Математика и её приложения: ЖИМО. 2010. Вып. 1 (7). С. 33 – 40.

УДК 004.31

В. М. Деундяк [1], М. А. Жданова [2]

Обобщенная марковская модель источника ошибок q-ичного цифрового канала нескольких физических состояний

Ключевые слова: источники ошибок, цифровые каналы, q-ичные ошибки, q-ичные каналы, математическое моделирование.

В работе построена математическая марковская модель источника ошибок q-ичного цифрового канала нескольких физических состояний, описан алгоритм работы этой модели и представлена ее компьютерная реализация. Построенная модель соединяет в себе преимущества различных подходов к моделированию источников ошибок и содержит в качестве частных случаев как q-ичные аналоги многих известных бинарных моделей, так и классическую марковскую модель.

Keywords: error source, digital channel, q-th errors, q-th channels, mathematical modeling.

We suggest the Markov's mathematical model for the error source of $GF(q)$-alphabet based digital channel with a number of physical states; we describe the algorithm for it and present it's computer model.

1. Введение и постановка задачи

В процессе разработки и исследования новых методов борьбы с помехами в цифровых каналах передачи данных существенным этапом является тестирование помехоустойчивых кодеков, которое удобно осуществлять с помощью имитационных моделей каналов; важным элементом построения таких моделей является математическое моделирование источника ошибок канала [3].

Один из подходов к такому моделированию заключается в использовании цепей Маркова. Этот подход позволяет с любой степенью точности аппроксимировать статистику ошибок в канале [6]. На его основе построены многие известные модели, такие как, например, модель Элиота – Гильберта и модель Смита – Боуэна – Джойса [3]. В настоящее время марковские процессы нашли применение при моделировании мешающего воздействия в следящих системах и при исследовании помехоустойчивости в дискретных системах синхронизации [7]. Другой подход к моделированию источников

[1]Южный федеральный университет; E-mail: vlade@math.rsu.ru.
[2]Южный федеральный университет; E-mail: mary.zhdanova@gmail.com.

ошибок представлен в [4], [5], где на основе использования квазипериодических последовательностей случайных величин построена математическая модель источника ошибок канала — q-ичная QP-модель, обобщающая многие известные модели, например, модели Турина и Турина–Попова, которые, в свою очередь, являются обобщениями других известных моделей, таких как модель Гильберта, модель Бергера–Манделброта, модель Элиота и другие (см. [2], [3]).

В настоящей работе соединяются преимущества обоих этих подходов. Будем говорить, что реальный канал передачи данных находится в *фиксированном физическом состоянии*, если основные параметры его помеховой обстановки относительно стабильны. Целью работы является построение марковской модели канала n физических состояний, каждое из которых описывается q-ичной QP-моделью.

2. Квазипериодические последовательности случайных величин

Приведем сведения из [4], [5], необходимые для построения обобщенной марковской модели цифрового канала C. Пусть p_{tr} — вероятность достоверной передачи символа в канале, а $p_{\mathrm{er}} = 1 - p_{\mathrm{tr}}$ — вероятность ошибочной передачи символа. Следуя [4], [5], рассмотрим вероятностное пространство $S = (\Omega,\, A,\, p)$, где $\Omega = \{t;\, e\}$ (e соответствует наличию, а t — отсутствию ошибки); A — множество всех подмножеств Ω; $p : A \to [0, 1]$ — вероятностная функция, определяемая условием: $p(t) = p_{\mathrm{tr}}$, $p(e) = p_{\mathrm{er}}$.

Отрезок числовой оси $\mathbb{R}$ с целочисленными концами a и b ($a < b$) будем обозначать $[a,\, b]$, а соответствующий отрезок множества целых чисел $\mathbb{Z}$ обозначим $[a,\, b]_Z$. Под длиной $[a,\, b]_Z$ будем понимать $b - a + 1$. Зададим на отрезке $L = [0,\, T - 1]_Z$ дискретной временной оси канала плотность ρ, для которой выполняется следующее условие адаптированности к каналу C:

$$\forall\ i \in L = [0,\, T - 1]_Z :\ \ \rho(i) \leq 1/(T \cdot p_{\mathrm{er}}) \leq 1. \tag{1}$$

Далее с помощью ρ будет имитироваться плотность распределения позиций ошибок внутри временного отрезка L. Для каждого $i \in L$ рассмотрим вероятностное пространство

$$S_i = (\Omega,\, A,\, p_i), \tag{2}$$

где вероятностная функция p_i задана условиями:

$$p_i(e) = p(i) \cdot p_{\mathrm{er}} \cdot T, \quad p_i(t) = 1 - p_i(e),$$

и определим на S_i случайную величину $\Xi_i^{(L)}$, принимающую значения в поле Галуа $F_2 = \{0;\, 1\}$: $\Xi_i^{(L)}(e) = 1$, $\Xi_i^{(L)}(t) = 0$. Конечную последовательность $\Xi^{(L)} = \{\Xi_i^{(L)}\}_{i\in L}$ назовем *адаптированным к q-ичному каналу эталонным вектором двоичных случайных величин.*

Опишем механизм из [4], позволяющий масштабировать адаптированные к каналу эталонные векторы случайных величин. Рассмотрим на отрезке $L = [0,\, T-1]_Z$ адаптированную к каналу C дискретную плотность ρ и соответствующий эталонный вектор случайных величин $\Xi^{(L)}$. Определим на промежутке $[0,\, J) \subset \mathbb{R}$, где $J > 1/p_{\mathrm{er}}$, кусочно-постоянную плотность φ^{pc}:

$$\forall\, i \in L: \ \varphi^{\mathrm{pc}}\,|_{(iq,\,(i+1)q]} = (T/J)\cdot\rho(i), \quad q = J/T,$$

и зададим на $M = [0,\, J-1]_Z$ адаптированную к каналу дискретную плотность

$$\varphi(j) = \int\limits_{j}^{j+1} \varphi^{\mathrm{pc}}(x)\, dx$$

(см. (1)). Плотность ρ, длина временного отрезка J и параметр p_{er} определяют набор вероятностных пространств вида

$$S'_j = (\Omega,\, A,\, p'_j), \quad j \in M, \quad p'_j(e) = \varphi(j)\cdot p_{\mathrm{er}}\cdot J, \quad p'_j(t) = 1 - p'_j(e),$$

и φ-эталонный вектор случайных величин $\Xi^{(M)}$. Вектор $\Xi^{(M)}$ далее будем называть *масштабным растяжением* φ-эталонного вектора $\Xi^{(L)}$ на отрезок $M = [0,\, J-1]_Z$.

Представим дискретную временную ось $\mathbb{Z}$ канала в виде случайной последовательности целочисленных отрезков: $L_1,\, L_2,\, \ldots,\, L_k,\, \ldots$, длины которых T_k распределены по некоторому закону $f(T)$, и предположим, что

$$\forall\, k: \ 1/(T_k\cdot p_{\mathrm{er}}) \le 1.$$

Отрезки L_k назовем *квазипериодами.* Рассмотрим теперь адаптированную к каналу дискретную плотность ρ, заданную на эталонном отрезке $L_0 = [0,\, T_0 - 1]_Z$, и соответствующий ρ-эталонный вектор случайных величин $\Xi^{(L_0)}$.

Пусть $\Xi^{(L_{k,0})}$ — масштабное растяжение вектора $\Xi^{(L_0)}$ на отрезок $L_k = [0,\, T_k - 1]_Z$, а $\Xi^{(L_k)} = \{\Xi_i^{(L_k)}\}_{i\in L_k}$ — сдвиг вектора $\Xi^{(L_{k,0})} = \{\Xi_i^{(L_{k,0})}\}_{i\in L_0}$ вдоль временной оси на $W_k = \sum\limits_{j=1}^{k-1} T_j$, т. е. $\Xi_{i+W_k}^{(L_k)} = \Xi_i^{(L_{k,0})}$, где $i \in [0,\, T_k - 1]$. Вектор случайных величин $\Xi^{(L_k)}$ будем называть *масштабным переносом* ρ-эталонного вектора $\Xi^{(L_0)}$ на отрезок L_k.

На вероятностном пространстве

$$\Sigma_i^{(L_k)} = (F_q,\, A_q,\, \pi_i^{(L_k)}), \quad i \in L_k, \tag{3}$$

рассмотрим конкатенацию последовательности векторов

$$\Xi^{(L_1)},\, \Xi^{(L_2)},\, \ldots,\, \Xi^{(L_k)},\ldots$$

которая задает последовательность $\Xi = \{\Xi_i\}_{i\in Z}$ случайных величин. Пусть

$$\Sigma_i(\Omega,\, A,\, \pi_i), \quad i \in Z, \quad — \tag{4}$$

вероятностное пространство типа (3), на котором определена случайная величина Ξ_i. Построенную последовательность $\Xi = \{\Xi_i\}_{i\in Z}$ будем называть *квазипериодической последовательностью случайных величин с ρ-эталонным вектором $\Xi^{(L_0)}$ и распределением длин квазипериодов $f(T)$.*

3. Марковская математическая модель источника ошибок на основе QP-модели

Рассмотрим цифровой канал передачи данных C, по которому передается информация в виде последовательностей символов q-ичного алфавита, отождествляемого с полем Галуа F_q. Будем полагать, что этот q-ичный канал имеет n физических состояний $s^{[1]}, \ldots, s^{[n]}$, каждое из которых описывается математическим QP-состоянием. Это означает, что каждому состоянию $s^{[j]}$ соответствует некоторый источник квазипериодических случайных ошибок, который в соответствии с описываемой QP-моделью задается следующими входными параметрами:

- средней вероятностью ошибочной передачи символа $p_{\mathrm{er}}^{[j]}$;
- заданной на эталонном отрезке $L_0^{[j]}$ длины $T_0^{[j]}$ адаптированной к каналу плотностью $\rho^{[j]}$ (см. (1)), для которой

$$\sum_{i=0}^{T^{[j]}-1} \rho^{[j]}(i) = 1; \tag{5}$$

- адаптированным к каналу бинарным $\rho^{[j]}$-эталонным вектором случайных величин $\Xi^{(L_0^{[j]})}$;
- распределением длин квазипериодов $f^{[j]}(T)$ с математическим ожиданием длины квазипериода $T^{[j]}$, для которых выполняется условие адаптированности (1);
- определенной на вероятностном пространстве ненулевых значений ошибок $S_q^{[j]} = (F_q^*,\, A_q^*,\, p_{\mathrm{smb}}^{[j]})$ случайной величиной $\zeta^{[j]}$: $\zeta^{[j]}(\lambda) = \lambda,\ \lambda \in F_q^*$. (Здесь и далее F_q^* — мультипликативная группа поля Галуа F_q, а A_q^* — множество всех подмножеств F_q^*).

Набор $\Phi = \{s^{[1]}, s^{[2]}, \ldots, s^{[n]}\}$ назовем алфавитом состояний канала. Переход от состояния к состоянию реализуется заданием марковской матрицы переходных вероятностей

$$K = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где p_{ij} — вероятность перехода канала из состояния $s^{[i]}$ в состояние $s^{[j]}$. Заметим, что матрица K — стохастическая, т. е.

$$\forall\, i, j:\ 0 \le p_{ij} \le 1;\ \ \forall\, i:\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1. \tag{7}$$

Предельные вероятности марковского процесса $P_{\mathrm{lim}}^{[i]}$ ($i \in [1,\, n]_Z$) определяются из соотношений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} P_{\mathrm{lim}}^{[j]} & = & 1, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} P_{\mathrm{lim}}^{[j]} \cdot p_{ji} & = & P_{\mathrm{lim}}^{[i]}, \quad i \in [1, n]_Z. \end{cases} \tag{8}$$

Замечание. В [1] доказано, что система (8) разрешима единственным образом только в случае, если выполнено условие регулярности для матрицы (6): 1) у матрицы K нет характеристических чисел, отличных от единицы и равных по модулю единице, и 2) единица является простым корнем характеристического уравнения матрицы K.

Будем предполагать, что средняя вероятность ошибочной передачи символа в канале равна P_{er}. Введем условие согласования:

$$P_{\mathrm{er}} = \sum_{i=1}^{n} P_{\mathrm{er}}^{[i]} \cdot P_{\mathrm{lim}}^{[i]}. \tag{9}$$

Таким образом, мы определили параметры марковской математической модели источника ошибок q-ичного цифрового канала нескольких физических состояний на основе QP-модели, которую будем называть марковской q-ичной QP-моделью.

Опишем теперь процесс моделирования q-ичного потока ошибок на основе построенной модели. Сначала построим последовательность позиций ошибок. Для этого представим дискретную временную ось в виде последовательности целочисленных отрезков переменной длины

$$L_1,\, L_2,\, \ldots,\, L_r, \ldots,$$

где отрезок L_r соответствует некоторому состоянию $s^{[j_r]}$, а его длина T_r определяется согласно распределению длин квазипериодов для текущего состояния. Каждому отрезку L_r моделью сопоставляется бинарный вектор случайных величин $\Xi^{(L_r)} = \{\Xi_i^{(L_r)}\}_{i \in L_r}$. Для произвольного $r \in \{1;\, 2;\, \ldots\}$ вектор $\Xi^{(L_r)}$ является масштабным переносом на отрезок L_r бинарного $\rho^{[j_r]}$-эталонного вектора случайных величин, соответствующего математическому QP-состоянию $s^{[j_r]}$. Теперь рассмотрим последовательность случайных величин $\Xi = \{\Xi_t\}_{t \in Z}$, определяемую конкатенацией последовательности бинарных векторов

$$\Xi^{(L_1)},\, \Xi^{(L_2)},\, \Xi^{(L_3)},\, \ldots$$

Эту последовательность будем называть последовательностью позиций ошибок.

После определения позиций ошибок возникает вопрос о значениях ошибок. Пусть σ — отображение, ставящее каждому моменту времени $t \in \mathbb{Z}$ номер того состояния, в котором находится канал в этот момент. По аналогии с (4) для каждого $t \in \mathbb{Z}$ рассмотрим вероятностное пространство $\Sigma_t = (\Omega, A, \pi_t)$ типа (3), на котором определена случайная величина Ξ_t. Рассмотрим также вероятностное пространство $\Sigma_t^\Delta = (F_q, A_q, p_t^\Delta)$, полагая для произвольного $\xi \in F_q$: $p_t^\Delta(\xi) = \pi_t(1) \cdot p_{\text{smb}}^{[\sigma(t)]}(\xi)$, если $\xi \neq 0$, и $p_{\text{smb}}^{[\sigma(t)]}(0) = \pi_t(1)$. Определим отображение τ: $F_2 \times F_q^* \to F_q$ условиями:

$$\forall\ \eta \in F_q^* :\ \tau(0, \eta) = 0,\ \tau(1, \eta) = \eta.$$

Тогда случайную величину Ξ_t^Δ на вероятностном пространстве

$$\Sigma_t^\Delta = (F_q, A_q, p_t^\Delta)$$

корректно зададим формулой

$$\Xi_t^\Delta(\xi) = \Xi_t(j) \cdot \zeta^{[\sigma(t)]}(\eta), \quad \tau(j, \eta) = \xi.$$

В марковской математической модели источника квазипериодических случайных q-ичных ошибок, т. е. в марковской q-ичной QP-модели, поток ошибок определим как реализацию q-ичной последовательности $\Xi^\Delta = \{\Xi_t^\Delta\}_{t \in Z}$.

Итак, построенная модель задает q-ичный поток ошибок, нулевые элементы которого соответствуют отсутствию ошибки в информационном потоке, а ненулевые элементы указывают на значение ошибки.

4. Компьютерная модель и программная реализация

Входными параметрами компьютерной модели являются:

- алфавит канала F_q,
- алфавит QP-состояний $\Phi = \{s^{[1]}, s^{[2]}, \ldots, s^{[n]}\}$,
- марковская стохастическая матрица переходных вероятностей вида (6), удовлетворяющая (7) и (8),
- p_{er} — средняя вероятность появления ошибки в канале.

Для каждого состояния $s^{[j]}$ на эталонном отрезке длины $T^{[j]}$ задается:

- адаптированная к каналу плотность $\rho^{[j]}$, такая что выполняется (5),
- вероятность ошибки $p_{\text{er}}^{[j]}$, удовлетворяющая (9),
- адаптированное к каналу распределение длин квазипериодов $f^{[j]}(T)$,
- вектор вероятностей $p_{\text{smb}}^{[j]}$ появления символов из F_q^*.

Опишем алгоритм работы модели.

St. 1. В соответствии с матрицей переходных вероятностей осуществляется выбор текущего состояния канала в текущий момент времени: $s^{[i]}$.

St. 2. С учетом выбора состояния по соответствующему распределению длин квазипериодов определяется длина текущего квазипериода $T^{[i]}$.

St. 3. Производится масштабное растяжение эталонного вектора $\rho^{[i]}$ на отрезок длины $T^{[i]}$ согласно схеме, представленной в предыдущем разделе.

В цикле:

St. 4. Пока $1 \le j \le T^{[i]}$ по формуле

$$p_j^{[i]} = \varphi_j^{[i]} \cdot p_{\mathrm{er}}^{[i]} \cdot T^{[i]}$$

вычисляется вероятность ошибки в точке j нового отрезка, с помощью которой определяется, есть ошибка на данной позиции или нет.

St. 5. Если ошибка есть, то случайным образом в соответствии с распределением $p_{\mathrm{smb}}^{[j]}$ осуществляется выбор текущего символа.

St. 6. Выполняется $j := j + 1$ и производится переход на St. 4.

По выходу из цикла:

St. 7. Выполняется $i := i + 1$ и производится переход на St. 1.

Таким образом, на выходе получается последовательность символов алфавита канала, моделирующая поток ошибок. Компьютерная модель марковской q-ичной QP-модели источника ошибок реализована программно в среде $C\#$. Реализация включает в себя два модуля, оформленных в виде библиотек *.dll, что позволяет многократно использовать процедуры, содержащиеся в них, например, при написании других программных продуктов. Первый модуль отвечает за входные и выходные параметры модели, т. е. реализует ввод/вывод. Отметим, что для удобства пользователя входные параметры и результаты работы программы хранятся в виде файлов. Второй модуль содержит реализацию алгоритма генерирования потока ошибок, а также часто используемые вспомогательные процедуры.

5. Заключение

В настоящей работе построена математическая марковская модель источника ошибок q-ичного цифрового канала нескольких физических состояний, каждое из которых описывается QP-моделью, и представлена ее компьютерная реализация. Предложенная модель соединяет в себе преимущества различных подходов к моделированию источников ошибок и содержит в качестве частных случаев как q-ичные аналоги многих известных бинарных моделей, так и классическую марковскую модель.

Список литературы

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
2. *Блох Э. Л., Турин В. Я., Попов О. В.* Модели источника ошибок в каналах передачи цифровой информации. – М.: Связь, 1971. – 312 с.
3. *Деундяк В. М., Могилевская Н. С.* Математическое моделирование источников ошибок цифровых каналов передачи данных. – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2006. – 69 с.
4. *Деундяк В. М., Могилевская Н. С.* О математическом моделировании источника ошибок канала нескольких состояний // Вестник Ростовского гос. ун-та путей сообщения. – 2007. – № 1. – С. 41–45.
5. *Деундяк В. М., Могилевская Н. С.* Математическое моделирование источника ошибок q-ичного канала передачи данных // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион.Технические науки. – 2008. – № 1. – С. 3–7.
6. *Могилевская Н. С.* О вложении ряда математических моделей источников ошибок бинарного канала связи в общую QPn-модель // Интегро-дифференциальные операторы и их приложения. – 2008. – № 8. – С. 117–122.
7. *Сердюков П. Н., Бельчиков А. В.* Защищенные радиосистемы цифровой передачи информации – М.: АСТ, 2006. – 312 с.

Поступила в редакцию 29.03.2010.