

УДК 629.78

А. С. Антипова¹, В. Г. Бирюков²

Кинематический оптимальный разворот твердого тела

Ключевые слова: твердое тело, оптимальное управление, кватернион.

Рассматривается кинематическая задача оптимального управления угловым движением твердого тела. Минимизируется интегральный квадратичный функционал качества, подынтегральной функцией которого является взвешенная сумма квадратов компонент вектора абсолютной угловой скорости твердого тела. В статье проведено аналитическое и численное исследование задачи для случая, когда два из трех весовых множителей функционала равны между собой.

Keywords: rigid body, optimal control, quaternion.

We consider the kinematic point of optimal control over angular motion of rigid body. In this problem, we minimize the cumulative quadratic functional of feature; this functional is the integral of square's weight for vector components of total angular velocity of rigid body. We represent the analytic treatment and computational investigation for the case, when two out of three weight coefficients of the functional are equal.

1. Постановка задачи

Рассмотрим кинематическую задачу оптимального управления угловым движением твердого тела. Угловое движение твердого тела описывается кватернионным дифференциальным кинематическим уравнением [1]

$$2\dot{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}_Y, \quad (1)$$

где $\bar{\lambda}$ — кватернион, характеризующий ориентацию твердого тела относительно инерциальной системы координат, $\bar{\omega}_Y$ — абсолютная угловая скорость твердого тела, заданная своими проекциями на оси связанной системы координат, знак \circ означает кватернионное произведение, а точка — дифференцирование по времени. В скалярном виде уравнение (1) запишется следующим образом

$$\begin{cases} 2\dot{\lambda}_0 = -\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 = \lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\ 2\dot{\lambda}_2 = \lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_3 = \lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1, \end{cases} \quad (2)$$

где λ_i ($i = \overline{0, 3}$) — компоненты кватерниона $\bar{\lambda}$, имеющие смысл параметров Родрига–Гамильтона (Эйлера), ω_i ($i = \overline{1, 3}$) — проекции вектора

¹Саратовский государственный университет; E-mail: antipova_e@mail.ru.

²Саратовский государственный университет; E-mail: biryukovvg@gmail.com.

абсолютной угловой скорости твердого тела на оси жестко связанной с телом системы координат. Требуется построить управление¹, переводящее твердое тело из начального углового положения

$$\bar{\lambda}(0) = \bar{\lambda}^0 \quad (3)$$

в конечное положение

$$\bar{\lambda}(T) = \bar{\lambda}^T \quad (4)$$

и доставляющее минимум функционалу

$$I = \int_0^T (\alpha_1 \omega_1^2 + \alpha_2 \omega_2^2 + \alpha_3 \omega_3^2) dt, \quad (5)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \text{const}$ — весовые множители функционала ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$). Функционал (5) характеризует, в некотором смысле, общие энергетические затраты на управление. Управление полагаем неограниченным, а время переориентации T — фиксированным (заданным).

2. Метод решения задачи

Для решения поставленной задачи будем использовать принцип максимума Л. С. Понтрягина [3, 4]. Составим функцию Гамильтона–Понтрягина

$$\begin{aligned} H = & -(\alpha_1 \omega_1^2 + \alpha_2 \omega_2^2 + \alpha_3 \omega_3^2) - \frac{1}{2} \psi_0 (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \lambda_3 \omega_3) + \\ & + \frac{1}{2} \psi_1 (\lambda_0 \omega_1 + \lambda_2 \omega_3 - \lambda_3 \omega_2) + \frac{1}{2} \psi_2 (\lambda_0 \omega_2 + \lambda_3 \omega_1 - \lambda_1 \omega_3) + \\ & + \frac{1}{2} \psi_3 (\lambda_0 \omega_3 + \lambda_2 \omega_1 - \lambda_2 \omega_1), \quad (6) \end{aligned}$$

где ψ_j ($j = \overline{0, 3}$) — сопряженные переменные, удовлетворяющие системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 2\dot{\psi}_0 = -\psi_1 \omega_1 - \psi_2 \omega_2 - \psi_3 \omega_3, \\ 2\dot{\psi}_1 = \psi_0 \omega_1 + \psi_2 \omega_3 - \psi_3 \omega_2, \\ 2\dot{\psi}_2 = \psi_0 \omega_2 + \psi_3 \omega_1 - \psi_1 \omega_3, \\ 2\dot{\psi}_3 = \psi_0 \omega_3 + \psi_1 \omega_2 - \psi_2 \omega_1. \end{cases} \quad (7)$$

В кватернионном виде система (7) имеет вид

$$2\dot{\bar{\psi}} = \bar{\psi} \circ \bar{\omega}, \quad (8)$$

где $\bar{\psi}$ — кватернионная сопряженная переменная. Для неограниченного управления из условия максимума функции Гамильтона–Понтрягина находим

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{-\psi_0 \lambda_1 + \psi_1 \lambda_0 + \psi_2 \lambda_3 - \psi_3 \lambda_2}{4\alpha_1}, \\ \omega_2 = \frac{-\psi_0 \lambda_2 - \psi_1 \lambda_3 + \psi_2 \lambda_0 - \psi_3 \lambda_1}{4\alpha_2}, \\ \omega_3 = \frac{-\psi_0 \lambda_3 + \psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1 + \psi_3 \lambda_0}{4\alpha_3}. \end{cases} \quad (9)$$

¹В качестве управления выступает вектор абсолютной угловой скорости $\bar{\omega}$.

Таким образом, задача сведена к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2), (7), замкнутой законом оптимального управления (9) с граничными условиями (3), (4).

Следуя работе [1], введем обозначения:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\psi_0\lambda_1 + \psi_1\lambda_0 + \psi_2\lambda_3 - \psi_3\lambda_2, \\ p_2 &= -\psi_0\lambda_2 - \psi_1\lambda_3 + \psi_2\lambda_0 - \psi_3\lambda_1, \\ p_3 &= -\psi_0\lambda_3 + \psi_1\lambda_2 - \psi_2\lambda_1 + \psi_3\lambda_0. \end{aligned} \quad (10)$$

В кватернионной форме соотношения (10) имеют вид

$$\bar{p} = \text{vect}(\tilde{\lambda} \circ \bar{\psi}). \quad (11)$$

Перепишем (9) с учетом (10)

$$\omega_1 = \frac{p_1}{4\alpha_1}, \quad \omega_2 = \frac{p_2}{4\alpha_2}, \quad \omega_3 = \frac{p_3}{4\alpha_3}. \quad (12)$$

Построим дифференциальное уравнение для вектора \bar{p} . Продифференцируем выражение для вектора \bar{p} из (11) по времени

$$\dot{\bar{p}} = \text{vect}(\dot{\tilde{\lambda}} \circ \bar{\psi}) + \text{vect}(\tilde{\lambda} \circ \dot{\bar{\psi}}). \quad (13)$$

Заменим $\dot{\tilde{\lambda}}$ и $\dot{\bar{\psi}}$ с помощью дифференциальных уравнений (2) и (7). Из уравнения (1)

$$2\dot{\tilde{\lambda}} = -\bar{\omega} \circ \tilde{\lambda}. \quad (14)$$

Подставляя выражения (14), (8) в уравнение (13) и учитывая (11), получим

$$\dot{\bar{p}} = -\frac{1}{2}\bar{\omega} \times \bar{p} + \frac{1}{2}\bar{p} \times \bar{\omega} = \bar{p} \times \bar{\omega}, \quad (15)$$

где \times означает векторное произведение.

Таким образом, задача оптимальной переориентации твердого тела свелась к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 2\dot{\tilde{\lambda}} = \bar{\omega} \circ \tilde{\lambda}, \\ \dot{\bar{p}} = \bar{p} \times \bar{\omega} \end{cases} \quad (16)$$

с краевыми условиями (3) и (4).

Используя выражения для оптимального управления (12) и второе уравнение системы (16), построим дифференциальные уравнения для нахождения закона оптимального управления

$$\begin{cases} \alpha_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(\alpha_3 - \alpha_2) = 0, \\ \alpha_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(\alpha_1 - \alpha_3) = 0, \\ \alpha_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(\alpha_2 - \alpha_1) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Отметим, что по своей структуре система обыкновенных дифференциальных уравнений (17) совпадает с системой динамических уравнений Эйлера, описывающих движение по инерции твердого тела с одной неподвижной точкой [2] (если считать $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ осевыми моментами инерции твердого тела). Общее решение такой системы выражается через эллиптические функции.

3. Частное аналитическое решение задачи

Для частного случая кинематической задачи оптимального управления угловым движением твердого тела при равных между собой весовых множителях $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ система (17) примет вид:

$$\begin{cases} \omega_1 = \text{const} = C_1, \\ \omega_2 = \text{const} = C_2, \\ \omega_3 = \text{const} = C_3. \end{cases} \quad (18)$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 определяются из граничных условий (3) и (4) следующим образом:

$$\bar{C} = \frac{2 \arccos(\text{sqa}(\bar{\lambda}^0 \circ \bar{\lambda}^T))}{T \sin(\arccos(\text{sqa}(\bar{\lambda}^0 \circ \bar{\lambda}^T)))} \text{vect}(\bar{\lambda}^0 \circ \bar{\lambda}^T). \quad (19)$$

Рассмотрим частный случай кинематической задачи оптимального управления угловым движением твердого тела при двух равных между собой весовых множителях:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3, \quad (20)$$

С учетом (20) система уравнений (17) примет вид:

$$\begin{cases} \alpha_1 \dot{\omega}_1 = (\alpha_1 - \alpha_3) \omega_2 \omega_3, \\ \alpha_1 \dot{\omega}_2 = (\alpha_3 - \alpha_1) \omega_1 \omega_3, \\ \alpha_1 \dot{\omega}_3 = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Решение ее запишется в виде (см. [1])

$$\begin{cases} \omega_1 = A \sin(\zeta + kt), \\ \omega_2 = A \cos(\zeta + kt), \\ \omega_3 = C_3, \end{cases} \quad (22)$$

где $A, C_3, \zeta, k = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1} C_3$ — постоянные интегрирования, определяемые из краевых условий.

Решение кватернионного дифференциального уравнения (1), замкнутого законом оптимального управления (22), имеет вид

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^0 \circ \left[\cos \frac{|\bar{\xi}|t}{2} + \frac{\bar{\xi}}{|\bar{\xi}|} \sin \frac{|\bar{\xi}|t}{2} \right] \circ \left[\cos \frac{1}{2} kt + \bar{i}_3 \sin \frac{1}{2} kt \right], \quad (23)$$

где $\bar{\xi}$ — постоянный вектор, который выражается через постоянные A, C_3, ζ, k следующим образом: $\bar{\xi} = A \sin \zeta \bar{i}_1 + A \cos \zeta \bar{i}_2 + (C_3 - k) \bar{i}_3$.

Для определения постоянного вектора $\bar{\xi}$ воспользуемся конечным условием (4). Имеем

$$\bar{\lambda}^T = \bar{\lambda}^0 \circ \left[\cos \frac{|\bar{\xi}|T}{2} + \frac{\bar{\xi}}{|\bar{\xi}|} \sin \frac{|\bar{\xi}|T}{2} \right] \circ \left[\cos \frac{kT}{2} + \bar{i}_3 \sin \frac{kT}{2} \right]. \quad (24)$$

Введем обозначение $\bar{\beta} = \bar{\lambda}^0 \circ \bar{\lambda}^T$ и перепишем (24) в скалярном виде:

$$\begin{cases} \beta_0 = \cos \frac{|\xi|T}{2} + \cos \frac{kT}{2} + \frac{\xi_3}{|\bar{\xi}|} \sin \frac{\xi T}{2} \sin \frac{kT}{2}, \\ \beta_1 = \frac{\xi_1}{|\bar{\xi}|} \sin \frac{|\bar{\xi}|T}{2} \cos \frac{kT}{2} + \frac{\xi_2}{|\bar{\xi}|} \sin \frac{|\bar{\xi}|T}{2} \sin \frac{kT}{2}, \\ \beta_2 = \frac{\xi_2}{|\bar{\xi}|} \sin \frac{|\bar{\xi}|T}{2} \cos \frac{kT}{2} - \frac{\xi_1}{|\bar{\xi}|} \sin \frac{|\bar{\xi}|T}{2} \sin \frac{kT}{2}, \\ \beta_3 = \frac{\xi_3}{|\bar{\xi}|} \sin \frac{|\bar{\xi}|T}{2} \cos \frac{kT}{2} + \frac{\xi_2}{|\bar{\xi}|} \cos \frac{|\bar{\xi}|T}{2} \sin \frac{kT}{2}. \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом, кинематическая задача оптимальной переориентации твердого тела свелась к решению системы трансцендентных уравнений (25) относительно $\xi_1, \xi_2, \xi_3, |\bar{\xi}|$, которая может быть решена численно. Получив эти величины, можно найти постоянные A, ζ, C_3 , а затем, пользуясь формулой (22), получить оптимальное управление $\bar{\omega}$ как явную функцию времени.

Систему (25) можно решать, например, методом Ньютона, используя в качестве начальных приближений для ξ_1, ξ_2, ξ_3 , компоненты вектора \bar{C} , определяемого равенством (19).

4. Численные примеры

Для численного решения системы (25) была разработана программа на языке программирования C#, реализующая метод Ньютона для нахождения неизвестного вектора ξ . В качестве начальных приближений для ξ_1, ξ_2, ξ_3 выбирались компоненты вектора \bar{C} , определяемые равенством (19). На рис. 1–4 представлены результаты численного решения задачи для различных граничных условий.

Задача решалась для граничных условий следующего вида (рис. 1–2): кватернион начальной ориентации:

$$\lambda_0^0 = -0.62721, \lambda_1^0 = 0.32651, \lambda_2^0 = 0.32651, \lambda_3^0 = -0.62721$$

и кватернион конечной ориентации:

$$\lambda_0^T = -0.05604, \lambda_1^T = 0.78858, \lambda_2^T = 0.56576, \lambda_3^T = 0.23435$$

(что соответствует углам Эйлера–Крылова $\varphi = 45^\circ, \theta = 90^\circ, \gamma = 260^\circ$ в начальном положении и $\varphi = 120^\circ, \theta = 120^\circ, \gamma = 45^\circ$ в конечном положении).

Весовые множители функционала задавались следующим образом: $\alpha_1 = \alpha_2 = 2000, \alpha_3 = 1000$. Время переориентации $T = 3000$.

На рис. 1 приведены графики изменения компонент вектора абсолютной угловой скорости твердого тела ω_i ($i = \overline{1, 3}$) (оптимального управления) от времени. На рис. 2 приведены графики изменения компонент кватерниона ориентации λ_j ($i = \overline{0, 3}$) от времени.

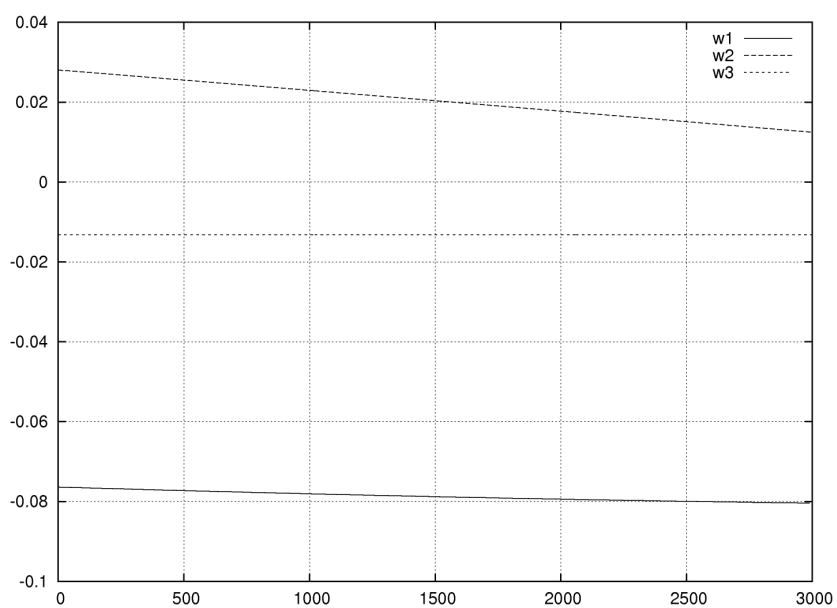


Рис. 1

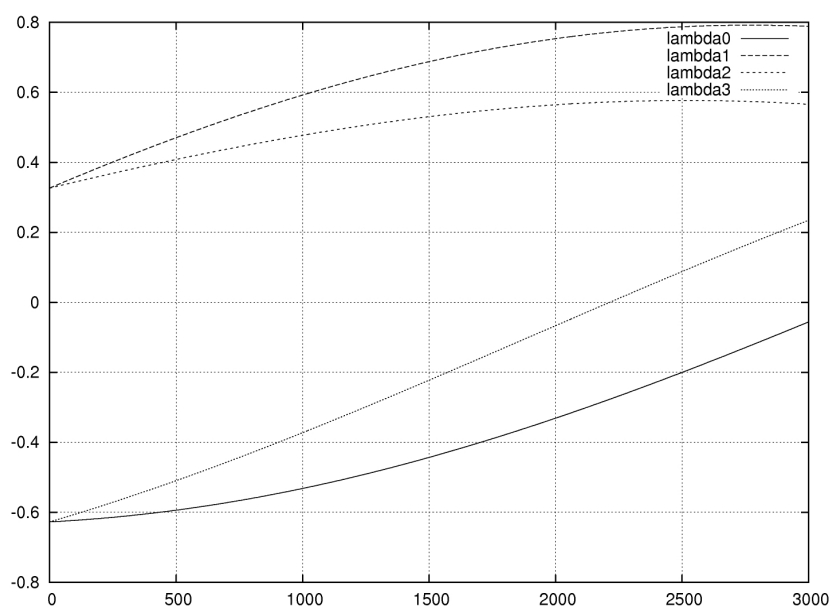


Рис. 2

Задача решалась также для граничных условий следующего вида (рис. 3–4): кватернион начальной ориентации

$$\lambda_0^0 = 0.77452, \lambda_1^0 = 0.34151, \lambda_2^0 = 0.52452, \lambda_3^0 = 0.09151$$

и кватернион конечной ориентации

$$\lambda_0^T = 1, \lambda_1^T = 0, \lambda_2^T = 0, \lambda_3^T = 0$$

(что соответствует углам Эйлера–Крылова $\varphi = 60^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\gamma = 30^\circ$ в начальном положении и $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$, $\gamma = 0^\circ$ в конечном положении), весовые множители функционала $\alpha_1 = \alpha_2 = 2000$, $\alpha_3 = 1000$, время переориентации $T=3000$, результаты численного решения представлены на рис. 3–4.

На рис. 3 приведены графики зависимости компонент вектора оптимального управления от времени, на рис. 4 — графики зависимости компонент кватерниона ориентации от времени.

Из приведенных на рисунках графиков видно, что построенный закон оптимального управления обеспечивает перевод твердого тела из заданного начального углового положения в заданное конечное.

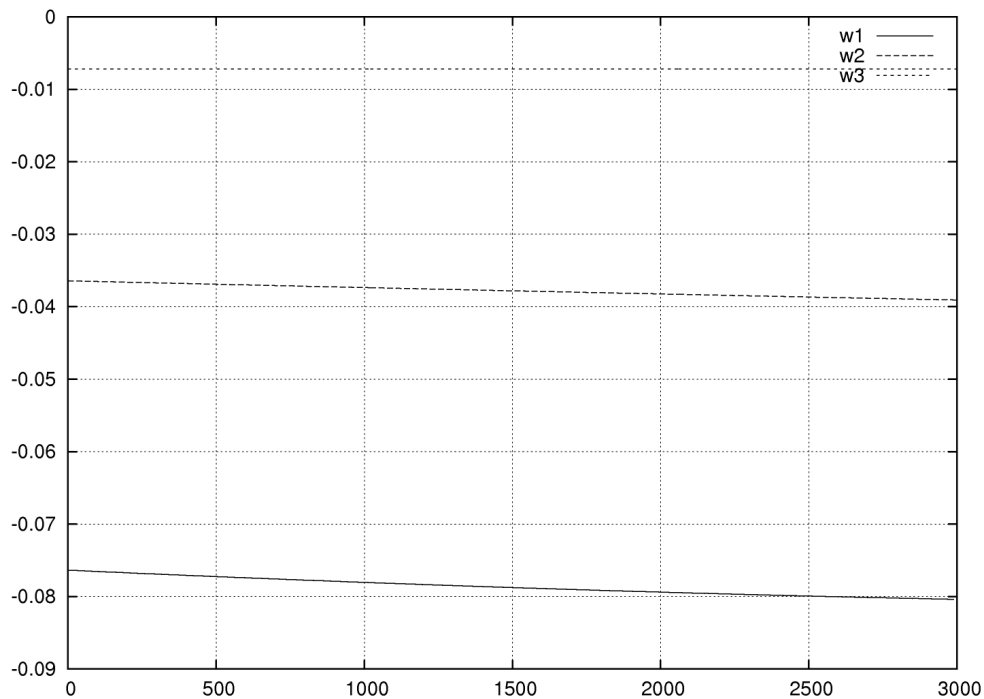


Рис. 3

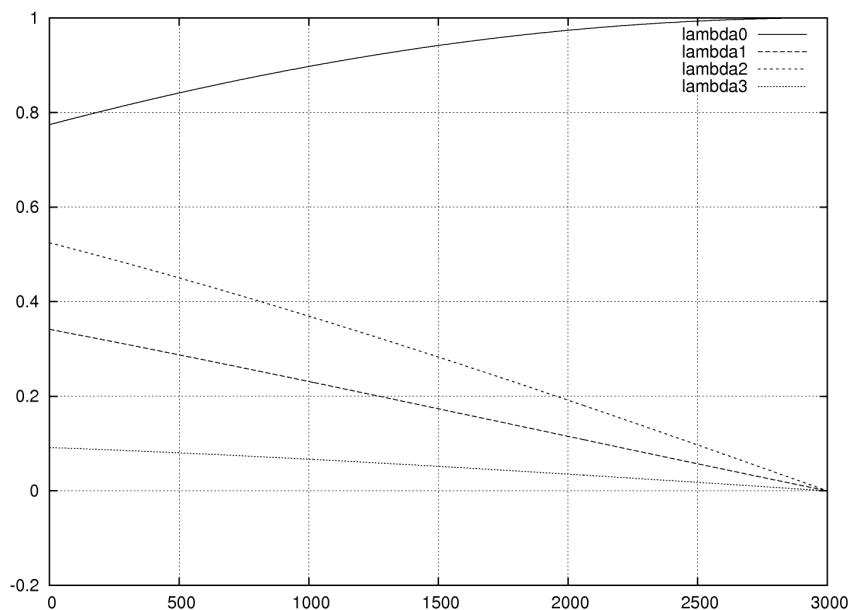


Рис. 4

Список литературы

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела // М.: Наука, 1973. – 320 с.
2. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 2 // М.: Наука, 1966. – 332 с.
3. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. Математическая теория оптимальных процессов // М.: Наука, 1983. – 392 с.
4. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление // М.: Наука, 1971. – 396 с.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы // М.: Наука, 1989. – 432 с.
6. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия движения. // Саратов: СГУ им. Н. Г. Чернышевского, 2006. – 236 с.

Поступила в редакцию 04.12.2010.