УДК 512.543

Д. Н. Азаров, Ю. В. Комелькова

Об аппроксимируемости полициклических групп конечными *p*-группами

Доказано, что если полициклическая группа аппроксимируема конечными p-группами хотя бы для двух различных значений числа p, то её коммутант нильпотентен. Этот результат дополняет известную теорему К. Сексенбаева, утверждающую, что если полициклическая группа аппроксимируема конечными p-группами для каждого простого числа p, то она нильпотентна.

1. Введение

Пусть p – простое число. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой конечными p-группами, если для каждого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм φ группы G на конечную p-группу такой, что образ элемента a относительно φ отличен от 1.

Напомним также, что группа G называется полициклической, если она обладает субнормальным рядом с циклическими факторами. Здесь будут получены некоторые результаты об аппроксимируемости конечными p-группами полициклических групп. Исследования в данном направлении начались в 60-е годы прошлого века с вопроса А. Л. Шмелькина о том, будет ли полициклическая группа почти нильпотентной, если она аппроксимируема конечными p-группами. Ответ на этот вопрос оказался отрицательным; соответствующий пример был построен в [4]. Заметим, что поскольку впоследствии было доказано, что любая полициклическая группа почти аппроксимируема конечными p-группами для произвольного простого числа p (см., напр., [2, с. 200]), примером такого рода может служить произвольная полициклическая группа, не являющаяся почти нильпотентной.

Если полициклическая группа нильпотентна и не имеет кручения, то она аппроксимируема конечными p-группами для каждого простого числа p. Этот результат был доказан Грюнбергом [5] в 1957 году. В 1965 году К. Сексенбаев [4] доказал обратное утверждение: если полициклическая группа G аппроксимируема конечными p-группами для любого простого числа p, то она нильпотентна. В настоящей работе мы рассматриваем полициклические группы, аппроксимируемые конечными p-группами хотя бы для двух различных значений числа p. Такие группы уже не обязаны быть нильпотентными. Действительно, в работе Д. Н. Азарова [1] показано, что если

$$\pi = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$$

– произвольное конечное множество простых чисел и $m = p_1 p_2 \cdots p_n$, то группа

$$G_\pi = \left\langle a, b, c; ab = ba, c^{-1}ac = b, c^{-1}bc = a^{-1}b^{m+2} \right\rangle$$

является полициклической без кручения и аппроксимируема конечными p-группами для всех простых чисел из π и только для них. При этом группа G_π не является нильпотентной, поскольку в противном случае она аппроксимировалась бы конечными p-группами для любого простого числа p.

Таким образом, упомянутая выше теорема Сексенбаева не может быть распространена на случай, когда полициклическая группа G аппроксимируема конечными p-группами хотя бы для двух различных значений числа p. Тем не менее, здесь будет доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если полициклическая группа G аппроксимируема конечными p-группами хотя бы для двух различных значений простого числа p, то коммутант группы G нильпотентен.*

Утверждение, обратное к теореме 1, неверно даже в случае, когда полициклическая группа G не имеет кручения. В самом деле, пусть G – расщепляемое расширение бесконечной циклической группы A с помощью бесконечной циклической группы B, не являющееся абелевой группой. Тогда G – полициклическая группа без кручения, её коммутант содержится в A и поэтому является абелевой группой, т.е. нильпотентной группой ступени 1, но при этом группа G аппроксимируема конечными p-группами только при p равном 2.

Рассмотрим теперь полициклические группы, аппроксимируемые конечными p-группами хотя бы для одного простого числа p. Для таких групп нами доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Если полициклическая группа G аппроксимируема конечными p-группами, то она содержит нормальную подгруппу H конечного p-индекса, коммутант которой нильпотентен. Более точно, в любой полициклической группе G существует нормальная подгруппа H конечного индекса, удовлетворяющая следующим двум условиям.*

1. *Коммутант подгруппы H нильпотентен.*

2. *Для каждого простого числа p из того, что группа G аппроксимируема конечными p-группами следует, что фактор-группа* G/H *является конечной p-группой.*

Заметим, что теорема 1 является непосредственным следствием теоремы 2. Действительно, если полициклическая группа G аппроксимируема конечными p-группами для двух различных значений числа p, то в силу условия 2 фактор-группа G/H является конечной p-группой для двух различных значений числа p. Но тогда G/H – единичная группа, то есть $G = H$, и поэтому коммутант группы G совпадает с коммутантом подгруппы H. Отсюда и из условия 1 следует, что коммутант группы G нильпотентен. Мы видим, таким образом, что в доказательстве нуждается только теорема 2.

2. Доказательство теоремы 2

Пусть p – простое число. Подгруппу H группы G будем называть отделимой в классе конечных p-групп, или короче p-отделимой, если для каждого элемента x группы G, не принадлежащего H, существует гомоморфизм φ группы G на конечную p-группу такой, что $x\varphi \notin H\varphi$. Хорошо известно и легко проверяется, что нормальная подгруппа H группы G является p-отделимой тогда и только тогда, когда фактор-группа G/H аппроксимируема конечными p-группами.

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение:

Лемма. *Пусть нормальная подгруппа H группы G удовлетворяет тождеству*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$$

и является максимальной среди всех нормальных подгрупп группы G с этим тождеством. Если группа G аппроксимируема конечными p-группами, то H является p-отделимой подгруппой группы G.

Доказательство этой леммы (даже более общего утверждения) содержится в работе Д. Н. Азарова и Е. А. Поспеевой [3, теорема 1].

Приступим теперь к доказательству теоремы 2.

Пусть G – произвольная полициклическая группа. Обозначим через F подгруппу Фиттинга группы G, то есть наибольшую нормальную нильпотентную подгруппу.

Хорошо известно (см., напр.,[2, с. 197]), что в произвольной полициклической группе G существует нормальный ряд

$$1 \leq A \leq B \leq G$$

такой, что A – нильпотентная группа, B/A – абелева группа, G/B – конечная группа. Отсюда следует, что фактор-группа

G/A почти абелева, то есть содержит нормальную абелеву подгруппу конечного индекса.

Так как A – нормальная нильпотентная подгруппа группы G и F – подгруппа Фиттинга группы G, то $A \subseteq F$. Отсюда и из того, что группа G/A почти абелева следует, группа

$$G/F \cong {}^{G/A}\!\big/_{F/A}$$

также является почти абелевой. Иными словами, в группе G/F можно выбрать нормальную абелеву подгруппу H/F конечного индекса. При этом можно считать, что H/F – максимальная среди всех нормальных абелевых подгрупп группы G/F. Так как H/F – нормальная подгруппа конечного индекса группы G/F, то H – нормальная подгруппа конечного индекса группы G.

Покажем, что подгруппа H удовлетворяет условиям 1 и 2 из формулировки теоремы 2.

1. Так как фактор-группа H/F абелева, то коммутант H' группы H содержится в F. Отсюда и из того, что подгруппа F нильпотентна следует, что и коммутант H' также нильпотентен.

2. Обозначим через n ступень нильпотентности группы F. Нильпотентные группы ступени n и только они удовлетворяют тождеству

$$\left(x_1, x_2, ..., x_{n+1}\right) = 1, \qquad (*)$$

где $\left(x_1, x_2, ..., x_{n+1}\right)$ – простой коммутатор веса $n+1$. Поэтому F – наибольшая среди всех нормальных подгрупп группы G с тождеством (*). Предположим, что группа G аппроксимируема конечными p-группами для некоторого простого числа p. Отсюда и из того, что F – наибольшая среди всех нормальных подгрупп группы G с тождеством (*) в силу отмеченной выше леммы следует, что подгруппа F группы G является p-отделимой. Поэтому фактор-группа G/F аппроксимируема конечными p-группами, и снова применяя лемму к подгруппе H/F, являющейся максимальной среди всех нормальных абелевых подгрупп группы G/F, мы видим, что подгруппа H/F группы G/F является p-отделимой. Поэтому фактор-группа

$$(G/F)/(H/F) \cong G/H$$

аппроксимируема конечными p-группами. Отсюда и из того, что фактор-группа G/H конечна, следует, что G/H – конечная p-группа. Таким образом, из аппроксимируемости группы G конечными p-группами следует, что фактор-группа G/H является конечной p-группой.

Теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* Об аппроксимируемости конечными p-группами полициклических групп // Математика и её приложения. Иваново. 2004. № 1. С. 21 – 24.
2. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука. 1972. 288 с.
3. *Поспеева Е. А., Азаров Д. Н.* Об отделимости подгрупп с тождеством // Вестник молодых учёных ИвГУ. 2006. Вып. 6. С. 135 – 136.
4. *Сексенбаев К* . К теории полициклических групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 6. Вып. 3. С. 79 – 83.
5. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London. Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29 – 62.