e_3,\, e_{23} + e_{34} + \nu e_2,\, e_1,\, e_2 - e_4\}$. Для случаев $\nu = 0$ и $\nu \neq 0$ получаются различные выражения тензора F_{ij}.

2.12.1. *Класс* $W_{4,12a}$ $(\nu = 0)$. *Класс ПМНТ* $W_{4,12a}$ *совпадает с классом* $C_{4,12a}$ *и определяется тензором* F_{ij} *вида*

$$F_{12} = F_{14} = \Phi(x^2 + x^4), \quad F_{13} = F_{24} = 0, \quad F_{23} = -F_{34} = \Psi(x^2 + x^4), \tag{2.7}$$

где Φ *и* Ψ *— произвольные функции одной переменной.*

Предложение 24. *Не существует ПМНТ с группой симметрий* $G_S = G_{4,12a}$. *Размерность группы* G_S *пространства Максвелла вида* (2.7) *не меньше 5.*

Если 1) функции Φ *и* Ψ *линейно независимы и 2) функции* Ψ, Φ' *и* $\Phi + (x^2 + x^4)\Phi'$ *линейно независимы тоже, то пространство Максвелла вида* (2.7) *допускает 5-мерную группу, соответствующую алгебре* $L\{e_{12} - e_{14},\, e_{23} + e_{34},\, e_1,\, e_3,\, e_2 - e_4\}$.

2.12.2. *Класс* $W_{4,12b}$ $(\nu \neq 0)$. *Класс* $W_{4,12b}$ *совпадает с классом* $W_{4,8}$, *а ПМНТ, допускающих в точности четырехмерную группу* $G_S = G_{4,12b}$, *не существует.*

2.13. Класс $W_{4,13}$**.** $\mathcal{L}_{4,13} = L\{e_{12} - e_{14},\, e_{24} + \lambda e_1,\, e_3,\, e_2 - e_4\}$. *Класс* $W_{4,13}$ *совпадает с классом* $W_{3,15} = C_{6,6}$, *и ПМНТ, допускающих в точности четырехмерную группу* $G_S = G_{4,13}$, *не существует.*

2.14. Класс $W_{4,14}$**.** $\mathcal{L}_{4,14} = L\{e_{12} - e_{14},\, e_{24} + \lambda e_3,\, e_1 + \nu e_3,\, e_2 - e_4\}$. *Класс* $W_{4,14}$ *совпадает с классом* $W_{3,15} = C_{6,6}$, *и ПМНТ, допускающих в точности четырехмерную группу* $G_S = G_{4,14}$, *не существует.*

2.15. Класс $W_{4,15}$**.** $\mathcal{L}_{4,15} = L\{e_{12} - e_{14},\, e_{23} + e_{34},\, e_{24} + \lambda e_1,\, e_2 - e_4\}$. *Класс* $W_{4,15}$ *совпадает с классом* $W_{3,15} = C_{6,6}$, *и ПМНТ, допускающих в точности четырехмерную группу* $G_S = G_{4,15}$, *не существует.*

2.16. Класс $W_{4,16}$**.** $\mathcal{L}_{4,16} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_3,\, e_{23} + e_{34} + \lambda e_1,\, e_{13},\, e_2 - e_4\}$. *ПМНТ класса* $W_{4,16}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = -\varphi\,\Phi_1(u) + \psi\,\Phi_2(u), \quad F_{13} = \Phi_1(u), \\ &F_{23} = -F_{34} = \varphi\,\Phi_2(u) + \psi\,\Phi_1(u), \quad F_{24} = \Phi_2(u), \end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$\begin{aligned} &\Phi_1(u) = \frac{K}{u^2 + \lambda^2} \quad (K = \mathrm{const}), \\ &\Phi_2(u) = \frac{Ku}{2\lambda(u^2 + \lambda^2)} + \frac{3Ku}{4\lambda^3} + \frac{3K(u^2 + \lambda^2)}{4\lambda^4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{\lambda}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

и

$$u = x^2 + x^4, \quad \varphi = \frac{\lambda x^1 + u x^3}{u^2 + \lambda^2}, \quad \psi = \frac{\lambda x^3 - x^1 u}{u^2 + \lambda^2}. \tag{2.10}$$

Предложение 25. *Если* $K \neq 0$, *то пространство Максвелла, определяемое тензором* (2.8)–(2.9)–(2.10), *допускает четырехмерную группу* $G_S = G_{4,16}$.

2.17. Класс $W_{4,17}$. $\mathcal{L}_{4,17} = L\{e_{12}-e_{14},\ e_{23}+e_{34},\ e_{13}+\lambda e_{24}, e_2-e_4\}$. *ПМНТ класса* $W_{4,17}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned}
&F_{12} = F_{14} = \frac{1}{x^2+x^4}\left(A\cos\frac{\ln(x^2+x^4)}{\lambda} + B\sin\frac{\ln(x^2+x^4)}{\lambda}\right),\\
&F_{23} = -F_{34} = \frac{1}{x^2+x^4}\left(B\cos\frac{\ln(x^2+x^4)}{\lambda} - A\sin\frac{\ln(x^2+x^4)}{\lambda}\right),\\
&F_{13} = F_{24} = 0 \ \ (A,\, B = \text{const}).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Класс $W_{4,17}$ совпадает с классом $C_{6,7}$, поэтому *ПМНТ, допускающих в точности четырехмерную группу* $G_S = G_{4,17}$, *не существует.*

2.18. Класс $W_{4,18}$. $\mathcal{L}_{4,18} = L\{e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_4\}$. *ПМНТ класса* $W_{4,18}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned}
&F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0, \quad F_{14} = \frac{Kx^1}{\rho^3}, \quad F_{24} = \frac{Kx^2}{\rho^3},\\
&F_{34} = \frac{Kx^3}{\rho^3} \quad \left(\rho = \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2},\ K = \text{const}\right).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Предложение 26. *Если* $K \neq 0$, *то пространство Максвелла, определяемое тензором* (2.12), *допускает четырехмерную группу* $G_S = G_{4,18}$.

2.19. Класс $W_{4,19}$. $\mathcal{L}_{4,19} = L\{e_{12},\ e_{14},\ e_{24},\ e_3\}$. *ПМНТ класса* $W_{4,19}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned}
&F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = \frac{Kx^1}{u^3}, \quad F_{23} = \frac{Kx^2}{u^3},\\
&F_{34} = \frac{Kx^4}{u^3} \quad \left(u = \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2-(x^4)^2},\ K = \text{const}\right).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Предложение 27. *Если* $K \neq 0$, *то пространство Максвелла, определяемое тензором* (2.13), *допускает четырехмерную группу* $G_S = G_{4,19}$.

2.20. Класс $W_{4,20}$. $\mathcal{L}_{4,20} = L\{e_{12}-e_{14},\ e_{23}+e_{34},\ e_{13},\ e_{24}\}$. *Класс* $W_{4,20}$ *пуст.*

3. Классы ПМНТ, допускающих 5-мерные группы G_S

3.1. Класс $W_{5,1}$. $\mathcal{L}_{5,1} = L\{e_{24},\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$. *Класс* $W_{5,1}$ *совпадает с классом* $C_{5,1}$ *и состоит из однородных пространств Максвелла, задаваемых тензорами вида*

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0,\ F_{13} = C_1,\ F_{24} = C_2\ (C_1, C_2 = \text{const}), \tag{3.1}$$

поэтому *не существует ПМНТ, допускающих в точности 5-мерную группу* $G_S = G_{5,1}$.

3.2. Класс $W_{5,2}$. $\mathcal{L}_{5,2} = L\{e_{13}+\lambda e_{24},\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$. $W_{5,2} = C_{5,2} = C_{5,1}$, и *не существует ПМНТ, допускающих в точности 5-мерную группу* $G_S = G_{5,2}$.

3.3. Класс $W_{5,3}$. $\mathcal{L}_{5,3} = L\{e_{12} - e_{14},\, e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4\}$. *Класс* $W_{5,3}$ *совпадает с классом* $C_{5,3}$ *и состоит из однородных пространств Максвелла, задаваемых тензорами вида*

$$F_{12} = F_{14} = C_1,\ F_{23} = -F_{34} = C_2,\ F_{13} = F_{24} = 0\ (C_1, C_2 = \mathrm{const}), \quad (3.2)$$

поэтому *не существует ПМНТ, допускающих в точности 5-мерную группу* $G_S = G_{5,3}$.

3.4. Класс $W_{5,4}$. $\mathcal{L}_{5,4} = L\{e_{13},\, e_{24},\, e_1,\, e_3,\, e_2 + e_4\}$. $W_{5,4} = C_{5,1} = W_{5,1}$ и *не существует ПМНТ, допускающих в точности 5-мерную группу* $G_S = G_{5,4}$.

3.5. Класс $W_{5,5}$. $\mathcal{L}_{5,5} = L\{e_{12} - e_{14},\, e_{23} + e_{34} + \lambda e_2,\, e_1,\, e_3,\, e_2 - e_4\}$. *Класс* $W_{5,5}$ *совпадает с классом* $C_{5,5}$ *пространств Максвелла, задаваемых при* $\lambda \neq 0$ *тензорами вида* (3.2), *а при* $\lambda = 0$ —

$$F_{12} = F_{14} = \Phi(x^2 + x^4), \quad F_{13} = F_{24} = 0, \quad F_{23} = -F_{34} = \Psi(x^2 + x^4), \quad (3.3)$$

где $\Phi(u)$ *и* $\Psi(u)$ — *произвольные функции.*

Пример 10. Положим в (3.3) $\Phi = K \sin(x^2 + x^4)$ и $\Psi = L$ $(K, L = \mathrm{const})$. Тогда (3.3) примет вид:

$$F_{12} = F_{14} = K \sin(x^2 + x^4),\ F_{13} = F_{24} = 0,\ F_{23} = -F_{34} = L. \quad (3.4)$$

Предложение 28. *Если* $K \neq 0$ *и* $L \neq 0$, *то ПМНТ, определяемое тензором* F_{ij} *вида* (3.4), *допускает в точности 5-мерную группу* G_S, *соответствующую алгебре* $\mathcal{L}_{5,5}$ $(\lambda = 0)$. *При* $\lambda \neq 0$ *не существует ПМНТ, допускающих в точности 5-мерную группу* $G_S = G_{5,5}$.

3.6. Класс $W_{5,6}$. $\mathcal{L}_{5,6} = L\{e_{12} - e_{14},\, e_{24} + \lambda e_3,\, e_1,\, e_2,\, e_4\}$. *Класс* $W_{5,6}$ *пуст.*

3.7. Класс $W_{5,7}$. $\mathcal{L}_{5,7} = L\{e_{12} - e_{14},\, e_{24},\, e_1,\, e_3,\, e_2 - e_4\}$. *Класс* $W_{5,7}$ *совпадает с классом* $C_{5,7}$, *задаваемым тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} &= \frac{K_1}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \\ F_{23} = -F_{34} &= \frac{K_2}{x^2 + x^4}, \quad (K_1,\, K_2 = \mathrm{const}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Так как пространства Максвелла класса $C_{5,7}$ допускают шестимерную группу, то *не существует ПМНТ, допускающих в точности 5-мерную группу* $G_S = G_{5,7}$.

3.8. Класс $W_{5,8}$. $\mathcal{L}_{5,8} = L\{e_{12} - e_{14},\, e_{23} + e_{34},\, e_{24} + \lambda e_3,\, e_1,\, e_2 - e_4\}$. $W_{5,8} = C_{5,8} = C_{5,7}$, и *не существует ПМНТ, допускающих в точности пятимерную группу* $G_S = G_{5,8}$.

3.9. Класс $W_{5,9}$. $\mathcal{L}_{5,9} = L\{e_{12} - e_{14},\, e_{23} + e_{34},\, e_{13},\, e_{24},\, e_2 - e_4\}$. *Класс* $W_{5,9}$ *пуст.*

4. Классы ПМНТ, допускающих 6-мерные группы G_S

4.1. Класс $W_{6,1}$. $\mathcal{L}_{6,1} = L\{e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{14}, e_{24}, e_{34}\}$. *Класс* $W_{6,1}$ *пуст.*

4.2. Класс $W_{6,2}$. $\mathcal{L}_{6,2} = L\{e_{13}, e_{24}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$. *Класс* $W_{6,2}$ *совпадает с классом* $C_{6,2}$*, задаваемым тензором* (3.1).

Предложение 29. *Если* $C_1 \neq 0$ *или* $C_2 \neq 0$*, то ПМНТ, определяемое тензором* (3.1)*, допускает 6-мерную группу* $G_S = G_{6,2}$.

4.3. Класс $W_{6,3}$. $\mathcal{L}_{6,3} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$. *Класс* $W_{6,3}$ *совпадает с классом* $C_{6,3}$*, задаваемым тензором* (3.2).

Предложение 30. *Если* $C_1 \neq 0$ *или* $C_2 \neq 0$*, то ПМНТ, определяемое тензором* (3.2)*, допускает 6-мерную группу* $G_S = G_{6,3}$.

4.4. Класс $W_{6,4}$. $\mathcal{L}_{6,4} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$. *Класс* $W_{6,4}$ *пуст.*

4.5. Класс $W_{6,5}$. $\mathcal{L}_{6,5} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$. *Класс* $W_{6,5}$ *совпадает с классом* $C_{6,5}$*, задаваемым тензором*

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = C_1 \sin\frac{x^2 + x^4}{\lambda} + C_2 \cos\frac{x^2 + x^4}{\lambda}, \\ &F_{23} = -F_{34} = -C_1 \cos\frac{x^2 + x^4}{\lambda} + C_2 \sin\frac{x^2 + x^4}{\lambda}, \\ &F_{13} = F_{24} = 0 \quad (C_1,\, C_2 = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Предложение 31. *Если* $C_1 \neq 0$ *или* $C_2 \neq 0$*, то ПМНТ, определяемое тензором* (4.1)*, допускает 6-мерную группу* $G_S = G_{6,5}$.

4.6. Класс $W_{6,6}$. $\mathcal{L}_{6,6} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{24}, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$. *Класс* $W_{6,6}$ *совпадает с классом* $C_{6,6}$*, задаваемым тензором*

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = \frac{K_1}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \\ &F_{23} = -F_{34} = \frac{K_2}{x^2 + x^4}, \quad (K_1,\, K_2 = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Предложение 32. *Если* $K_1 \neq 0$ *или* $K_2 \neq 0$*, то ПМНТ, определяемое тензором* (4.2)*, допускает 6-мерную группу* $G_S = G_{6,6}$.

4.7. Класс $W_{6,7}$. $\mathcal{L}_{6,7} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda e_{24}, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$. *Класс* $W_{6,7}$ *совпадает с классом* $C_{6,7}$*, задаваемым тензором*

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = \frac{1}{x^2 + x^4}\left(a_1 \cos\frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} - a_2 \sin\frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda}\right), \\ &F_{23} = -F_{34} = \frac{1}{x^2 + x^4}\left(a_1 \sin\frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} + a_2 \cos\frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda}\right), \\ &F_{13} = F_{24} = 0, \quad (a_1,\, a_2 = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Предложение 33. *Если* $a_1 \neq 0$ *или* $a_2 \neq 0$*, то ПМНТ, определяемое тензором* (4.3)*, допускает 6-мерную группу* $G_S = G_{6,7}$.

4.8. Класс $W_{6,8}$. $\mathcal{L}_{6,8} = L\{e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_1, e_2, e_3\}$. *Класс* $W_{6,8}$ *пуст.*

4.9. Класс $W_{6,9}$. $\mathcal{L}_{6,9} = L\{e_{12}, e_{14}, e_{24}, e_1, e_2, e_4\}$. *Класс* $W_{6,9}$ *пуст.*

5. Заключение

В работе завершена классификация пространств Максвелла с нулевым током (ПМНТ) по подгруппам группы Пуанкаре. Описаны классы $W_{k,l}$ ПМНТ, допускающие группы $G_{k,l}$. *Пустыми оказались классы ПМНТ, соответствующие группам* $G_{4,20}$, $G_{5,6}$, $G_{5,9}$, $G_{6,1}$, $G_{6,4}$, $G_{6,8}$ *и* $G_{6,9}$.

Установлено, что *не существует пространств Максвелла с нулевым током, для которых группа* G_S *в точности совпадает с группами* $G_{3,1a}$, $G_{3,1b}$, $G_{3,2b}$ *(*$G_{3,2}$ *при* $\lambda = 0$*)*, $G_{3,4}$, $G_{3,6b}$ *(*$G_{3,6}$ *при* $\lambda = 0$*)*, $G_{3,7}$, $G_{3,9a}$ *(*$G_{3,9}$ *при* $\lambda = \mu = 0$*)*, $G_{3,12}$, $G_{3,15}$, $G_{3,18b}$ *(*$G_{3,18}$ *при* $\lambda = 0$*)*, $G_{3,20}$, $G_{3,21}$, $G_{4,1}$, $G_{4,2}$, $G_{4,3}$, $G_{4,4b}$ *(*$G_{4,4}$ *при* $\lambda = 0$*)*, $G_{4,6}$, $G_{4,8}$, $G_{4,9b}$ *(*$G_{4,9}$ *при* $\lambda = 0$*)*, $G_{4,10}$, $G_{4,11}$, $G_{4,12}$, $G_{4,13}$, $G_{4,14}$, $G_{4,15}$, $G_{4,17}$, $G_{4,20}$, $G_{5,1}$, $G_{5,2}$, $G_{5,3}$, $G_{5,4}$, $G_{5,5}$ *(при* $\lambda \neq 0$*)*, $G_{5,6}$, $G_{5,7}$, $G_{5,8}$, $G_{5,9}$, $G_{6,1}$, $G_{6,4}$, $G_{6,8}$ *и* $G_{6,9}$. Для всех остальных классов $W_{k,l}$ ($3 \leqslant k \leqslant 6$) найдены примеры ПМНТ, для которых группа G_S в точности совпадает с $G_{k,l}$. Для $k = 1, 2$ такие примеры приведены в работах [2, 3].

Список литературы

1. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна – Максвелла и уравнения Лоренца. – Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. – 180 с.
2. *Паринов М. А.* Пространства Максвелла с нулевым током, допускающие одномерные подгруппы группы Пуанкаре // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2009. – Вып. 1 (6). – С. 59–82.
3. *Паринов М. А.* Пространства Максвелла с нулевым током, допускающие двумерные подгруппы группы Пуанкаре // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2008. – Вып. 1 (5). – С. 21–42.

Поступила в редакцию 30.08.2009.