УДК 517.544

А. Ф. Шмелева

О множествах точек бесконечных граничных пределов функций, гармонических в полупространстве

Для функций, гармонических в полупространстве и имеющих некасательные пределы (пределы по конусам) в каждой точке граничной гиперплоскости, получена полная характеристика множества точек бесконечных некасательных пределов.

Пусть R_{+}^{n+1} – действительное $(n+1)$-мерное полупространство, $n > 1$, а R_{0}^{n} – граничная гиперплоскость:

$$R_{+}^{n+1} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) : x_i \in R, i = 1, \ldots, n+1, x_{n+1} > 0\}$$

$$R_{0}^{n} = \{(x_1, \ldots, x_n, 0) : x_i \in R, i = 1, \ldots, n\}.$$

Говорят, что функция $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in R_{+}^{n+1}$ имеет некасательный предел в точке $\xi^0 \in R_{0}^{n}$, если она имеет предел, когда $x \to \xi^0$ по любому конусу $\Gamma_\alpha(\xi^0)$.

$$\Gamma_\alpha(\xi) = \left\{ x \in R_{+}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2 < \frac{x_{n+1}^2}{\alpha^2}; \alpha > 0 \right\}$$

Функция $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in R_{+}^{n+1}$ имеет вертикальный предел в точке $\xi^0 \in R_{0}^{n}$, если существует предел:

$$\lim_{x_{n+1} \to 0+} f(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0, x_{n+1}).$$

Множество всех точек граничной гиперплоскости R_{0}^{n}, в которых $f(x)$ имеет бесконечный некасательный (вертикальный) предел, будем обозначать $I(f)$ ($J(f)$). Известно, что множества $I(f)$ как и $J(f)$ имеют тип $F_{\sigma\delta}$, а если у функции $f(x)$ существуют некасательные пределы в каждой точке плоскости

R_0^n, то $I(f)$ – типа G_δ. В 1986 г. Р. Берман в [2] получил полную характеристику множеств $I(f)$ и $J(f)$ функций, гармонических в круге, имеющих радиальный предел в каждой точке граничной окружности.

В настоящей статье дается полная характеристика множеств $I(f)$ для функций гармонических в полупространстве R_+^{n+1}, имеющих некасательные пределы (пределы по конусам) в каждой точке граничной гиперплоскости. Она вполне аналогична двумерному случаю. Для доказательства используется усовершенствованный метод З. Загорского (см.[1]).

Теорема. *Для того чтобы множество* $E \subset R_0^n$ *было множеством* $I(f)$ *для некоторой гармонической в полупространстве функции* $f(x)$*, имеющей некасательные пределы в каждой точке* $\xi \in R_0^n$*, необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа* G_δ *нулевой* n*-мерной меры Лебега,* $mes^n E = 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Покажем, что для любой гармонической функции f $mes^n I(f) = 0$. Предположим противное. Пусть мера множества $I(f)$ положительна. Тогда одно из множеств $I_+(f)$ или $I_-(f)$ соответственно множества точек, в которых некасательный предел функции f равен $+\infty$ или $-\infty$, имеет положительную меру. Пусть для определенности, $mes^n(I_+(f)) > 0$. Во втором случае достаточно рассмотреть функцию $-f$. Нетрудно видеть, что $I_+(f)$ можно представить в виде объединения

$$I_+(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k ,$$

где

$$E_k = \left\{ \xi \in I_+(f),\ f(x) \geq k,\ x \in \Gamma_1^{\frac{1}{k}}(\xi) \right\}.$$

Напомним, что $\Gamma_\alpha^\beta(\xi)$ – открытый конус с вершиной в точке ξ, высотой β и угловым коэффициентом образующей равным α. Тогда для некоторого k мера E_k положительна. Для простоты будем считать, что $k=1$.

Пусть $\Omega = \bigcup\limits_{\xi \in E_1} \Gamma_1^1(\xi)$. Очевидно, что Ω – открытое множество, и E_1 – часть границы Ω. Множество Ω распадается на не более чем счетное число связных компонент. Пусть G – одна из таких компонент, на границе которой лежит часть множества E_1, имеющая положительную меру. Обозначим пересечение $\partial G \bigcap E_1$ через Q.

Рассмотрим интеграл Пуассона характеристической функции множества CQ:

$$\varphi(x) = \frac{1}{c_{n+1}} \int\limits_{CQ} \frac{x_{n+1} d\xi}{|x-\xi|^{n+1}}.$$

Здесь

$$|x-\xi| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2},\ c_{n+1} = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}{n\pi^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Оценим $\varphi(x)$ в точках границы G, лежащих в R_+^{n+1}. Заметим, что точка $x \in R_+^{n+1}$ содержится в конусе $\Gamma_\alpha^\beta(\xi)$ тогда и только тогда, когда $\xi \in B\left(\tilde{x}, \frac{x_{n+1}}{\alpha}\right)$, где $\tilde{x} = (x_1, \ldots x_n, 0)$. Таким образом, если $x \in R_+^{n+1}$ принадлежит границе Ω и $0 < x_{n+1} < 1$, то $x \notin \Gamma_1(\xi)$ $\forall \xi \in Q$, иначе $x \in \Omega$. Таким образом, $B(\widetilde{x}, x_{n+1}) \in CQ$. Тогда

$$\varphi(x) \geq \frac{1}{c_{n+1}} \int\limits_{B(\widetilde{x}, x_{n+1})} \frac{x_{n+1} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n}{\left[(x_1 - \xi_1)^2 + \ldots (x_2 - \xi_2)^2 + x_{n+1}^2\right]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Сделав замену переменных $\xi_k = x_k + t_k x_{n+1}$, $k = 1, \ldots, n$, получим:

$$\frac{1}{c_{n+1}} \int\limits_{B(0,1)} \frac{dt_1 dt_2 \ldots dt_n}{\left[t_1^2 + \ldots + t_n^2 + 1\right]^{\frac{n+1}{2}}} = C$$

Заметим, что C зависит только от n и $0 < C < 1$.

Рассмотрим гармоническую функцию

$$g(x) = \frac{1}{C} \varphi(x) + x_{n+1}.$$

Она имеет некасательные пределы, равные 0 почти всюду на множестве Q. На множестве $\partial G \setminus Q$ выполняется неравенство $g(x) \geq 1$.

Гармоническая функция $f(x)$ имеет бесконечные пределы на множестве Q:

$$\lim_{x \to x^0, x \in G} f(x) = +\infty, \quad x^0 \in Q.$$

Тогда в каждой точке границы области G функция $g(x) + \dfrac{f(x)}{M}$, $M > 0$, имеет предел больший 1. Отсюда, по принципу максимума:

$$g(x) + \frac{f(x)}{M} \geq 1$$

при $x \in G$ и произвольном $M > 0$.

Так как функция $g(x)$ имеет нулевые пределы почти в каждой точке множества Q, то внутри области G найдется такая точка P, в которой $g(P)<1$ Тогда $M(1-g(P))\le f(P)$. Поскольку M взято произвольно, то $f(P)=+\infty$.

Полученное противоречие доказывает неверность предположения о положительности меры множества $I(f)$.

Для доказательства достаточности потребуется следующая

Лемма. *Пусть* $G_1\subset G_0$ *– открытые подмножества* R_0^n *такие, что все точки, не являющиеся точками разреженности* G_1 *в* R_0^n, *лежат в* G_0. *Тогда существует функция* $u(x)$, *гармоническая и ограниченная в* R_0^{n+1}, *имеющая некасательные пределы в каждой точке* R_0^n, *равные 1 на* G_1 *и 0 на* $R_0^n\setminus G_0$ *и удовлетворяющая неравенству* $0<u(x)<1$, $x\in R_0^{n+1}$.

Доказательство. Построим семейство множеств O_t; $0<t<1$, таких, что

а) $O_t\subset O_\tau$, при $0\le\tau<t\le 1$;

б) при $0\le\tau<t\le 1$ все точки множества $R_0^n\setminus O_\tau$ являются точками разреженности для O_t;

в) $O_0=G_0$, $O_1=G_1$.

Обозначим

$$Q=\left\{t:\ t=\frac{m}{2^k},\ m=0,1,2,\ldots,2^k,\ k=0,1,2,\ldots\right\}.$$

Будем строить O_t для чисел $t=\dfrac{m}{2^k}\in Q$ индукцией по k.

При $k=0$ положим $O_0=G_0$, $O_1=G_1$.

Пусть уже построены множества O_t при $t = \frac{m}{2^{k-1}}$, $0 \le m \le 2^{k-1}$, удовлетворяющие свойствам а) – в). Множества O_t, $t = \frac{m}{2^k}$, строим следующим образом. Если m четно, то множество $O_{\frac{m}{2^k}}$ было построено на предыдущем шаге. Если m нечетно, то на предыдущем шаге были построены множества $O_{\frac{m-1}{2^k}}$ и $O_{\frac{m+1}{2^k}}$. По свойству а) $O_{\frac{m+1}{2^k}} \subset O_{\frac{m-1}{2^k}}$. По свойству б), все точки, не являющиеся точками разреженности множества $O_{\frac{m+1}{2^k}}$, принадлежат $O_{\frac{m-1}{2^k}}$. Множество всех таких точек имеет нулевую n-мерную меру Лебега.

Представим $O_{\frac{m-1}{2^k}}$ в виде объединения открытых множеств G_j, $G_j \subset O_{\frac{m-1}{2^k}}$, расстояние от которых до границы $O_{\frac{m-1}{2^k}}$ больше, чем 2^{-j}, $j = 1, 2, \ldots$. Так как $mes^n\left(O'_{\frac{m+1}{2^n}} \bigcap G_j \right) = 0$, то найдутся такие открытые множества $\widetilde{G}_j$, что

$$O'_{\frac{m+1}{2^n}} \bigcap G_j \subset \widetilde{G}_j, \; mes^n \widetilde{G}_j \le \mu_j 2^{-j}, \qquad (1)$$

где μ_j – n- мерная мера окрестности радиуса 2^{-j}.

Примем

$$O_{\frac{m}{2^k}} = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{G}_j\right) \bigcap O_{\frac{m+1}{2^n}}.$$

Тогда $O_{\frac{m+1}{2^k}} \subset O_{\frac{m}{2^k}} \subset O_{\frac{m-1}{2^k}}$ и множество $O_{\frac{m}{2^k}}$ содержит все точки, не являющиеся точками разреженности множества $O_{\frac{m+1}{2^k}}$.

Если $x^0 \in R_0^n \setminus O_{\frac{m-1}{2^k}}$, то в ε-окрестность точки x^0 попадут лишь те точки множества $O_{\frac{m}{2^k}}$, которые являются точками множества $O_{\frac{m+1}{2^k}}$ или множеств $\widetilde{G}_j$, для индексов j, $2^{-j} < \varepsilon$.

Тогда:

$$O\left(x^0, \varepsilon\right) \bigcap O_{\frac{m}{2^k}} = \left(O\left(x^0, \varepsilon\right) \bigcap O_{\frac{m+1}{2^k}}\right) \bigcup \left(\bigcup_{2^{-j} < \varepsilon} \left(O\left(x^0, \varepsilon\right) \bigcap \widetilde{G}_j\right)\right)$$

Отсюда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{mes^n\left(O\left(x^0, \varepsilon\right) \bigcap O_{\frac{m}{2^k}}\right)}{mes^n O(x, \varepsilon)} \leq$$

$$\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{mes^n\left(O\left(x^0, \varepsilon\right) \bigcap O_{\frac{m+1}{2^k}}\right)}{mes^n O(x, \varepsilon)} + \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{2^{-j} < \varepsilon} \frac{mes^n \widetilde{G}_j}{mes^n O(x, \varepsilon)} \qquad (2)$$

Так как $x^0 \notin O_{\frac{m-1}{2^k}}$, то x^0 – точка разреженности множества $O_{\frac{m+1}{2^k}}$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{mes^n\left(O\left(x^0,\varepsilon\right)\cap O_{\frac{m+1}{2^k}}\right)}{mes^n O(x,\varepsilon)}=0 \qquad (3)$$

и первый предел в (2) равен 0. Так как при $2^{-j}<\varepsilon$ имеет место неравенство $\mu_j \le mes^n O(x,\varepsilon)$ и из (1) имеем

$$\sum_{2^{-j}<\varepsilon}\frac{mes^n\widetilde{G}_j}{mes^n O(x,\varepsilon)}\le\sum_{2^{-j}<\varepsilon}\frac{2^{-j}\mu_j}{mes^n O(x,\varepsilon)}<\varepsilon \qquad (4)$$

Из (2), (3) и (4) следует, что x^0 – точка разреженности множества $O_{\frac{m}{2^k}}$. Т. е. построенные множества O_t, $t=\frac{m}{2^k}$, удовлетворяют свойствам а) – в). Продолжая этот процесс, строим множества O_t для всех $t\in Q$. Для произвольного $t\in[0,1]$ положим

$$O_t=\bigcup_{\substack{\tau\ge t\\ \tau\in Q}}O_\tau .$$

Из определения следует, что свойства а) – в) выполняются для всех O_t, $t\in[0,1]$.

Пусть $u(x,t)$ – гармоническая мера множества O_t относительно полупространства R_+^{n+1}, т. е. интеграл Пуассона от характеристической функции множества O_t:

$$u(x,t)=\frac{1}{c_{n+1}}\int_{O_t}P(x,\xi)d\sigma_\xi ,$$

где $d\sigma_\xi$ – элемент n-мерной меры гиперплоскости R_0^n.

Функция $u(x,t)$ ограничена $0<u(x,t)<1$, $x\in R_+^{n+1}$ и имеет некасательные пределы, равные 1 в каждой точке множества O_t. Поскольку при $0\le\tau<t\le 1$ точки из $R_0^n\setminus O_\tau$ являются точ-

ками разреженности множества O_t, то всюду на $R_0^n \setminus O_\tau$ функция $u(x,t)$ имеет некасательные пределы равные 0. Положим:

$$u(x) = \int_0^1 u(x,t)dt .$$

Докажем, что гармоническая функция $u(x)$ удовлетворяет условиям леммы. Пусть $x^0 \in G_1 = O_1$. При $t < 1$ будет $O_t \supset O_1$ и, следовательно $u(x,t) > u(x,1)$. Тогда

$$1 > u(x) > \int_0^1 u(x,1)dt = u(x,1) \tag{5}$$

Функция $u(x,1)$ имеет на $G_1 = O_1$ некасательные пределы, равные 1. Из неравенства (5) следует, что некасательный предел функции $u(x)$ в точке x^0 равен 1. Пусть $x^0 \in R_0^n \setminus G_0$. Выберем $0 < \varepsilon < 1$. При $t > \varepsilon$ имеем $u(x,t) < u(x,\varepsilon)$, тогда

$$u(x) = \int_0^\varepsilon u(x,t)dt + \int_\varepsilon^1 u(x,t)dt < \varepsilon + \int_\varepsilon^1 u(x,t)dt < \varepsilon + (1-\varepsilon)u(x,\varepsilon)$$

Так как точка x^0 является точкой разреженности множества O_ε, то функция $u(x,\varepsilon)$ имеет в точке x^0 нулевой некасательный предел. Следовательно, верхний некасательный предел $u(x)$ не превосходит ε. Тогда некасательный предел $u(x)$ в точке x^0 существует и равен 0.

Пусть $x^0 \notin G_1$ и $x^0 \in G_0$. Положим $t_0 = \sup\{t : x^0 \in O_t\}$. Функция $u(x)$ имеет в точке x^0 некасательный предел, равный t_0. Возьмем $0 < \varepsilon < t_0$. Нетрудно видеть, что:

$$u(x) = \int_0^{t_0-\varepsilon} u(x,t)dt + \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u(x,t)dt + \int_{t_0+\varepsilon}^1 u(x,t)dt . \tag{6}$$

Оценим первый интеграл в формуле (6):

$$t_0 - \varepsilon > \int_0^{t_0 - \varepsilon} u(x,t) > (t_0 - \varepsilon) \cdot u(x, t_0 - \varepsilon).$$

Так как $x^0 \in O_{t_0 - \varepsilon}$, то некасательный предел $u(x, t_0 - \varepsilon)$ равен 1, следовательно, некасательный предел этого интеграла равен $t_0 - \varepsilon$.

Оценим теперь третий интеграл:

$$0 < \int_{t_0+\varepsilon}^{1} u(x,t)dt < (1 - t_0 - \varepsilon)u(x, t_0 + \varepsilon).$$

При $t_0 < t < t_0 + \varepsilon$, по определению t_0 $x^0 \notin O_t$, т. е. является точкой разреженности множества $O_{t_0+\varepsilon}$, а значит $u(x, t_0 + \varepsilon)$ имеет в точке x^0 нулевой некасательный предел. Тогда некасательный предел всего интеграла также равен 0.

Для второго интеграла имеем оценку:

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u(x,t)dt < 2\varepsilon.$$

Для любого конуса $\Gamma_\alpha(x^0)$ и любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство:

$$t_0 - \varepsilon \le \lim_{\substack{x \to x \\ x \in \Gamma_\alpha(x^0)}} \inf u(x) \le \lim_{\substack{x \to x \\ x \in \Gamma_\alpha(x^0)}} \sup u(x) \le t_0 + \varepsilon$$

Отсюда следует, что некасательный предел $u(x)$ в точке x^0 равен t_0.

Лемма доказана.

Докажем достаточность теоремы.

Пусть теперь E произвольное подмножество R_n^0 типа G_δ, n-мерной меры нуль. Тогда E представляется в виде

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m ,$$

где G_m, $m = 1, 2, \dots$, – некоторые открытые множества. Построим новую последовательность открытых множеств O_m, $m = 1, 2, \dots$, таких, что $E = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} O_m$ и выполнены следующие условия:

1. $O'_{m+1} \subset O_m$
2. интеграл Пуассона от характеристической функции множества O_{m+1} удовлетворяет неравенству:

$$\frac{1}{c_{n+1}} \int\limits_{O_{m+1}} P(x,\xi) d\sigma_{\xi} \le \frac{1}{2^{m+1}} , \; x \in \Gamma_{\frac{1}{m}} \left(x^0\right), \; x^0 \in R_0^n \setminus O_m .$$

Здесь O'_{m+1} множество точек, не являющихся точками разреженности множества O_{m+1}.

Такую последовательность множеств построим по индукции. В качестве O_1 возьмем G_1. Предположим, что множества $O_1, O_2, \dots, O_m$ уже построены. Для построения множества O_{m+1} представим O_m в виде:

$$O_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k ,$$

где

$$W_k = \left\{ \xi \in O_m , 2^{-k-2} < \rho\left(\xi, \partial O_m\right) < 2^{-k} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что в последовательности W_k пересекаться могут только два соседних множества.

Так как $mes^n E$, то пересечение $W_k \bigcap E$, $k = 1, 2, \ldots$ также имеет меру нуль. Выберем открытое множество $\widetilde{W}_k \subset W_k$, такое, что $W_k \bigcap E \subset \widetilde{W}_k$ и

$$mes^n \widetilde{W}_k < \frac{c_{n+1} 2^{-(k+m+1)} 2^{-(k+2)n}}{m^n}, \; k = 1, 2, \ldots .$$

Положим $O_{m+1} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{W}_k$. Очевидно, что

$$\frac{1}{c_{n+1}} \int\limits_{O_{m+1}} P(x,\xi) d\sigma_\xi \le \frac{1}{c_{n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\widetilde{W}_k} P(x,\xi) d\sigma_\xi .$$

Пусть $x^0 \in R_0^n \setminus O_m$, тогда расстояние от точки $\xi \in \widetilde{W}_k$ до конуса $\Gamma_{\frac{1}{m}}\left(x^0\right)$ будет не менее чем $\dfrac{2^{-k-2}}{m}$. Поскольку

$$\frac{x_{n+1}}{|x - \xi|} \le 1, \; x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\right), \xi \in R_0^n ,$$

то легко видеть, что

$$\frac{1}{c_{n+1}} \int\limits_{\widetilde{W}_k} P(x,\xi) d\sigma_\xi \le \frac{1}{c_{n+1}} \int\limits_{\widetilde{W}_k} \frac{d\sigma_\xi}{|x-\xi|^n} \le$$

$$\le \frac{m^n mes^n \widetilde{W}_k}{c_{n+1} 2^{-(k+2)n}} < \frac{m^n}{c_{n+1} 2^{-(k+2)n}} \cdot \frac{c_{n+1}}{m^n 2^{(k+2)n} 2^{k+m+1}} \le \frac{1}{2^{k+m+1}}$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{c_{n+1}} \int\limits_{O_{m+1}} P(x,\xi) d\sigma_\xi \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+m+1}} = \frac{1}{2^{m+1}}$$

т.е. построенное множество O_{m+1} удовлетворяет первому из требуемых условий.

Другое условие получается, если заметить, что ε-окрестность точки $x^0 \in R_0^n \setminus O_m$ пересекается только с множествами $\widetilde{W}_k$, $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$, $\dfrac{1}{2^{k_0+2}} < \varepsilon \le \dfrac{1}{2^{k_0+1}}$. Отсюда получается, что мера пересечения ε-окрестности точки x^0 с O_{m+1} удовлетворяет неравенству:

$$mes^n \left\{ O\left(x^0, \varepsilon\right) \cap O_{m+1} \right\} \le \sum_{k=k_0}^{\infty} mes^n \widetilde{W}_k \le \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{c_{n+1} 2^{-(k+m+1)} 2^{-(k+2)n}}{m^n} <$$

$$< \frac{c_{n+1}}{2^{2n} 2^m 2^{k_0(n+1)} m^n} = \frac{1}{(4m)^n 2^m} \cdot \frac{4}{2^{k_0+2}} c_{n+1} \left(\frac{1}{2^{k_0}} \right)^n \le$$

$$\le \frac{4\varepsilon}{(4m)^n} mes^n O\left(x^0, \varepsilon\right).$$

Таким образом, точка x^0 является точкой разреженности множества O_{m+1}, т.е. удовлетворяет и второму требуемому свойству. Кроме того, аналогичная оценка дает:

$$mes^n O_{m+1} \le \frac{c_{n+1}}{(8m)^n 2^{m+1}} \tag{7}$$

По доказанной лемме, для каждой пары множеств O_m и O_{m+1} существует гармоническая в R_+^{n+1} функция $u_m(x)$, $0 < u_m(x) < 1$, имеющая некасательные пределы всюду на R_0^n, равные 1 на O_{m+1} и равные нулю на $R_0^n \setminus O_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Положим

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x). \tag{8}$$

По построению функций $u_m(x)$, \

$$u_m(x) \le \frac{1}{c_{n+1}} \int_{O_m} P(x, \xi) d\sigma_\xi .$$

Следовательно, по (7) ряд (8) сходится равномерно в R_+^{n+1}:

Поскольку каждая функция $u_m(x)$ имеет на E некасательный предел равный 1, то функция $u(x)$ имеет на E некасательные пределы, равные ∞.

Если точка x^0 не принадлежит множеству E, то все функции суммы в (8), имеют конечные некасательные пределы в точке x^0.
Зафиксируем какой-нибудь конус $\Gamma_{\frac{1}{m_0}}\left(x^0\right)$. Все функции $u_m(x)$, начиная с номера m_0, удовлетворяют неравенству

$$u_m(x) \le \frac{1}{c_{n+1}} \int_{O_m} P(x,\xi) d\sigma_\xi \le \frac{1}{2^m}.$$

Из этого неравенства следует, что ряд (8) сходится равномерно в конусе $\Gamma_{\frac{1}{m_0}}\left(x^0\right)$. По теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда $u(x)$ имеет конечный предел по этому конусу.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Загорский З.С.* О множествах точек недифференцируемости непрерывных функций // Математический сборник. 1941. Т. 9 (51). С. 489–510.
2. *Berman R.D.* Some results concerning the boundary zero sets of general analytic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 293, № 2. P. 827–835.