Математика и её приложения: ЖИМО. 2010. Вып. 1 (7). С. 19 – 24.

УДК 512.543

П. А. Бобровский[1], Е. В. Соколов[2]

Финитная отделимость циклических подгрупп некоторых обобщенных свободных произведений двух групп

Ключевые слова: обобщенные свободные произведения, отделимость в классе конечных π-групп.

Найдено достаточное условие максимальности семейства всех финитно отделимых циклических подгрупп свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами, одна из которых является ретрактом соответствующего свободного множителя. Аналогичный результат получен для случая отделимости в классе конечных p-групп.

Keywords: generalized free products, separability in the class of all finite π-groups.

Let G be the free product of two groups with amalgamated subgroup, which is a retract of one of the free factors. We find the sufficient condition for the family of all finitely separable cyclic subgroups of group G to be maximal. A similar result is obtained for the case of the separability in the class of all finite p-groups.

1. Формулировка результатов

Пусть π — непустое множество простых чисел и $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп. Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathcal{F}_\pi$-отделимой в этой группе, если для любого элемента $g \in G \backslash H$ найдется такой гомоморфизм φ группы G на конечную π-группу, что $g\varphi \notin H\varphi$. Группа G называется $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой, если ее единичная подгруппа $\mathcal{F}_\pi$-отделима. Если π совпадает с множеством всех простых чисел, мы получаем хорошо известные понятия финитной отделимости и аппроксимируемости соответственно.

Подгруппу H будем называть π'-изолированной в группе G, если для всякого элемента $g \in G$ и для всякого простого числа $q \notin \pi$ из условия $g^q \in H$ следует, что $g \in H$. Легко увидеть, что π'-изолированность является необходимым условием $\mathcal{F}_\pi$-отделимости, поэтому при изучении $\mathcal{F}_\pi$-отделимых циклических подгрупп имеет смысл ограничиться рассмотрением лишь π'-изолированных подгрупп.

Через $\Delta_\pi(G)$ мы будем обозначать семейство всех π'-изолированных циклических подгрупп группы G, не являющихся $\mathcal{F}_\pi$-отделимыми в этой группе. Ввиду отмеченного выше семейство $\mathcal{F}_\pi$-отделимых циклических

[1]Ивановский государственный университет.

[2]Ивановский государственный университет; E-mail: `ev-sokolov@yandex.ru`.

подгрупп группы G оказывается максимальным тогда и только тогда, когда $\Delta_\pi(G) = \varnothing$.

Далее, будем говорить, что группа G $\mathcal{F}_\pi$-квазирегулярна по своей подгруппе H, если для любой подгруппы $M \leqslant H$, нормальной в H и имеющей в ней конечный π-индекс, найдется подгруппа N, нормальная и имеющая конечный π-индекс уже в группе G, и такая, что $N \cap H \leqslant M$. Понятие квазирегулярности тесно связано с отделимостью. Можно показать, что если группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема и подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в ней, то $\mathcal{F}_\pi$-квазирегулярность G по H равносильна $\mathcal{F}_\pi$-отделимости в G всех подгрупп, лежащих в подгруппе H, нормальных в ней и имеющих в ней же конечный индекс. Впрочем, нам это утверждение для дальнейших рассуждений не потребуется.

Наконец, напомним, что подгруппа H группы G называется ретрактом этой группы, если существует такая подгруппа F, нормальная в G, что $G = HF$ и $H \cap F = 1$. Иначе говоря, подгруппа H — ретракт группы G, если последняя является расщепляющимся расширением некоторой группы F при помощи группы H.

Основной результат данной статьи содержит следующая

Теорема. *Пусть $G = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi \rangle$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ, причем подгруппа K является ретрактом группы B. Пусть также множество π либо совпадает с множеством всех простых чисел, либо является одноэлементным. Если группы A и B $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы, группа A $\mathcal{F}_\pi$-квазирегулярна по подгруппе H и подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в этой группе, то π'-изолированная циклическая подгруппа группы G $\mathcal{F}_\pi$-отделима в ней тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\Delta_\pi(A) \cup \Delta_\pi(B)$.*

Эта теорема является обобщением результатов, полученных авторами в [1] и [6] и, в свою очередь, обобщающих одно из утверждений статьи [4] о том, что свободное произведение с объединенными ретрактами двух π_c-групп (т. е. групп, все циклические подгруппы которых финитно отделимы) является π_c-группой.

Заметим, что каково бы ни было обобщенное свободное произведение $G = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi \rangle$, любая циклическая подгруппа, сопряженная с некоторой подгруппой из семейства $\Delta_\pi(A) \cup \Delta_\pi(B)$, заведомо не будет $\mathcal{F}_\pi$-отделимой в группе G. Поэтому сформулированная теорема в действительности утверждает, что при указанных ограничениях семейство $\mathcal{F}_\pi$-отделимых циклических подгрупп группы G является максимальным.

2. Доказательство теоремы

Напомним, что свободным произведением групп A и B с подгруппами $H \leqslant A$ и $K \leqslant B$, объединенными относительно изоморфизма $\varphi : H \to K$, называется группа $G = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi \rangle$, образующими которой являются все образующие групп A и B, а определяющими соотношениями — все соотношения групп A и B, а также все соотношения вида $h = h\varphi$, где $h \in H$.

Подгруппы $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$ будем называть (H, K, φ, π)-совместимыми, если существует нормальная подгруппа N конечного π-индекса группы G такая, что $N \cap A = R$ и $N \cap B = S$. Хорошо известно [5], что если π совпадает с множеством всех простых чисел, то для (H, K, φ, π)-совместимости подгрупп R и S необходимо и достаточно, чтобы они были нормальны в свободных множителях, имели в них конечные индексы и удовлетворяли условию $(R \cap H)\varphi = S \cap K$. Критерий (H, K, φ, π)-совместимости в случае, когда множество π является одноэлементным, содержит

Предложение 1 ([3]). *Пусть $\pi = \{p\}$. Подгруппы $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$ являются (H, K, φ, π)-совместимыми тогда и только тогда, когда существуют такие последовательности подгрупп*

$$R = R_0 \leqslant \dots \leqslant R_m = A,$$
$$S = S_0 \leqslant \dots \leqslant S_n = B,$$

что

1) *R_i, S_j — нормальные подгруппы групп A и B соответственно $(0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant n)$,*

2) $|R_{i+1}/R_i| = |S_{j+1}/S_j| = p \quad (0 \leqslant i \leqslant m-1,\ 0 \leqslant j \leqslant n-1)$,

3) *изоморфизм φ отображает множество $\{R_i \cap H,\ 0 \leqslant i \leqslant m\}$ на множество $\{S_j \cap K,\ 0 \leqslant j \leqslant n\}$.*

Для доказательства нашей теоремы мы воспользуемся сведением к следующему достаточному условию максимальности семейства $\mathcal{F}_\pi$-отделимых циклических подгрупп группы G.

Предложение 2 ([7]: теоремы 1.3 и 1.7). *Пусть множество π либо совпадает с множеством всех простых чисел, либо является одноэлементным. Пусть также группы A и B $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы, подгруппы H и K $\mathcal{F}_\pi$-отделимы в сомножителях и для любых двух подгрупп $M \leqslant A$ и $N \leqslant B$, нормальных в группах A и B и имеющих в них конечные π-индексы, найдется пара (H, K, φ, π)-совместимых подгрупп $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$ такая, что $R \leqslant M$ и $S \leqslant N$. Тогда π'-изолированная циклическая подгруппа группы G $\mathcal{F}_\pi$-отделима в ней, если и только если она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\Delta_\pi(A) \cup \Delta_\pi(B)$.*

Для того, чтобы применить сформулированное предложение, нам потребуется еще одно вспомогательное утверждение.

Предложение 3. *Пусть подгруппа Y — ретракт группы X и F — такая нормальная подгруппа в X, что $X = YF$ и $Y \cap F = 1$. Пусть также N — нормальная подгруппа группы Y. Тогда NF — нормальная подгруппа группы X, $NF \cap Y = N$ и $X/NF \cong Y/N$. В частности, $[X : NF] = [Y : N]$.*

Доказательство. Поскольку подгруппа F нормальна в группе X и подгруппа N нормальна в подгруппе Y, то

$$(NF)^X \subseteq N^X F = (N^Y)^F F \subseteq N^F F \subseteq NF.$$

Изоморфизм фактор-групп X/NF и Y/N вытекает из соотношения

$$X/NF = YF/NF \cong Y/N(Y \cap F)$$

и тривиальности пересечения подгрупп Y и F.

Наконец, рассматривая произвольный элемент $x \in NF \cap Y$ и записывая его в виде $x = yf$, где $y \in N$, $f \in F$, мы получаем, что $f = y^{-1}x \in Y$. Но $Y \cap F = 1$, поэтому $f = 1$ и $x = y \in N$. Таким образом, $NF \cap Y \subseteq N$ и, поскольку обратное включение очевидно, $NF \cap Y = N$, что и требовалось. ■

Перейдем теперь непосредственно к доказательству основной теоремы. Зафиксируем произвольные нормальные подгруппы конечного π-индекса $M \leqslant A$, $N \leqslant B$ и укажем такую пару (H, K, φ, π)-совместимых подгрупп R и S, что $R \leqslant M$ и $S \leqslant N$.

Очевидно, что подгруппа $T = (M \cap H) \cap (N \cap K)\varphi^{-1}$ нормальна в подгруппе H и имеет в ней конечный π-индекс. Воспользуемся $\mathcal{F}_\pi$-квазирегулярностью группы A по подгруппе H и найдем подгруппу $P \leqslant A$, нормальную в группе A, имеющую в ней конечный π-индекс и такую, что $P \cap H \leqslant T$.

Пусть F — нормальная подгруппа группы B, удовлетворяющая условиям $B = KF$ и $K \cap F = 1$ (ее существование следует из того, что подгруппа K является ретрактом группы B). Положим $Q = (P \cap H)\varphi F$, $R = P \cap M$ и $S = Q \cap N$.

Согласно предложению 3 Q — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы B. Поэтому подгруппы R и S нормальны в свободных множителях, имеют в них конечные π-индексы и содержатся в подгруппах M и N соответственно. Кроме того, так как

$$P \cap H \leqslant T \leqslant M \cap H$$

и

$$Q \cap K = (P \cap H)\varphi \leqslant T\varphi \leqslant N \cap K,$$

то

$$(R \cap H)\varphi = (P \cap M \cap H)\varphi = (P \cap H)\varphi = Q \cap N \cap K = S \cap K.$$

Стало быть, если π совпадает с множеством всех простых чисел, то (R, S) оказывается искомой парой (H, K, φ, π)-совместимых подгрупп. Покажем, что и в случае, когда множество π состоит из одного простого числа p, построенные подгруппы R и S являются (H, K, φ, π)-совместимыми.

Хорошо известно, что каждая конечная p-группа обладает нормальным рядом с факторами порядка p. Пусть

$$1 = R_0/R \leqslant \ldots \leqslant R_m/R = A/R$$

такой ряд фактор-группы A/R. Тогда

$$R = R_0 \leqslant \ldots \leqslant R_m = A$$

есть последовательность нормальных подгрупп группы A, факторы которой ввиду соотношения

$$R_{i+1}/R_i \cong (R_{i+1}/R)/(R_i/R)$$

также имеют порядок p. Положим $U_i = R_i \cap H$, $V_i = (R_i \cap H)\varphi$ и $Q_i = V_i F$, где $0 \leqslant i \leqslant m$ и F — определенная ранее подгруппа группы B.

Поскольку U_i и V_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, — нормальные подгруппы конечного p-индекса в подгруппах H и K соответственно, то Q_i в силу предложения 3 — нормальные подгруппы конечного p-индекса группы B. Более того,

$$Q_{i+1}/Q_i = V_{i+1}F/V_iF \cong V_{i+1}/V_i(V_{i+1} \cap F).$$

Но $V_{i+1} \leqslant K$ и $K \cap F = 1$, следовательно, $Q_{i+1}/Q_i \cong V_{i+1}/V_i$ и $|Q_{i+1}/Q_i| = |V_{i+1}/V_i|$.

Заметим далее, что

$$\begin{aligned} V_{i+1}/V_i \cong U_{i+1}/U_i &= \\ &= (R_{i+1} \cap H)/(R_i \cap H) = \\ &= (R_{i+1} \cap H)/(R_i \cap H)(R_{i+1} \cap H \cap R_i) \cong \\ &\cong (R_{i+1} \cap H)R_i/(R_i \cap H)R_i = \\ &= (R_{i+1} \cap H)R_i/R_i \leqslant \\ &\leqslant R_{i+1}/R_i. \end{aligned}$$

Поэтому порядок фактор-группы V_{i+1}/V_i, а вместе с ней и фактор-группы Q_{i+1}/Q_i, делит порядок фактор-группы R_{i+1}/R_i, равный p. Так как p — простое число, то отсюда следует, что либо $Q_{i+1} = Q_i$, либо $|Q_{i+1}/Q_i| = p$. Наконец, согласно предложению 3 $Q_i \cap K = V_i = (R_i \cap H)\varphi$.

Продолжим теперь последовательность

$$B = Q_m \geqslant \ldots \geqslant Q_0 = Q$$

до подгруппы S. Пусть

$$1 = B_0/S \leqslant \ldots \leqslant B_k/S = B/S \ —$$

нормальный ряд фактор-группы B/S с факторами порядка p и $L_i = B_i \cap Q$, $0 \leqslant i \leqslant k$. Положим $S_i = L_i$, если $0 \leqslant i \leqslant k$, и $S_i = Q_{i-k}$, если $k \leqslant i \leqslant k+m$ (здесь необходимо заметить, что $L_k = B \cap Q = Q = Q_0$).

Как и выше, можно показать, что порядок фактор-группы L_{i+1}/L_i делит порядок фактор-группы B_{i+1}/B_i и потому либо $L_{i+1} = L_i$, либо $|L_{i+1}/L_i| = p$. Кроме того, так как $S \leqslant L_i \leqslant Q$, $0 \leqslant i \leqslant k$, то

$$S \cap K = L_i \cap K = Q \cap K.$$

Стало быть, изоморфизм φ отображает множество $\{R_i \cap H,\ 0 \leqslant i \leqslant m\}$ на множество $\{S_j \cap K,\ 0 \leqslant j \leqslant k+m\}$.

Теперь, удаляя из последовательности

$$S = S_0 \leqslant \ldots \leqslant S_k = Q \leqslant \ldots \leqslant S_{k+m} = B$$

повторяющиеся члены и переобозначая оставшиеся ее элементы, мы получаем, наконец, последовательности

$$R = R_0 \leqslant \ldots \leqslant R_m = A,\ S = S_0 \leqslant \ldots \leqslant S_n = B,$$

удовлетворяющие всем условиям предложения 1. Таким образом, подгруппы R и S оказываются (H, K, φ, π)-совместимыми.

Для завершения доказательства нам остается лишь заметить, что согласно основной теореме из работы [2] подгруппа K является $\mathcal{F}_\pi$-отделимой в группе B. Поэтому мы можем применить к нашей группе G предложение 2.

Отметим еще, что если подгруппа H — ретракт группы A, то последняя в силу предложения 3 $\mathcal{F}_\pi$-квазирегулярна по этой подгруппе. Таким образом, доказанная теорема действительно обобщает результаты работ [1] и [6], где рассматриваются свободные произведения, в которых обе объединяемые подгруппы являются ретрактами свободных множителей.

Список литературы

1. *Бобровский П. А.* Отделимость циклических подгрупп некоторых обобщенных свободных произведений двух групп // Вестн. молодых ученых ИвГУ. – 2007. – С. 82–85.
2. *Гудовщикова А. С., Соколов Е. В.* Замечание об аппроксимируемости расщепляющихся расширений групп // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2010. – Вып. 1 (7). – С. 29–32.
3. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. матем. журн. – 1999. – Т. 40. – № 2. – С. 395–407.
4. *Allenby R. B. J. T., Gregorac R. J.* On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. – 1973. – V. 319. – P. 9–17.
5. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – V. 106. – P. 193–209.
6. *Bobrovskii P. A., Sokolov E. V.* The cyclic subgroup separability of certain generalized free products of two groups // Algebra Colloquium. – 2010. – V. 17. – № 4. – P. 577–582.
7. *Sokolov E. V.* On the cyclic subgroup separability of free products of two groups with amalgamated subgroup // Lobachevskii J. Math. – 2002. – V. 11. – P. 27–38.

Поступила в редакцию 05.01.2010.