Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2001 С. 134 – 138

С. В. Пухов

К ВОПРОСУ О МНОГОЧЛЕНАХ С ФИКСИРОВАННЫМИ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ В МЕТРИКЕ ПРОСТРАНСТВА *L*([–1; 1])

Рассматривается задача об алгебраическом многочлене с фиксированными коэффициентами при старших степенях, наименее уклоняющемся от нуля в метрике пространства $L([-1;1])$. Анализируется процесс построения такого многочлена в зависимости от числа перемен его знака. Приводится теорема о полиномиальной зависимости младших коэффициентов многочлена от старших в случае, когда четыре старших коэффициента фиксированы и многочлен имеет максимальное число перемен знака.

The extremal problem on algebraic polynomials of the least deviation from zero in metric of the space $L([-1;1])$ with fixed higher coefficients is considered. Depending of alternance process of construction of such polynomial is analyzed. The theorem on the polynomial dependence of lower coefficients of polynomial from the higher ones is brought in the case when four higher coefficients are fixed and alternance of the polynomial is maximal.

УДК УДК 517.518.8.

I

В теории приближений одной из основных задач является задача о наилучшем приближении фиксированного элемента f линейного нормированного пространства F с помощью элементов g конечномерного линейного подпространства G, $G \subset F$:

$$||f - g||_F \to \min, \quad g \in G, \tag{1}$$

при этом G и F являются, как правило, конкретными функциональными пространствами.

Особый интерес представляют точные решения экстремальной задачи (1). В ряде случаев они известны.

Обозначим через $\overline{g}$ элемент наилучшего приближения к f (решение задачи (1)). Приведем некоторые решения и заодно уточним принятые в работе обозначения.

1. П. Л. Чебышев (1853) [8].

Если $F = C([-1;1])$, $f = f(x) = x^n$, $G = \mathcal{P}_n$ — пространство алгебраических многочленов степени ниже n, то $\overline{g}$ существует, единствен и

$f-\overline{g}=T_n(x)$ — многочлен Чебышева 1-го рода (нормированный условием: коэффициент при x^n равен 1),

$$T_n(x)=2^{-(n-1)}\cos\left(n\arccos x\right).$$

2. П. Л.Чебышев (1859) [7], А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев (1873) [5].

Если $F=L([-1;1])$, $f=f(x)=x^n$, $G=\mathcal{P}_n$, то $\overline{g}$ существует, единствен и $f-\overline{g}=U_n(x)$ — многочлен Чебышева 2-го рода (нормированный условием: коэффициент при x^n равен 1),

$$U_n(x)=2^{-n}\sin\left((n+1)\arccos x\right)/\sqrt{1-x^2}.$$

3. Е. И. Золотарев (1868) [4].

Если $F=C([-1;1])$, $f=f(x)=x^n-\sigma x^{n-1}$, σ фиксировано, $G=\mathcal{P}_{n-1}$, то $\overline{g}$ существует, единствен, $f-\overline{g}$ характеризуется наличием на $[-1;1]$ альтернанса порядка n. Если $0\leqslant\sigma\leqslant n\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n}$, то $f-\overline{g}$ выражается через σ и T_n, при $\sigma>n\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n}$ разность $f-\overline{g}$ выражается через эллиптические функции, а при $\sigma=\alpha<0$ разность $f-\overline{g}=f_2$ выражается через аналогичную разность f_1 при $\sigma=-\alpha>0$ следующим образом:

$$f_2(x)=(-1)^n f_1(-x).$$

Многочлен $f-\overline{g}=x^n-\sigma x^{n-1}+\cdots$ получил название многочлена Золотарева.

4. Н. И. Ахиезер (1928) [1].

Задача (1) решена для $F=C([-1;1])$, $f=f(x)=x^n+\sigma x^{n-1}+\mu x^{n-2}$, σ, μ фиксированы, $G=\mathcal{P}_{n-2}$.

5. Я. Л. Геронимус (1936) [3], Э. М. Галеев (1975) [2].

Если $F=L([-1;1])$, $f=f(x)=x^n+\sigma x^{n-1}$, σ фиксировано, $G=\mathcal{P}_{n-1}$, то $\overline{g}$ существует, единствен и

$$f-\overline{g}=\Gamma_n(x;\sigma)=\begin{cases}(x+\sigma)U_{n-1}(x) & \text{при } |\sigma|\geqslant 1,\\ (1-\sigma^2)U_n(x)+\sigma(\sigma x+1)U_{n-1}(x) & \text{при } |\sigma|<1.\end{cases}$$

6. С. В. Пухов (результат получен в 1983 г., анонсирован в 1984 г., доказательство опубликовано в 1991 г.) [6].

Если $F=L([-1;1])$, $f=f(x)=x^n+\sigma x^{n-1}+\mu x^{n-2}$, $G=\mathcal{P}_{n-2}$, то $\overline{g}$ существует, единствен и для $P_n(x;\sigma,\mu)=f-\overline{g}$ получено следующее.

В случае, когда $P_n(x;\sigma,\mu)$ имеет ровно $(n-2)$ перемен знака на интервале $(-1;1)$, решение имеет вид

$$P_n(x;\sigma,\mu)=\left(x^2+\sigma x+\mu+\frac{n-3}{4}\right)\cdot U_{n-2}(x).$$

В случае, когда $P_n(x;\sigma,\mu)$ имеет ровно $(n-1)$ перемен знака на интервале $(-1;1)$, решение имеет вид

$$P_n(x;\sigma,\mu)=(x+\Delta)\cdot\Gamma_{n-1}(x;\gamma),$$

где $|\Delta|\geqslant 1$, $|\gamma|<1$, $\sigma=\Delta+\gamma$, $\mu=\Delta\gamma+\frac{1}{4}\gamma^2-\frac{n-2}{4}$.

В случае, когда $P_n(x;\sigma,\mu)$ имеет ровно n перемен знака на интервале $(-1;1)$, решение имеет вид

$$P_n(x;\sigma,\mu) = A(\sigma,\mu)\cdot U_n(x) + B(x;\sigma,\mu)\cdot U_{n-1}(x) + C(x;\sigma,\mu)\cdot U_{n-2}(x),$$

где A, B, C — многочлены от x,σ,μ, явный вид которых указан в [6]. Там же дано описание областей изменения параметров σ, μ, соответствующих приведенным случаям.

Автору настоящей статьи, благодаря любезному сообщению доцента С. В. Колесникова (ИвГУ), стало известно, что задача п. 6 была также решена челябинским математиком В. Э. Гейтом в рамках работы над проектом 99–01–00963, поддержанным РФФИ, о чем В. Э. Гейтом сделано сообщение на школе-конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова (Казань, 13–18 сентября 1999 г.). С. В. Колесников сообщил также, что аналогичная (или даже эта) задача решалась F. Peherstorfer'ом, однако по доступным источникам соответствующую публикацию найти не удалось.

II

Приведем общий анализ решений задач п. 5 и п. 6 части I.

Итак, рассматривается экстремальная задача об алгебраическом многочлене степени n с $(k+1)$ фиксированными старшими коэффициентами, наименее уклоняющемся от нуля в метрике пространства $L([-1;1])$:

$$\int\limits_{-1}^{1}\left|x^n+\sigma x^{n-1}+\mu x^{n-2}+\dots+\gamma x^{n-k}+\sum_{i=0}^{n-k-1}a_i x^i\right|dx \xrightarrow[a_0,\dots,a_{n-k-1}]{} \min. \quad (2)$$

То есть задача (1) для $f=f(x)=x^n+\sigma x^{n-1}+\mu x^{n-2}+\dots+\gamma x^{n-k}$, $F=L([-1;1])$, $G=\mathcal{P}_{n-k}$.

Обозначим через $R_n^{(k)}(x;\sigma,\mu,\dots,\gamma)$ искомый многочлен.

По теореме Джексона такой полином существует, единствен и удовлетворяет системе уравнений

$$\int\limits_{-1}^{1} x^i \operatorname{sign} R_n^{(k)}(x;\sigma,\mu,\dots,\gamma)\,dx = 0, \qquad i=\overline{0,n-k-1}, \quad (3)$$

т. е. $\operatorname{sign} R_n^{(k)}(x;\sigma,\mu,\dots,\gamma)\perp\mathcal{P}_{n-k}$.

Из этой системы следует, что многочлен $R_n^{(k)}(x;\sigma,\mu,\dots,\gamma)$ меняет знак на $(-1;1)$ не менее чем $(n-k)$ раз.

В пространстве R^k для каждого m при $n-k\leqslant m\leqslant n$ определим $D_m^{(k,n)}$ — область изменения параметров $(\sigma,\mu,\dots,\gamma)$, соответствующую случаю m перемен знака многочлена $R_n^{(k)}(x;\sigma,\mu,\dots,\gamma)$ на интервале $(-1;1)$.

Отметим, что

$$R^k=\bigcup_{n-k\leqslant m\leqslant n} D_m^{(k,n)},$$

а также что внутренности областей $D_m^{(k,n)}$ при $m = \overline{n-k, n}$ попарно не пересекаются. При этом оказывается, что граница области с максимальным числом перемен знака $D_n^{(k,n)}$ имеет общие участки с границами областей $D_m^{(k,n)}$ при $n-k \leqslant m < n$.

По известному решению задачи (2) для меньших значений, чем k и n, $R_\alpha^\beta(x;\sigma',\mu',\dots,\gamma')$, $\beta < k$, $\alpha < n$, решение в области $D_m^{(k,n)}$, где $n-k \leqslant m < n$, может быть указано в виде

$$R_n^{(k)}(x;\sigma,\mu,\dots,\gamma) = \\ = (x^{n-m} + ax^{n-m-1} + \dots + b)R_m^{(k-n+m)}(x;\sigma',\mu',\dots,\gamma'), \quad (4)$$

причем, многочлен $x^{n-m} + ax^{n-m-1} + \dots + b$ не меняет знак в $(-1;1)$, а многочлен $R_m^{(k-n+m)}(x;\sigma',\dots,\gamma')$ имеет максимальное число перемен знака в $(-1;1)$, равное m, и значит, многочлен $R_m^{(k-n+m)}(x;\sigma',\mu',\dots,\gamma')$ указан в области изменения параметров $(\sigma',\mu',\dots,\gamma') \in D_m^{(k-n+m,m)}$.

Далее, сравнивая коэффициенты при степенях x в двух записях многочлена (4), получаем систему, связывающую группу параметров $(\sigma,\mu,\dots,\gamma)$ с группами параметров $(a,\dots,b)$ и $(\sigma',\mu',\dots,\gamma')$ (значения которых пока еще неизвестны). Решая полученную систему, находим выражения параметров $(a,\dots,b)$, $(\sigma',\mu',\dots,\gamma')$ через $(\sigma,\mu,\dots,\gamma)$.

После указания решения $R_n^{(k)}(x;\sigma,\mu,\dots,\gamma)$ в областях $D_m^{(k,n)}$ при $n-k \leqslant m < n$ оно становится известным на границах этих областей, а значит, и на всей границе области с максимальным числом перемен знака $D_n^{(k,n)}$.

Для полного описания решения $R_n^{(k)}(x;\sigma,\mu,\dots,\gamma)$ в области $D_n^{(k,n)}$ не хватает выяснения двух вопросов:

— вида зависимости от $(\sigma,\mu,\dots,\gamma)$ коэффициентов решения $R_n^{(k)}(x;\sigma,\mu,\dots,\gamma)$ при степенях x;

— одного из конкретных решений при некоторых значениях параметров внутри области $D_n^{(k,n)}$.

Второй вопрос решается полиномом Чебышева 2-го рода $U_n(x)$ (т. к. он имеет n перемен знака внутри $(-1;1)$), а первый решался бы утверждением о полиномиальной зависимости коэффициентов $R_n^{(k)}(x;\sigma,\mu,\dots,\gamma)$ от параметров $\sigma,\mu,\dots,\gamma$ (так оказывается, например, при $k = 1,2,3$).

Отметим, что при $k = 3$ задача рассматривалась в магистерской диссертации Н. А. Лазаревой (ИвГУ, 2000), где даны явные выражения $R_n^{(k)}(x;\sigma,\mu,\dots,\gamma)$ в областях $D_m^{(3,n)}$ при $m = n-3,\ n-2$, а также для области $D_{n-1}^{(3,n)}$ указан общий вид решения как произведения многочлена $P_{n-1}(x;\sigma',\mu')$ (имеющего $(n-1)$ перемен знака) и линейного многочлена $(x+\Delta)$, $|\Delta| \geqslant 1$, получена система нелинейных уравнений, связывающая (σ,μ,γ) с (σ',μ') и Δ. К сожалению, решение этой системы относительно Δ,σ',μ' представляет определенные трудности. Другой подход к построению решения при $m = n-1$ состоит в следующем: в системе уравнений σ, μ, γ выражены через Δ, σ', μ, и значит, определено отображение $\Phi\colon (\Delta,\sigma',\mu') \to (\sigma,\mu,\gamma)$. Зная область изменения Δ, σ', μ' ($|\Delta| \geqslant 1$, σ' и μ' таковы, что $P_{n-1}(x;\sigma',\mu')$ имеет $n-1$ перемен знака на $(-1;1)$, что означает $(\sigma',\mu') \in D_{n-1}^{(2,n-1)}$, а эта область известна), получаем

$D_{n-1}^{(3,n)} = \Phi(D_{n-1}^{(2,n-1)})$. Конечно, при этом подходе необходимо исследование и эффективное описание границы области $D_{n-1}^{(3,n)}$.

Как уже было указано, завершение решения задачи в области $D_n^{(3,n)}$ основывается на полиномиальной зависимости коэффициентов многочлена $R_n^{(3)}(x;\sigma,\mu,\gamma)$ от σ,μ,γ. Такая общая зависимость дается следующей теоремой.

Теорема. *Если* $(\sigma,\mu,\gamma)\in D_n^{(3,n)}$, *то*

$$R_n^{(3)}(x;\sigma,\mu,\gamma) = x^n+\sigma x^{n-1}+\mu x^{n-2}+\gamma x^{n-3}+\sum_{i=0}^{n-4}(P_{6,i}(\sigma)+\mu P_{4,i}(\sigma)+ \\ +\mu^2 P_{2,i}(\sigma)+\gamma P_{3,i}(\sigma)+\mu\gamma P_{1,i}(\sigma)+\gamma^2 P_{0,i}(\sigma))x^i,$$

где $P_{j,i}(\sigma)$ — *многочлены степени* j *от* σ, $j=\overline{0,6}$, $i=\overline{0,n-4}$.

Доказательство теоремы будет дано в другой публикации. Оно основывается на использовании свойств основных симметрических многочленов.

Приведенная теорема позволяет в принципе завершить процесс построения многочлена $R_n^{(3)}(x;\sigma,\mu,\gamma)$ при всех наборах значений параметров (σ,μ,γ) и указать решение в так называемом алгебраически замкнутом виде подобно тому, как это сделано в [1–8].

Представляется очень вероятным, что и при $k>3$ также имеет место полиномиальная зависимость коэффициентов a_i, $i=\overline{0,n-k-1}$ многочлена $R_n^{(k)}(x;\sigma,\mu,\ldots,\gamma)$ от $\sigma,\mu,\ldots,\gamma$ во всех областях $D_m^{(k,n)}$, $m=\overline{n-k,n}$.

Библиографический список

1. *Ахиезер Н. И.* Über einige Funktionen, die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen // Изв. Казан. физ.-мат. об-ва. 1928. Т. 3. С. 1—69.
2. *Галеев Э. М.* Задача Золотарева в метрике $L_1([-1;1])$ // Мат. заметки. 1975. Т. 17. Вып. 1. С. 13—20.
3. *Геронимус Я. Л.* Sur quelques proprietes extremales de polynômes, dont les coefficients premiers sont donnés // Зап. мат. товарищества. Харьков, 1936. Т. 4 Вып. 12, С. 49—60.
4. *Золотарев Е. И.* Об одном вопросе о наименьших величинах // Полн. собр. соч. Л., 1932. Вып. 2. С. 130—166.
5. *Коркин А. Н., Золотарев Е. И.* Sur un certain minimum // Золотарев Е. И. Полн. собр. соч. Л., 1931. Вып. 1. С. 138—153.
6. *Пухов С. В.* Экстремальная задача о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в пространстве $L([-1;1])$, три старших коэффициента которых заданы // Алгебраические системы: Межвуз. сб. науч. тр. Иваново, 1991. С. 142—149.
7. *Чебышев П. Л.* Об интерполировании в случае большого числа данных, доставленных наблюдениями // Полн. собр. соч. М.; Л., 1947. Т. 2. С. 244—313.
8. *Чебышев П. Л.* Теория механизмов, известных под названием параллелограммов // Там же. С. 23—51.