Математика и её приложения: ЖИМО. 2011. Вып. 1 (8). С. 39 – 48.

УДК 517.9

В. М. Деундяк[1], Е. И. Мирошникова[2]

Вычисление индекса многомерных интегральных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа

Ключевые слова: интегральные операторы, однородные ядра, операторы свертки, индекс оператора.

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, исследована банахова алгебра, порожденная операторами с анизотропно однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами. Установлена связь этой алгебры с многомерными операторами свертки и построено для нее символическое исчисление. Получена формула для вычисления индекса операторов из этой алгебры.

Keywords: integral operator, homogeneous kernel, convolution operator, index formula.

In the space $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, we investigate the Banach algebra generated by operators with anisotropically homogeneous kernels of compact type and multiplicatively weakly oscillating coefficients. We establish the relationship between this algebra and multidimensional convolution operators; also we construct the symbolic calculation for this algebra; under consideration we obtain the index formula for elements of the algebra.

Вопросам разрешимости и вычисления индекса многомерных операторов с однородными ядрами посвящены работы Н. К. Карапетянца, С. Г. Самко, О. Г. Авсянкина и других авторов (см. [10], [1] и цитированные там источники), в которых кроме условий однородности на ядра накладывались и существенно использовались условия инвариантности относительно диагонального действия $SO(n)$ — группы вращений пространства $\mathbb{R}^n$. В работе [2] рассмотрен новый широкий класс однородных ядер компактного типа, включающий в себя $SO(n)$-инвариантные ядра, и исследована фредгольмовость интегральных операторов с такими ядрами и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами. Эти результаты перенесены на случай операторов с анизотропно однородными ядрами (см. [9]).

Целью настоящей работы является вычисление индекса многомерных интегральных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами. Отметим, что интерес к таким операторам продиктован, в частности, их применимостью при решении задач со сложными особенностями [11] и связью с меллиновскими свертками [6].

[1]Южный федеральный университет; E-mail: vlade@math.rsu.ru.
[2]Южный федеральный университет; E-mail: elenmiroshnikova@gmail.com.

1. Интегральные операторы с анизотропно однородными ядрами компактного типа и слабо осциллирующими коэффициентами

1.1. Операторы с анизотропно однородными ядрами. Введем необходимые обозначения. Для произвольного банахова пространства $\mathfrak{Y}$ через $\mathcal{L}(\mathfrak{Y})$ обозначим банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{Y}$, а через $\mathcal{K}(\mathfrak{Y})$ — идеал компактных операторов. Пусть для произвольной операторной банаховой алгебры $\mathcal{W}$ множество $\mathrm{Fr}(\mathcal{W})$ — пространство фредгольмовых операторов из $\mathcal{W}$. Для произвольного изоморфизма банаховых пространств $g : \mathfrak{Y}_1 \to \mathfrak{Y}_2$ равенство

$$\hat{g}(A) = gAg^{-1}, \quad A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}_1), \tag{1}$$

задает пространственный изоморфизм подобия $\hat{g} : \mathcal{L}(\mathfrak{Y}_1) \to \mathcal{L}(\mathfrak{Y}_2)$, причем $\hat{g}(\mathcal{K}(\mathfrak{Y}_1)) = \mathcal{K}(\mathfrak{Y}_2)$. Пусть $1 < p < \infty$, w и u — весовые функции на снабженных мерами пространствах X и Y соответственно, а $L_p(X; w) \odot L_p(Y; u)$ — алгебраическое тензорное произведение весовых пространств $L_p(X; w)$ и $L_p(Y; u)$, состоящее из функций вида $\sum \varphi_i \psi_i$, $\varphi_i \in L_p(X; w), \psi_i \in L_p(Y; u)$. В силу плотности $L_p(X; w) \odot L_p(Y; u)$ в $L_p(X \times Y; w \otimes u)$ топологическое тензорное произведение $L_p(X; w) \otimes L_p(Y; u)$, являющееся замыканием $L_p(X; w) \odot L_p(Y; u)$, совпадает с $L_p(X \times Y; w \otimes u)$. Аналогично, для банаховых алгебр $\mathfrak{A}(\subset \mathcal{L}(L_p(X; w)))$ и $\mathfrak{B}(\subset \mathcal{L}(L_p(Y; u)))$ топологическое тензорное произведение $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ определяется как замыкание $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}$ в $\mathcal{L}(L_p(X \times Y; w \otimes u))$. Если $\mathcal{U}$ — банахова алгебра, то $G\mathcal{U}$ — группа обратимых элементов из $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}^+$ — унитализация $\mathcal{U}$. Подалгебру $\mathcal{V}$ банаховой алгебры $\mathcal{U}$ называют наполненной в $\mathcal{U}$, если $G\mathcal{V} = \mathcal{V} \cap G\mathcal{U}$.

Для компакта X и метризуемого пространства Y через $C(X; Y)$ будем обозначать пространство непрерывных отображений X в Y с равномерной топологией; пусть $C(X) = C(X; \mathbb{C})$. Для локально компактного, но не компактного, топологического пространства X через $\dot{X} = X^{\boldsymbol{\cdot}}$ будем обозначать компактификацию X точкой ∞; пусть

$$C_0(X; Y) = \{\varphi : \varphi \in C(\dot{X}; Y),\ \varphi(\infty) = 0\}.$$

Тождественное преобразование произвольного множества Ω будем обозначать id_Ω.

Пусть $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$, а $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ — мультииндекс, состоящий из целых положительных чисел, которые соответствуют разбиению пространства $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k}$. Определенную на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ измеримую функцию κ назовем анизотропно однородной мультистепени $(-\boldsymbol{n})$, если

$$\begin{aligned}\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}, \quad \forall\, x_{(i)}, y_{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad \forall\, \beta_i \in \mathbb{R}_+ :\\ \kappa(\beta_1 x_{(1)}, \ldots, \beta_k x_{(k)}, \beta_1 y_{(1)}, \ldots, \beta_k y_{(k)}) =\\ = \beta_1^{-n_1} \ldots \beta_k^{-n_k} \kappa(x_{(1)}, \ldots, x_{(k)}, y_{(1)}, \ldots, y_{(k)}).\end{aligned} \tag{2}$$

Если $k = 1$ и мультииндекс $\boldsymbol{n}$ совпадает с числом n, то условие (2) совпадает с условием обычной однородности [10].

Анизотропно однородную степени $(-\boldsymbol{n})$ функцию κ отнесем к классу $\mathcal{M}_{\boldsymbol{n};p}$, если почти для всех $\sigma_i \in S_{n_i-1}$

$$\kappa_{[1]}(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\kappa(x_{(1)}, \dots, x_{(k)}, \sigma_1, \dots, \sigma_k)| \prod_{i=1}^{k} |x_{(i)}|^{-n_i/p'} dx_{(1)} \cdots dx_{(k)} < \infty,$$

$$\kappa_{[2]}(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\kappa(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{(1)}, \cdots, x_{(k)})| \prod_{i=1}^{k} |x_{(i)}|^{-n_i/p} dx_{(1)} \cdots dx_{(k)} < \infty,$$

где S_{n_i-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^{n_i}$ с центром в нуле, $1/p + 1/p' = 1$, и $\kappa_{[1]},\ \kappa_{[2]} \in L_\infty(\mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}})$, $\mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}} = S_{n_1-1} \times \cdots \times S_{n_k-1}$. Нетрудно показать, что $\mathcal{M}_{\boldsymbol{n};p}$ — банахово пространство. Интегральный оператор

$$(K_\kappa f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \kappa(x, y) f(y) dy \tag{3}$$

с ядром $\kappa \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{n};p}$ ограничен в $L_p(\mathbb{R}^n)$ (см. [3], теорема 5). Обозначим через $\mathrm{Op}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{n};p})$ замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$, порожденную операторами вида (3) с ядрами из $\mathcal{M}_{\boldsymbol{n};p}$.

1.2. Ядра компактного типа. Для определения ядер компактного типа удобно перейти к полисферическим координатам. Пусть

$$\mathbb{R}^k_+ = \mathbb{R}_+ \times \cdots \times \mathbb{R}_+$$

— положительный конус в $\mathbb{R}^k$. Каждому $x_{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i} \backslash \{0\}$ поставим в соответствие пару

$$(r_i, \sigma_i) = \left(|x_{(i)}|, \frac{x_{(i)}}{|x_{(i)}|} \right) \in \mathbb{R}_+ \times S_{n_i-1},$$

обозначим через

$$(r, \sigma) = (r_1, \dots, r_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}}$$

полисферические координаты точки

$$x = (x_{(1)}, \dots, x_{(k)}) \in \mathbb{R}^{n_1} \backslash \{0\} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k} \backslash \{0\}.$$

Переход к полисферической системе координат

$$(x_{(1)}, \dots, x_{(k)}) \mapsto (r_1, \dots, r_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k) \tag{4}$$

индуцирует изоморфизм банаховых пространств

$$q: \ L_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_p(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}}; r^{\boldsymbol{n-1}} \otimes 1). \tag{5}$$

Через $\mathcal{M}'_{\boldsymbol{n};p}$ обозначим аналогичное $\mathcal{M}_{\boldsymbol{n};p}$ банахово пространство, состоящее из всех определенных на $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}}$ измеримых функций l, таких что

1) для $\forall \ i \in \{1, \ldots, k\}$ и $\forall \ r_i, \ \rho_i, \ \mu_i \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство $l(\mu_1 r_1, \ldots, \mu_k r_k, \mu_1\rho_1, \ldots, \mu_k\rho_k, \sigma, \theta) = \mu_1^{-1} \cdots \mu_k^{-1} l(r_1, \ldots, r_k, \rho_1, \ldots, \rho_k, \sigma, \theta)$,

2) $l_{[1]}(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^k} \int\limits_{\mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}}} |l(r, e, \vartheta, \sigma)| r^{\boldsymbol{n}/p-\boldsymbol{1}} \, dr \, d\vartheta < \infty$,

3) $l_{[2]}(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^k} \int\limits_{\mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}}} |l(e, r, \sigma, \vartheta)| r^{-\boldsymbol{n}/p} \, dr \, d\vartheta < \infty, \quad e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}_+^k$,

где $l_{[1]}, l_{[2]} \in L_\infty(\mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}})$. Отметим, что в случае $n_i = 1$ интегрирование по S_0 совпадает с суммированием значений функции по множеству $\{-1; 1\}$.

Нетрудно проверить, что отображение $\tilde{q}$, определяемое равенством

$$(\tilde{q}(\kappa))(\rho, r, \sigma, \vartheta) = \kappa(\rho_1\sigma_1, \ldots, \rho_k\sigma_k, r_1\vartheta_1, \ldots, r_k\vartheta_k) r^{\mathbf{n-1}}, \tag{6}$$

где $\{\rho; r\} \subset \mathbb{R}_+^k$, $\{\sigma; \vartheta\} \subset \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}$, задает изоморфизм $\mathcal{M}_{\mathbf{n};p}$ на $\mathcal{M}'_{\mathbf{n};p}$. Обозначим через $\mathrm{Op}(\mathcal{M}'_{\boldsymbol{n};p})$ банахову алгебру, порожденную операторами вида

$$(L_l f)(r, \sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^k} \int\limits_{\mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}}} l(r, \rho, \sigma, \vartheta) f(\rho, \vartheta) \, d\rho \, d\vartheta, \quad l \in \mathcal{M}'_{\boldsymbol{n};p}. \tag{7}$$

Можно показать, что (см. (1), (5), (6))

$$\hat{q}(K_\kappa) = L_{\tilde{q}(\kappa)}, \quad \kappa \in \mathcal{M}_{\mathbf{n};p}. \tag{8}$$

Будем полагать, что определенная на $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}_+^k$ измеримая функция α принадлежит классу $\mathcal{M}_{(\boldsymbol{n};p)}$, если она анизотропно однородна мультистепени $(-\mathbf{1}) = (-1, \ldots, -1)$, т. е. для $\forall \ i \in \{1, \ldots, k\}$ и $\forall \ r_i, \ \rho_i, \ \mu_i \in \mathbb{R}_+ :$

$$\alpha(\mu_1 r_1, \ldots, \mu_k r_k, \mu_1\rho_1, \ldots, \mu_k\rho_k) = \mu_1^{-1} \cdots \mu_k^{-1} \alpha(r_1, \ldots, r_k, \rho_1, \ldots, \rho_k)$$

и

$$\alpha_{[0]} = \int\limits_{\mathbb{R}_+^k} |\alpha(\rho, e)| \rho^{-\boldsymbol{n}/p-\boldsymbol{1}} d\rho < \infty, \quad e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}_+^k.$$

Пусть $\mathfrak{C}'_{\boldsymbol{n};p}$ — замыкание алгебраического тензорного произведения $\mathcal{M}_{(\boldsymbol{n};p)} \odot L_\infty(\mathbb{T}^2_{\boldsymbol{n-1}})$ в $\mathcal{M}'_{\boldsymbol{n};p}$. Через $\mathfrak{C}_{\boldsymbol{n};p}$ обозначим класс функций на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, полученный из $\mathfrak{C}'_{\boldsymbol{n};p}$ переходом к декартовой системе координат. Как и в случае $k = 1$, рассмотренном в [2], ядра из $\mathfrak{C}_{\boldsymbol{n};p}$ будем называть ядрами компактного типа. Банахову алгебру, порожденную операторами вида (3) с ядрами из $\mathfrak{C}_{\boldsymbol{n};p}$, обозначим $\mathfrak{V}_{\boldsymbol{n};p}$.

1.3. C^*-алгебра $\Omega^{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{mult}}$. Слабо осциллирующие функции на группах исследованы в [7], [8]. Пусть $\mathbb{H}$ — произвольная абелева локально компактная некомпактная группа. Определенную на $\mathbb{H}$ непрерывную ограниченную функцию ϕ отнесем к классу $\Omega(\mathbb{H})$ слабо осциллирующих функций, если

$$\forall\ D \in \mathrm{comp}(\mathbb{H}): \quad \lim_{t\to\infty} \sup_{h\in D}\{|\phi(t)-\phi(t+h)|\} = 0, \tag{9}$$

где $\mathrm{comp}(\mathbb{H})$ — множество всех компактных подмножеств $\mathbb{H}$. Известно, что $\Omega(\mathbb{H})$ является замкнутой подалгеброй C^*-алгебры $L_\infty(\mathbb{H})$. Через $\mathfrak{M}(\mathbb{H})$ обозначим пространство всех максимальных идеалов C^*-алгебры $\Omega(\mathbb{H})$. В [7] показано, что $\mathfrak{M}(\mathbb{H})$ — компактификация группы $\mathbb{H}$, причем $\mathbb{H}$ гомеоморфно вкладывается в $\mathfrak{M}(\mathbb{H})$. Пусть $\mathfrak{N}(\mathbb{H}) = \mathfrak{M}(\mathbb{H})\backslash\mathbb{H}$. Основываясь на преобразовании Гельфанда, далее C^*-алгебры $\Omega(\mathbb{H})$ и $C(\mathfrak{M}(\mathbb{H}))$ будем отождествлять. Отметим, что класс Ω можно вводить и на объектах вида $\mathbb{H}\times\mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — произвольный хаусдорфов компакт с мерой. Определенную на $\mathbb{H}\times\mathcal{X}$ непрерывную ограниченную функцию ϕ отнесем к классу $\Omega(\mathbb{H}\times\mathcal{X})$, если

$$\forall\ D \in \mathrm{comp}(\mathbb{H}): \quad \lim_{t\to\infty} \sup_{\sigma,\theta\in\mathcal{X}} \sup_{h\in D}\{|\phi(t,\sigma)-\phi(t+h,\theta)|\} = 0.$$

Введем класс мультипликативно слабо осциллирующих функций $\Omega^{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{mult}}$. Для $x = (x_{(1)},\dots,x_{(k)}) \in \mathbb{R}^{n_1}\backslash\{0\}\times\dots\times\mathbb{R}^{n_k}\backslash\{0\}$, $r\in\mathbb{R}_+$ через $\Delta_{x,r}$ обозначим множество

$$\Delta_{x,r} = \left\{ y_{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}\backslash\{0\} : \ \sum_{i=1}^{k} \ln^2\left(\frac{|y_{(i)}|}{|x_{(i)}|}\right) \leqslant r^2 \right\}.$$

Будем говорить, что определенная на $\mathbb{R}^{n_1}\backslash\{0\}\times\dots\times\mathbb{R}^{n_k}\backslash\{0\}$ непрерывная ограниченная функция φ принадлежит классу $\Omega^{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{mult}}$, если

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n\backslash\Delta_{e,\rho}} \sup_{y\in\Delta_{x,1}} \{|\varphi(x)-\varphi(y)|\} = 0. \tag{10}$$

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Класс $\Omega^{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{mult}}$ является C^*-алгеброй с естественной нормой пространства ограниченных непрерывных на $\mathbb{R}^n_0 = \mathbb{R}^{n_1}\backslash\{0\}\times\dots\times\mathbb{R}^{n_k}\backslash\{0\}$ функций.*

2. *Рассмотрим отображение $\gamma : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k_+$, определяемое формулой $\gamma(x_1,\dots,x_k) = (e^{x_1},\dots,e^{x_k})$. Тогда композиция $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R}^k\times\mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}} \to \mathbb{R}^n_0$ отображения $\gamma\times\mathrm{id}_{\mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}}} : \mathbb{R}^k\times\mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}} \to \mathbb{R}^k_+\times\mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}}$ и перехода в $\mathbb{R}^n_0$ от полисферической к декартовой системе координат* (4) *порождает изоморфизм C^*-алгебр $\boldsymbol{\Gamma} : \ \Omega^{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{mult}} \to \Omega(\mathbb{R}^k\times\mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}})$ по формуле*

$$(\boldsymbol{\Gamma}(\varphi))(x,\sigma) = \varphi(\boldsymbol{\gamma}(x,\sigma)).$$

3. *Пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^k\times\mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}})$ C^*-алгебры $\Omega(\mathbb{R}^k\times\mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}})$ является компактификацией пространства $\mathbb{R}^k\times\mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}}$,*

причем проекция $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}} \to \mathbb{R}^k$ *продолжается до непрерывного отображения* $\tilde{\pi} : \mathfrak{M}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}}) \to \mathfrak{M}(\mathbb{R}^k)$, *а его ограничение на*

$$\mathfrak{N}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}}) = \mathfrak{M}(\mathbb{R}^k \times \mathcal{X}) \backslash (\mathbb{R}^k \times \mathcal{X})$$

гомеоморфно отображает $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}})$ *на* $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^k)$.

Теперь рассмотрим банахову алгебру $\mathfrak{W}_{\boldsymbol{n};p}$ — замыкание в $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$ множества операторов

$$K = \lambda I + \sum \varphi_i K_{\kappa_i} + T, \tag{11}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $K_{\kappa_i} \in \mathfrak{V}_{\boldsymbol{n};p}$, $\varphi_i \in \Omega^{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{mult}}$, $T \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n))$. Важным этапом для дальнейшего является установление в разделе 3 связи между алгеброй $\mathfrak{W}_{\boldsymbol{n};p}$ и алгеброй операторов свертки на группе $\mathbb{R}^k$ со слабо осциллирующими компактными коэффициентами.

2. Об индексе операторов свертки на группе $\mathbb{R}^k$ со слабо осциллирующими компактными коэффициентами

Многомерные операторы свертки с матричными слабо осциллирующими коэффициентами на общих локально компактных группах рассматривались в [7], [4]. Случай таких операторов на группе $\mathbb{R}$ с компактными коэффициентами содержится в [2].

Приведем в удобном виде необходимые сведения о символическом исчислении и фредгольмовости многомерных операторов свертки со слабо осциллирующими компактными коэффициентами, полученные распространением результатов [7], [2]. Через V_p обозначим замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^k))$, порожденную операторами свертки вида

$$(C_a(\varphi))(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} a(x-y)\varphi(y)dy, \quad a \in L_1(\mathbb{R}^k).$$

Сопоставление оператору свертки $C_a \in V_p$ преобразования Фурье его ядра a задает непрерывный мономорфизм $\theta_p : V_p \to C_0(\mathbb{R}^k)$. Введем на $C_{0,p}(\mathbb{R}^k) = \theta_p(V_p)$ топологию пространства $L_p(\mathbb{R}^k)$-мультипликаторов Фурье. Далее под $\Theta_p : V_p \to C_{0,p}(\mathbb{R}^k)$ будем понимать изоморфизм ограничения θ_p на образ.

Зафиксируем конечномерный компакт с мерой $\mathcal{X}$, пусть $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}(L_p(\mathcal{X}))$. Рассмотрим непрерывный мономорфизм

$$\Theta_p \otimes I : V_p \otimes \mathcal{K}_p \to C_0(\mathbb{R}^k; \mathcal{K}_p).$$

Введем на алгебре $C_{0,p}(\mathbb{R}^k; \mathcal{K}_p) = (\Theta_p \otimes I)(V_p \otimes \mathcal{K}_p)$ норму равенством:

$$\|f\| = \|(\Theta_p \otimes I)^{-1}(f)\|_{\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^k \times \mathcal{X}))}.$$

Лемма 2. *Банахова алгебра* $C_{0,p}(\mathbb{R}^k;\mathcal{K}_p)$ *непрерывно вложена и наполнена в* $C_0(\mathbb{R}^k;\mathcal{K}_p)$.

Рассмотрим ограничение $\Theta_p \otimes I$ на образ, перейдем к унитализации и получим изоморфизм:

$$\Theta_p^{\mathcal{K}_p}: \ V_p^{\mathcal{K}_p} = (V_p \otimes \mathcal{K}_p)^+ \to (C_{0,p}(\mathbb{R}^k;\mathcal{K}_p))^+. \tag{12}$$

В банаховой алгебре $C_0(\mathfrak{N}(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k;\mathcal{K}_p)$ выделим подалгебру таких функций φ, что

$$\forall\, \eta \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^k): \ \varphi(\eta, -) \in C_{0,p}(\mathbb{R}^k;\mathcal{K}_p),$$

расширим ее единицей и обозначим $\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_p}$. Элементы из $\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_p}$ будем отождествлять с определенными на $(\mathfrak{N}(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k)^{\dot{}}$ функциями ψ, для которых $\psi(\infty) \in \mathbb{C}I$, а $\psi(\eta,\xi) \in \mathcal{K}_p$ при $(\eta,\xi) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k$.

По аналогии с леммой 2.2 работы [2] доказывается

Лемма 3. $\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_p}$ *— банахова алгебра с нормой*

$$\|\varphi\|_{\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_p}} = \max_{\eta \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^k)} \|\varphi(\eta,-)\|_{C_{0,p}(\mathbb{R}^k;\mathcal{K}_p)},$$

непрерывно вложенная и наполненная в $(C_0(\mathfrak{N}(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k;\mathcal{K}_p))^+$.

Пусть $W_p^{\mathcal{K}_p}$ — замкнутая подалгебра $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^k \times \mathcal{X}))$, порожденная операторами свертки со слабо осциллирующими компактными коэффициентами вида

$$D = \lambda I + \sum \phi_i (C_{a_i} \otimes T_i) + T, \tag{13}$$

где I — единичный оператор, $\phi_i \in \Omega(\mathbb{R}^k \times \mathcal{X})$, $C_{a_i} \in V_p$, $T_i \in \mathcal{K}_p$, $T \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^k \times \mathcal{X}))$. В силу коммутации операторов свертки с операторами умножения на слабо осциллирующие функции (см. [8]) множество операторов вида (13) всюду плотно в $W_p^{\mathcal{K}_p}$.

Для оператора D вида (13) символ $s^{\mathcal{K}_p}(D) (\in \mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_p})$ зададим равенством:

$$s_p^{\mathcal{K}_p}(D)(\eta,\xi) = \lambda + \sum \phi_i(\tilde{\pi}^{-1}(\eta)) \Theta_p^{\mathcal{K}_p}(C_a \otimes T_i)(\xi), \quad (\eta,\xi) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k.$$

Лемма 4. *Сопоставление операторам вида* (13) *их символов продолжается до эпиморфизма банаховых алгебр*

$$s_p^{\mathcal{K}_p}: W_p^{\mathcal{K}_p} \to \mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_p}$$

с ядром $\ker s_p^{\mathcal{K}_p} = \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^k \times \mathcal{X}))$.

Теорема Б. Я. Штейнберга из [7] о фредгольмовости операторов свертки в случае компактных операторных коэффициентов имеет следующий вид.

Теорема 1. *Пусть* $A \in W_p^{\mathcal{K}_p}$. *Тогда*

$$A \in \mathrm{Fr}(W_p^{\mathcal{K}_p}) \Leftrightarrow s_p^{\mathcal{K}_p}(A) \in G(\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_p}).$$

Перейдем к вычислению индекса операторов из $\mathrm{Fr}(W_p^{\mathcal{K}_p})$. Обозначим $\mathfrak{X}^k = \mathfrak{M}(\mathbb{R}^k)\backslash\{x \in \mathbb{R}^k : |x| < 1\}$. Рассмотрим естественные вложения

$$\mathfrak{N}(\mathbb{R}^k) \xrightarrow{e_\infty} \mathfrak{X}^k \xleftarrow{e_1} S_{k-1}.$$

Продолжим произвольную функцию $\varphi \in C(S_{k-1})$ до функции $\tilde{\varphi}$ на $\mathfrak{X}^k\backslash\mathfrak{N}(\mathbb{R}^k)$ так, что $\tilde{\varphi}(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{|x|}\right)$. Очевидно, что $\tilde{\varphi}$ является следом некоторой функции из $\Omega(\mathbb{R}^k)$. Пусть $\tilde{\tilde{\varphi}}$ — продолжение функции $\tilde{\varphi}$ до функции из $C(\mathfrak{X}^k)$. Преобразование $\varphi \mapsto \tilde{\tilde{\varphi}}$ задает мономорфизм $C(S_{k-1})$ в $C(\mathfrak{X}^k)$, определяющий ретракцию $p : \mathfrak{X}^k \to S_{k-1}$.

Для произвольного локально компактного некомпактного пространства X через $K^{-1}(X)$ будем обозначать K^{-1}–группу Гротендика ([5], с. 107) и рассмотрим естественный изоморфизм

$$\nu_X : [\dot{X}; GL(\mathbb{C}; \infty)] \to K^{-1}(X).$$

Нетрудно видеть, что гомоморфизм

$$\epsilon_1 : K^{-1}(\mathfrak{X}^k \times \mathbb{R}^k) \to K^{-1}(S_{k-1} \times \mathbb{R}^k),$$

индуцированный отображением $e_1 \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}$, является эпиморфизмом (см. [4]). В предложении 3 работы [4] доказывается также, что гомоморфизм

$$\epsilon_\infty : K^{-1}(\mathfrak{X}^k \times \mathbb{R}^k) \to K^{-1}(\mathfrak{N}(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k),$$

индуцированный отображением $e_\infty \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}$, является изоморфизмом. Следовательно, имеет место

Лемма 5. *Композиция*

$$\epsilon_1(\epsilon_\infty)^{-1} : K^{-1}(\mathfrak{N}(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k) \to K^{-1}(S_{k-1} \times \mathbb{R}^k)$$

является эпиморфизмом.

Зафиксируем на $S_{k-1} \times \mathbb{R}^k$ естественную ориентацию, порождающую ориентацию на одноточечной компактификации $(S_{k-1} \times \mathbb{R}^k)^{\cdot}$. Произвольное отображение f из $C((S_{k-1} \times \mathbb{R}^k)^{\cdot}; GL(\infty; \mathbb{C}))$ соединяется в этом пространстве с таким отображением $\tilde{f}$, у которого образ лежит в группе k-мерных унитарных матриц $U(k)(\subseteq GL(k; \mathbb{C}) \subseteq GL(\infty; \mathbb{C}))$. Соответствие

$$\varsigma[f] \mapsto (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)-1} \frac{\deg(\chi_k \tilde{f})}{(k-1)!},$$

где χ_k — фактор-отображение $U(k)$ на $U(k)\backslash U(k-1) = S^{2k-1}$, $\deg(\chi_k \tilde{f})$ — степень отображения $\chi_k \tilde{f}$, задает изоморфизм

$$\varsigma : [(S^{k-1} \times \mathbb{R}^k)^{\cdot}; GL(\infty; \mathbb{C})] \to \mathbb{Z}.$$

Через $\nu'_Y : [Y; GL(\mathbb{C}; \infty)] \to [Y; \mathcal{K}_p]$ обозначим изоморфизм Шварца–Пале для произвольного компакта Y. Топологический индекс произвольного отображения $\psi \in \mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_p}$ определим формулой

$$\mathrm{ind}_t(\psi) = \varsigma(\nu_{S_{k-1}\times\mathbb{R}^k})^{-1}\epsilon_1(\epsilon_\infty)^{-1}\nu_{\mathfrak{N}(\mathbb{R}^k)\times\mathbb{R}^k}(\nu'_{(\mathfrak{N}(\mathbb{R}^k)\times\mathbb{R}^k)^{\cdot}})^{-1}[\psi].$$

Теорема 2. *Пусть* $A \in \mathrm{Fr}(W_p^{\mathcal{K}_p})$. *Тогда*

$$\mathrm{ind}(A) = \mathrm{ind}_t(s_p^{\mathcal{K}_p}(A)).$$

Индекс многомерных операторов свертки со слабо осциллирующими матричными коэффициентами вычислен в [4]. В [2] получена формула для индекса одномерных операторов свертки со слабо осциллирующими компактными коэффициентами. Теорема 2 доказывается применением методов этих работ.

3. Индекс операторов из алгебры $\mathfrak{W}_{\boldsymbol{n},p}$

Отображение $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}} \to \mathbb{R}_0^n$, рассмотренное в лемме 1, естественным образом порождает изоморфизм $\mathbf{\Gamma}_p : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\boldsymbol{n-1}})$:

$$(\mathbf{\Gamma}_p(\varphi))(x,\sigma) = e^{\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i} \varphi(\boldsymbol{\gamma}(x,\sigma)).$$

Связь между операторами свертки со слабо осциллирующими компактными коэффициентами и операторами с анизотропно однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами устанавливает следующая

Лемма 6. *Ограничения* $\hat{\mathbf{\Gamma}}_p$ (см. (1)) *на банаховы алгебры* $\mathfrak{W}_{\boldsymbol{n},p}$, $\mathfrak{V}_{\boldsymbol{n},p}$ *задают изоморфизмы подобия*

$$\mu : \mathfrak{W}_{\boldsymbol{n},p} \to W_p^{\mathcal{K}_p}, \quad \mu_0 : \mathfrak{V}_{\boldsymbol{n},p} \to V_p^{\mathcal{K}_p}.$$

Символ $\sigma_{\boldsymbol{n},p}(K)$ оператора K вида (11) определим по формуле

$$(\sigma_{\boldsymbol{n},p}(K))(\eta,t) = \lambda + \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{\Gamma}(\varphi_i))(\tilde{\pi}^{-1}(\eta))(\Theta_p^{\mathcal{K}_p}(\mu_0(K_{\kappa_i})))(t), \qquad (14)$$

где $(\eta,t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k$, изоморфизм $\mathbf{\Gamma}$ и отображение $\tilde{\pi}$ определены в лемме 1, изоморфизм $\Theta_p^{\mathcal{K}_p}$ введен в разделе 2 (см. (12)), изоморфизм μ_0 построен в лемме 6.

Лемма 7. *Сопоставление операторам вида* (11) *их символов* (14) *однозначно продолжается до эпиморфизма* $\sigma_{\boldsymbol{n},p} : \mathfrak{W}_{\boldsymbol{n},p} \to \mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_p}$ *с ядром* $\ker(\sigma_{\boldsymbol{n},p}) = \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n))$, *при этом*

$$\sigma_{\boldsymbol{n},p} = s_p^{\mathcal{K}_p}\mu. \qquad (15)$$

Из теорем 1, 6 и леммы 7 вытекает следующий критерий фредгольмовости.

Теорема 3. *Пусть оператор* $B \in \mathfrak{W}_{\boldsymbol{n},p}$. *Для того, чтобы* $B \in \mathrm{Fr}(\mathfrak{W}_{\boldsymbol{n},p})$, *необходимо и достаточно, чтобы его символ* $\sigma_{\boldsymbol{n},p}(B) \in \mathrm{G}(\mathcal{S}_p^{\mathcal{K}_p})$.

Теорема 4. *Пусть* $B \in \mathrm{Fr}(\mathfrak{W}_{\boldsymbol{n},p})$. *Тогда*

$$\mathrm{ind}(B) = \mathrm{ind}_t(\sigma_{\boldsymbol{n},p}(B)). \tag{16}$$

Доказательство основывается на теореме 2 и леммах 6, 7. Действительно, по лемме 6

$$\mathrm{ind}(B) = \mathrm{ind}(\mu(B)).$$

В силу теоремы 2

$$\mathrm{ind}(\mu(B)) = \mathrm{ind}_t(s_p^{\mathcal{K}_p}(\mu(B))).$$

Учитывая равенство (15), получаем, что

$$\mathrm{ind}_t(s_p^{\mathcal{K}_p}(\mu(B))) = \mathrm{ind}_t(\sigma_{\boldsymbol{n},p}(B)).$$

Таким образом, равенство (16) доказано.

Список литературы

1. *Авсянкин О. Г.* О C^*-алгебре, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами мультипликативного сдвига // Докл. РАН. – 2008. – Т. 419. – № 6. – С. 727–728.
2. *Деундяк В. М.* Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами // Математические заметки. – 2010. – Т. 87. – № 5. – С. 713–729.
3. *Деундяк В. М., Мирошникова Е. И.* Многомерные мультипликативные свертки и их приложения к теории операторов с однородными ядрами // Сб. "Труды научной школы И. Б. Симоненко" – Ростов-на-Дону, 2010. – С. 67–78.
4. *Деундяк В. М., Штейнберг Б. Я.* Об индексе операторов свертки с медленно изменяющимися коэффициентами на абелевых группах // Функц. анализ и его приложения. – 1985. – Т. 19. – № 4. – С. 84–85.
5. *Каруби М.* K-теория. Введение. – М.: Мир, 1978. – 360 с.
6. *Пламеневский Б. А.* Алгебры псевдодифференциальных операторов. – М.: Наука, 1986. – 255 с.
7. *Штейнберг Б. Я.* Об операторах типа свертки на локально компактных группах // Функц. анализ и его приложения. – 1981. – Т. 15. – № 3. – С. 95–96.
8. *Cordess H.* On compactness of commutators of multiplications and convolutions, and boundedness of pseudodifferential operators // J. Func. anal. – 1975. – V. 18. – № 2. – P. 115–131.
9. *Deundyak V. M., Miroshnikova E. I.* On fredholmness of integral operators with anisotropically homogeneous kernels of compact type // Abstracts of reports of International conference AMADE, 12-17th of September 2011, Minsk, Belarus. – Minsk: IM NASB, 2011. – P. 54.
10. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with Involutive Operators. – Boston–Basel–Berlin: Birkhauser, 2001. – 360 p.
11. *Rabinovich V., Schulze B.-W., Tarkhanov N.* C^*-algebras of singular integral operators in domains with oscillating conical singularities // Manuscripta math. – 2002. – № 108. – P. 69–90.

Поступила в редакцию 01.12.2011.

Содержание