Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2003 С. 92 – 102

Е. П. Барановский

О ПОЛНОТЕ СПИСКА L-УСЛОВИЙ ДЛЯ СИМПЛЕКСОВ 6-МЕРНЫХ РЕШЕТОК

Статья дополняет работу [3], в которой получен список L-условий для симплексов 6-мерных решеток. В статье показано, что у 6-мерных решеток в пространстве E^6 не может быть L-симплексов, объем которых больше объема основного симплекса в $4p$ или $5p$ раз, где $p = 1, 2, \ldots$. Полученный результат является основой доказательства полноты списка в работе [3].

Совсем недавно L-условия для симплексов 6-мерных решеток были получены М.Дутором и М.Деза [4] при исследовании гиперметрического конуса на семи вершинах. Способы решения проблемы в работах [3] и [4] различны.

This work can be considered as a supplement to the paper [3] where was given a full list of the L-conditions for simplexes of 6-dimensional lattices in the E^6. In this work it is shown that in E^6 do not occur lattices which have L-simplexes of volume $4pv$ and $5pv$, where v is the volume of a basic simplex of the lattice and $p = 1, 2, \ldots$. This fact is a basis of the proof in [3] of completeness of the list of L-conditions.

Recently, the L-conditions for simplexes of 6-dimensional lattices were obtained by M.Dutour and M.Deza [4] when they investigated the hypermetric cone on seven vertices. The ways of solution of the problem in works [3] and [4] are quite different.

УДК 514.174.6.

§ 1. Определения, предварительные сведения. Результаты

1. Напомним некоторые необходимые определения и сведения из теории задаваемых решетками L-разбиений евклидовых пространств.

Пусть Γ^n — n-мерная решетка евклидова пространства E^n, M — многогранник этой решетки, то есть *выпуклый n-мерный многогранник с вершинами в точках решетки* Γ^n, μ — одна из его гиперграней (фасет), $P(\mu)$ — гиперплоскость, порожденная фасетой μ, $\Gamma^{n-1}_{\mu,0}$ — подрешетка (слой) решетки Γ^n, расположенная в плоскости $P(\mu)$. Решетку Γ^n рассмотрим как объединение слоев

$$\Gamma^n = \cup_m \Gamma^{n-1}_{\mu,m}, \qquad \Gamma^{n-1}_{\mu,m} = \Gamma^{n-1}_{\mu,0} + m\bar{v},$$

где $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, а $\bar{v}$ — вектор, заданный отрезком, соединяющим две точки решетки, расположенные в соседних слоях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00010).

Считаем, что многогранник M расположен по ту сторону гиперплоскости $P(\mu)$, где номера слоев $m > 0$, и пусть k_μ — максимальное значение среди номеров тех слоев, с которыми многогранник M имеет непустое пересечение.

Число k_μ будем называть *высотой многогранника M относительно фасеты μ* и говорить, что многогранник M является *k_μ-слойным* относительно этой фасеты. Многогранник M называется *k-слойным многогранником решетки* Γ^n, если k есть максимальное значение высот относительно всех его фасет.

Известно, что объем симплекса решетки или другого ее многогранника в целое число раз больше объема ее основного симплекса, то есть симплекса, векторный репер которого может служить базисом для задания решетки. Это целое число называется относительным объемом многогранника. Всюду ниже, если не оговорено противное, под словами "объем симплекса (многогранника) решетки" понимается именно его относительный объем. Объем, равный $1, 2, 3, p$, мы соответственно будем называть одинарным, двойным, тройным, p-кратным.

Рассматриваемые в этой статье многогранники решеток принадлежат задаваемому решеткой L-разбиению, то есть являются L-многогранниками. L-многогранником (многогранником Делоне) называется такой вписываемый в шар многогранник решетки, что замкнутый шар, в который он вписан, не содержит точек решетки, кроме вершин многогранника. В общем случае (решетки *общего типа*) эти многогранники являются симплексами.

2. Будем считать, что решетка Γ^n задана репером

$$E = \{O; \bar{e}_1, ..., \bar{e}_n\},$$

который мы рассматриваем и как базис координатной системы в пространстве E^n. Координаты точек относительно этого базиса обозначены через $x^1, ..., x^n$. Дополнив координатные строки точек координатой $x^0 = 1 - \sum_{i=1}^n x^i$, получим их барицентрические координаты относительно симплекса S, построенного на репере E:

$$S = \{A_0 A_1 ... A_n\}, \quad A_0 = O, \quad \overline{A_0 A_i} = \bar{e}_i. \tag{1}$$

Пусть h_{kl} $(k, l = 0, 1, ..., n; k < l)$ — квадраты длин ребер симплекса S, то есть $h_{kl} = A_k A_l^2$. Условием того, что точка $M = (x^0, x^1, ..., x^n)$ лежит соответственно вне, на поверхности или внутри сферы $\Omega(S)$, описанной около симплекса S, является положительность, обращение в 0 или отрицательность функции

$$\Phi(M) = \Phi(x^0, x^1, ..., x^n) = - \sum_{0 \leqslant k < l \leqslant n} h_{kl} x^k x^l, \tag{2}$$

называемой степенью точки M относительно сферы $\Omega(S)$ (см., напр., [1]).

Считаем далее симплекс $S = \{A_0 A_1 ... A_n\}$ некоторой n-мерной решетки Γ^n не обязательно основным ее симплексом, однако попрежнему рассматриваем его как базис барицентрической системы координат. Через S_k, $k \in \{0, 1, ..., n\}$ обозначим фасету симплекса, полученную отбрасыванием у симплекса S вершины A_k, то есть фасету, расположенную в гиперплоскости $x^k = 0$, где $x^0, x^1, ..., x^n$ — барицентрические координаты относительно симплекса S.

n-мерную решетку, точки которой определены как целочисленные координаты относительно симплекса S как базиса, обозначим через $\Gamma^n(S)$.

Необходимые и достаточные условия того, что симплекс S является L-симплексом решетки $\Gamma^n(S)$, называют *L-условиями симплекса* [3]. Знание при данном n L-условий для симплексов n-мерных решеток $\Gamma^n(S)$ может служить базой при исследовании строения L-разбиений этих решеток.

В этой статье, как и в работах [1, 3], L-условия будут рассматриваться как некоторое конечное множество неравенств вида

$$\Phi(M_q) > 0, \qquad q = 1, 2, ..., p,$$

которые должны выполняться для точек $M_1, M_2, ..., M_p$ решеток $\Gamma^n(S)$, заданных барицентрическими координатами относительно симплекса S. Названное выше множество точек $\mathcal{M} = \{M_q\}$ будем называть *множеством, задающим L-условия,* а сами точки — *определяющими точками L-условий.*

Множество $\mathcal{M}$ — наименьшее множество точек решеток $\Gamma^n(S)$, выполнение для которых L-условий (то есть условий, что эти точки решетки расположены вне замкнутой сферы $\Omega(S)$, описанной вокруг симплекса S) гарантирует их выполнение и для любой другой точки решетки.

Определяющие точки, и только они, являются точками решетки, обладающими следующим свойством: *для каждой определяющей точки M_q на множестве n-мерных решеток $\Gamma^n(S)$ существует решетка, у L-симплекса которой имеется фасета, по которой с этим симплексом смежен L-симплекс с вершиной в точке M_q.* При данном n для L-симплекса n-мерной решетки все вершины соседних с ним по его фасетам L-симплексов находятся среди точек множества $\mathcal{M}$. (У одних решеток эти точки одни, у других — другие.)

3. Список L-условий для симплексов 6-мерных решеток получен в статье [3] и воспроизводится здесь нижеследующей теоремой:

Теорема 1. *Множество определяющих точек L-условий для основного симплекса 6-мерной решетки состоит из точек, барицентрические координаты которых относительно этого симплекса образованы всевозможными перестановками из следующих координатных наборов:*

$$\begin{gathered}
1)(-1^1, 1^2, 0^4); \quad 2)(-1^2, 1^3, 0^2); \quad 3)(-1^3, 1^2, 2^1, 0^1);\\
4)(-2^1, -1^1, 1^4, 0^1); \quad 5)(-1^3, 1^4); \quad 6)(-1^4, 1^1, 2^2);\\
7)(-1^4, 1^2, 3^1); \quad 8)(-2^1, -1^2, 1^3, 2^1); \quad 9)(-2^2, 1^5);\\
10)(-3^1, -1^1, 1^5); \quad 11)(-2^1, -1^3, 1^1, 2^1, 3^1); \quad 12)(-2^2, -1^1, 1^3, 3^1);\\
13)(-3^1, -1^2, 1^2, 2^2); 14)(-3^1, -2^1, 1^4, 2^1).
\end{gathered} \tag{A}$$

В статье [3] доказана минимальность списка (A), то есть доказано, что присутствие всех названных в списке определяющих точек необходимо. Доказательство минимальности множества $\mathcal{M}$ списка (A) состояло в том, что на множестве $\{\Gamma^6(S)\}$ были названы решетки, для которых выполняются все условия списка (A), кроме некоторого одного из них, которое на этих решетках становится равенством. У таких решеток симплекс S входит в состав так называемого многогранника переделивания с $n+2$ вершинами $A_0, A_1, ..., A_6, M_q$, где точка $M_q \in \mathcal{M}$, для которой $\Phi(M_q) = 0$.

Для доказательства того, что список (A) полон, то есть доказательства достаточности L-условий, заданных этим списком, в работе [3] предложен *метод заслоняющих точек.* Этот метод, достаточно эффективный в размерностях $n \leqslant 5$, при $n = 6$ оказался чрезвычайно громоздким в вычислительном смысле. Автор предлагает несколько усовершенствованный путь доказательства полноты списка в работе [3]. Доказательство достаточности списка (A) опирается на тот факт, что среди L-симплексов 6-мерных решеток нет симплексов высоты более чем 3. В этой заметке содержится наиболее существенная часть доказательства справедливости этого утверждения — показано, что высота таких симплексов не может быть равна ни $4p$, ни $5p$, где $p = 1, 2, ...$

§ 2. О фасетах L-симплексов 6-мерных решеток

В этом параграфе и ниже нам потребуется следующая лемма, доказательство которой можно найти в заметке [2]:

Лемма 1. *Если фасеты S_k $(k = 0, 1, ..., n)$ некоторого n-мерного симплекса S решетки Γ^n, рассматриваемого как базисный симплекс системы координат $x^0, x^1, ..., x^n$, являются основными симплексами в своих подрешетках Γ_k^{n-1}, полученных сечениями решетки Γ^n гиперплоскостями $x^k = 0$, и симплекс S имеет относительно своей решетки p-кратный объём, то все точки решетки Γ^n определяются барицентрическими координатами:*

$$(x^o + z\frac{q^0}{p}, x^1 + z\frac{q^1}{p}, \dots, x^n + z\frac{q^n}{p}), \tag{3}$$

где q^k, $k \in \{0, 1, ..., n\}$ — некоторые числа, взаимно простые с p, причем $|q^k| < p$, а $x^0, x^1, ..., x^n, z$ — произвольные целые.

Обозначим $S = S(p)$ и считаем симплекс $S(p)$ L-симплексом решетки Γ^6. Тогда его фасеты S_k являются L-симплексами 5-мерных решеток — подрешеток, полученных из решетки Γ^6 сечением ее гиперплоскостями $x^k = 0$. Эти фасеты относительно своих 5-мерных решеток могут быть [2] либо основными симплексами, либо симплексами двойного объема.

Предложение 1. *Фасеты L-симплексов 6-мерных решеток, за исключением разве одной из них, являются L-симплексами одинарного объема в своих подрешетках.*

▷ Предположим противное: две фасеты, скажем, S_5 и S_6 L-симплекса $S(p)$ являются симплексами двойного объема. Следовательно, 5-мерные решетки Γ_5^5 и Γ_6^5 соответственно в плоскостях $x^5 = 0$ и $x^6 = 0$ согласно лемме 1, кроме целочисленных, содержат точки, координатные строки которых получаются сложением целочисленных строк соответственно со строкой $\frac{1}{2}(1,1,1,1,1,0,1)$ и строкой $\frac{1}{2}(1,1,1,1,1,1,0)$. Отсюда следует, что в число векторов решетки Γ^6 входят и векторы

$$\frac{1}{2}(1,1,1,-1,-1,0,-1), \qquad \frac{1}{2}(1,1,1,-1,-1,-1,0).$$

Разность этих двух названных выше векторов — вектор $\frac{1}{2}(0,0,0,0,1,-1)$, также принадлежит к векторам решетки Γ^6. Если началом этого вектора взять точку A_6, то концом его будет точка решетки $\frac{1}{2}(0,0,0,0,1,1)$ — середина ребра симплекса $S(p)$; следовательно симплекс $S(p)$ не является L-симплексом, что противоречит условию. $\bullet$

§ 3. L-симплексы двойного объема в 6-мерных решетках

Считаем, что L-симплекс $S = \{A_0A_1...A_6\}$ некоторой 6-мерной решетки Γ^6 является относительно своей гиперграни $S_6 = \{A_0A_1...A_5\}$ p-слойным, $p > 1$.

Как уже говорилось выше, в 5-мерной подрешетке, определяемой гранью S_6, сама грань может быть либо основным симплексом, либо симплексом двойного объема.

Пусть Λ — решетка, построенная на симплексе S, как на основном. Исходная решетка Γ^6 относительно решетки Λ является центрировкой. Ее можно задать точкой

$$\alpha = \frac{1}{p}(x^0, x^1, ..., x^5, 1)$$

из первого слоя, считая от грани S_6. При задании центрирующей точки, как и всюду ниже, под координатами $x^0, x^1, ..., x^6$ понимаются барицентрические координаты относительно симплекса S, как базиса.

Две центрировки решетки Γ^6 называются эквивалентными, если в них можно выбрать центрирующие точки, отличающиеся не более чем порядком координат.

Предложение 2. *Всякий симплекс двойного объема в L-разбиениях 6-мерных решеток таков, что одна из его фасет является L-симплексом двойного объема относительно 5-мерного слоя, в котором она расположена. Высота симплекса относительно этой фасеты равна 1, относительно остальных фасет — двум.*

$\triangleright$ Предполагаем противоположное тому, о чем говорится в предложении, — все фасеты симплекса двойного объема основные в своих слоях, а его двойной объем соответствует тому, что он двухслойный. В этом случае относительно любой грани должна существовать центрирующая точка, для которой $p = 2$. Согласно лемме 1 в строке (3) имеем $|q^k| < 2$. Если в строке (3) взять $z = 1$, $x^k = 0$ при всех $k = 0, 1, ..., 6$, то получим центрирующую точку $\frac{1}{2}(q^0, ..., q^6)$, где q^k могут принимать значения -1, $+1$ или 0, а их сумма равна 2 (учитывается множитель $1/2$ перед координатной строкой из барицентрических координат, сумма которых равна 1). Из сказанного получаем, что центрирующая точка имеет вид $\frac{1}{2}(1^r, -1^s, 0^t)$, где r, s, t — целые положительные и $r+s+t = 7$, а $r-s = 2$. При названных ограничениях t не может быть нулем, то есть среди координат центрирующей точки имеется хотя бы один нуль. Из присутствия равной 0 координаты следует, что наше исходное предположение не имеет места и центрирующая точка расположена в гиперплоскости одной из фасет. Следовательно, эта фасета является L-симплексом двойного объема относительно 5-мерной решетки, лежащей на этой гиперплоскости. Так как в размерностях, меньших 5, все L-симплексы имеют только одинарный объем, то центрирующая точка имеет вид $\frac{1}{2}(1^4, -1^2, 0^1)$. Отсюда видна справедливость всех утверждений доказываемого предложения. •

Из предложения 2 следует, что все L-симплексы четного объема, скажем, $2m$, имеют фасету двойного объема и относительно нее высоту m, относительно же остальных фасет их высота равна $2m$. Действительно, если высота L-симплекса относительно фасеты μ в гиперплоскости $P(\mu)$ равна $2m$, то, добавив к $n-1$-мерному базису, определяющему решетку $\Gamma^{n-1}_{P(\mu)}$ в гиперплоскости $P(\mu)$, вектор решетки с началом в точке решетки $\Gamma^{n-1}_{P(\mu)}$ и концом в слое высоты m, мы получим n-мерную подрешетку исходной решетки, для которой наш L-симплекс будет L-симплексом двойного объема. Согласно предложению 2, фасета μ является симплексом двойного объема относительно решетки $\Gamma^{n-1}_{P(\mu)}$.

Что касается симплексов нечетного объема p, то все их фасеты имеют одинарный объем и относительно каждой из них высота L-симплекса равна p — объему этого симплекса.

Следствие предложения 2. *Каждый из L-симплексов 6-мерной решетки нечетного объема имеет одну и ту же высоту относительно всех своих фасет. Каждый из L-симплексов четного объема имеет одну и ту же высоту, причем она выражается четным числом, относительно 6 из 7 своих фасет; относительно же оставшейся фасеты его высота в 2 раза меньше высоты относительно других фасет.*

Предложение 3. *Пусть симплекс S 6-мерной решетки имеет двойной объем и фасета S_0 является его фасетой двойного объема. Чтобы симплекс S был L-симплексом, необходимо, чтобы квадраты длин его ребер h_{kl} удовлетворяли следующим трём множествам неравенств:*

$$h_{kl} + h_{km} + h_{pl} + h_{pl} + h_{pm} + h_{ql} + h_{qm} + h_{rl} + h_{rm} > \\ h_{lm} + h_{kp} + h_{kq} + h_{kr} + h_{pq} + h_{pr} + h_{qr}, \quad (4)$$

где строка (k, l, m, p, q, r) пробегает все перестановки чисел 1,2,3,4,5,6;

$$\Phi\big[\frac{1}{2}(-2; 1^5, -1^1)\big] > 0; \quad (5)$$

$$\Phi[\frac{1}{2}(2; 1^3, -1^3)] > 0. \quad (6)$$

▷ 15 неравенств (4) являются необходимыми и достаточными условиями того, что 5-мерная фасета S_0 является L-симплексом в своей подрешетке [2]. Шесть неравенств (5) и 20 неравенств (6) соответствуют точкам решетки из первых слоев (см. (3)) относительно фасет $S_1 - S_6$, которые, согласно (2), не должны принадлежать шару, описанному вокруг симплекса S.•

Замечание. Считая полноту списка L-условий (A) доказанной и опираясь на этот список,можно установить, что совокупность неравенств (4) – (6) представляет собой и **достаточные** условия того, что симплекс двойного объема 6-мерной решетки, взятый как задающий симплекс (решетка при этом задана как центрировка со знаменателем 2), является L-симплексом двойного объема.

§ 4. Об L-симплексах высоты 4 и высоты 5

Рассмотрим вопрос о центрирующих точках симплекса S 6-мерной решетки, высота которого относительно фасеты S_k равна $p = 2, 3, 4, 5$.

Предложение 4. *Все попарно неэквивалентные возможные центрировки решетки Γ^6, заданной симплексом $S = S(p)$ при $p = 2, 3, 4, 5$, если их задавать центрирующими точками, суть следующие:*

$$\begin{gathered}
W_2 = \frac{1}{2}(0, -1, -1, 1, 1, 1, 1), \; W_3 = \frac{1}{3}(-1, -1, 1, 1, 1, 1, 1), \\
W_{4,1} = \frac{1}{4}(-1, -1, 2, 1, 1, 1, 1), \quad W_{4,2} = \frac{1}{4}(-2, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \\
W_{5,1} = \frac{1}{5}(-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \quad W_{5,2} = \frac{1}{5}(-2, 2, 1, 1, 1, 1, 1), \\
W_{5,3} = \frac{1}{5}(-1, -1, 3, 1, 1, 1, 1), \quad W_{5,4} = \frac{1}{5}(-1, -1, 2, 2, 1, 1, 1), \\
W_{5,5} = \frac{1}{5}(-2, -1, 3, 2, 1, 1, 1), \quad W_{5,6} = \frac{1}{5}(-3, 2, 2, 1, 1, 1, 1).
\end{gathered} \tag{7}$$

$\triangleright$ Случай $p = 2$ обсуждался выше. Остальные случаи получаются путем перебора возможных вариантов центрирующих строк.

Прежде всего отметим, что среди координат центрирующей точки при $p \geqslant 3$ не может быть нулей. Действительно, нули соответствовали бы центрировке подрешетки размерности n меньше 6, для которой соответствующая грань симплекса S является L-симплексом p-кратного объема, что при $n \leqslant 5$ и $p \geqslant 3$ не имеет места.

Пусть $p = 3$, центрирующая точка имеет вид $\frac{1}{3}(3u^0+q^0, ..., 3u^6+q^6)$, где $|q^k| \leqslant 2$, а $u^0, ..., u^6$ — целые. Так как

$$\sum_{k=0}^{6} u^k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{6} q^k = 1$$

и $\sum_{k=0}^{6} = 3q$, где q — целое, то, прибавляя к центрирующей точке целые векторы вида $(-1^1, 0^5, +1^1)$, приходим к центрирующей точке, у которой в координатной строке $u^0 = \dots = u^6 = 0$ и $q = 1$, то есть к строке вида

$$\frac{1}{3}(q^0, ..., q^6),$$

в которой $|q^k| \leqslant 2$ и $\sum_{k=0}^{6} q^k = 3$.

Прибавляя целые векторы того же вида $(-1^1, 1^1, 0^5)$, получим два следующих вида центрирующих точек: $\frac{1}{3}(-1^2, 1^5)$ и $\frac{1}{3}(-1^3, 1^2, 2^2)$. Докажем, что центрировка второго вида эквивалентна центрировке первого. Взяв в качестве центрирующей точки второго вида точку

$$B = \frac{1}{3}(-1, -1, -1, 1, 1, 2, 2),$$

рассмотрим вектор центрированной решетки

$$\overline{A_6B} = \frac{1}{3}(-1,-1,-1,1,1,2,-1) = \bar{\alpha}.$$

Прибавив к вектору $2\bar{\alpha}$ вектор $(1,1,1,-1,-1,-1,0)$, получим вектор центровки $\beta = \frac{1}{3}(1,1,1,-1,-1,1,-2)$. Отложив этот вектор от точки $A_6 = (0,0,0,0,0,0,1)$, получим центрирующую точку первого вида.

В случае $p = 4$ тем же способом, что и в случае $p = 3$, добиваемся, чтобы центрирующая точка имела вид

$$\frac{1}{4}(q^0, ..., q^6),$$

где все q^k, $k = 0,1,...,6$, — целые, их сумма равна 4 и $|q^k| \leqslant 3$.

Если среди чисел q^k есть тройка одного знака и тройка или двойка другого, то, прибавив вектор вида $(-1^1, +1^1, 0^5)$, придем к эквивалентной центровке, среди координат центрирующей точки таких сочетаний нет. Теперь осталось рассмотреть случаи, когда есть тройка одного знака (и этот знак, как легко видеть, может быть только $+$), а числа q^k другого знака — единицы. Названным условиям с точностью до порядка координат удовлетворяет только одна точка $C = \frac{1}{4}(-1,-1,-1,1,1,2,3)$. Умножив вектор $\overline{A_6C} = \frac{1}{4}(-1,-1,-1,1,1,2,-1)$ на 3, прибавив к нему вектор $(1,1,1,-1,-1,-2,1)$ и отложив полученный вектор от точки A_5, получим в качестве точки, задающей центровку, точку $(1,1,1,-1,-1,2,1)$. Сравнив с точкой $W_{4,1}$ из списка (7), видим, что задаваемые этими точками центровки эквивалентны.

Осталось рассмотреть случаи, когда числа q^k могут принимать только значения $\pm1, \pm2$. С точностью до порядка координат таких случаев оказалось всего шесть:

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{4}(-1,-1,1,1,1,1,2), & \frac{1}{4}(-2,1,1,1,1,1,1), \\
\frac{1}{4}(-1,-1,-1,1,2,2,2), & \frac{1}{4}(-1,-2,1,1,1,2,2), \\
\frac{1}{4}(-1,-1,-2,2,2,2,2), & \frac{1}{4}(-2,-2,1,1,2,2,2).
\end{array}$$

С учетом опыта исследования предшествующей центрирующей точки, доказательство эквивалентности этих 6 случаев центровкам с точками $W_{4,1}$ и $W_{4,2}$ не составит значительного труда.

Переходим к случаю $p = 5$, исследование которого принципиально не труднее предшествующих и отличается от них только сравнительно большим количеством требующих рассмотрения точек. Наряду с записью точек и векторов в барицентрических координатах, оказывается удобным рассматривать их, опуская координату x^0. При таком способе записи будем координатную строку заключать не в круглые, а в квадратные скобки. Всякий вектор $\frac{1}{5}[q^1, ..., q^6]$ (в этой записи координата вектора $q^0 = -\sum_{i=1}^{6} q^i$ не названа), как и центрирующую точку, путем прибавления целых векторов вида $[1^1, 0^5]$ можно привести к виду, когда числители q^i их координат удовлетворяют неравенствам $-2 \leqslant q^i \leqslant 2$, $i = 1, ..., 6$, $q^i \neq 0$. Таким образом, числители могут принимать значения $-2, -1, 1, 2$.

Обратимся к центрирующим точкам: $D = \frac{1}{5}[q^1, ..., q^6]$. Считаем, что среди координат q^i имеется хотя бы одна ± 1 (мы берем центрирующую точку D в первом слое) и выполнено условие $\sum_{i=1}^{6} q^i \geqslant 0$. Последнее требование, очевидно, не нарушает общности, поскольку всегда может быть достигнуто изменением направлений векторов базиса решетки Γ^6 на противоположные. При таких условиях для исследования получим следующие варианты значений $q^1, ..., q^6$:

[1,1,1,1,1,1],	[1,1,1,1,2,2],	[-2,-2,-1,-1,1,1],
[1,1,1,1,1,-1]	[1,1,1,1,2,-2],	[-2,-2,-1,-1,2,2],
[1,1,1,1,-1,-1],	[1,1,1,1-2,-2],	[-2,-2,2,2,1,1],
[1,1,-1,-1,-1],	[1,1,-1,2,2],	[2,2,1,1,-1,-1],
[1,1,1,1,1,2],	[1,1,1,-1,-2,2],	[-2,-2,-1,-1,1,2],
[1,1,1,1,1,-2],	[1,1,1,-1,-2,-2],	[-2,-2,1,1,-1,2],
[1,1,1,1,-1,2],	[1,1,1,2,2,2],	[-2,-2,2,2,1,-1],
[1,1,1,-1,-1,2],	[1,1,1,2,2,-2],	[2,2,-1,-1,-1,-2],
[1,1,1,1,-1,-2],	[1,1,1,2,-2,-2],	[2,2,-1,-1,1,-2],
[1,1,1,-1,-1,-2],	[1,1,1,-2,-2,-2],	[1,1,-1,-1,2,-2].

Из этих вариантов после рассмотрения относительно попарной эквивалентности (подобно тому, как это было сделано выше для $p = 3$ и $p = 4$) остается 6, названных в предложении. •

Теорема 2. *При $p = 4$ и $p = 5$ p-слойных L-симплексов у 6-мерных решеток не существует.*

▷ Доказательство теоремы заключается в том, что для каждой из 8 последних точек списка (7) $W_{4,1}$ – $W_{5,6}$ (которые для удобства далее соответственно обозначены $B_1, ..., B_8$) называется такая совокупность $\{M_t(B_v)\}$ точек решетки Γ^6, включающая и саму точку B_v, что сумма $\sum_t \Phi(M_t(B_v))$ равна 0. Следовательно, либо все значения $\Phi(M_t(B_v))$ равны 0, либо среди них есть как положительные, так и отрицательные. Так как и тот и другой случаи означают, что рассматриваемый симплекс S не является L-симплексом, то наличие этих совокупностей доказывает невозможность соответствующих центрирующих точек в решётке Γ^6 и, следовательно, доказывает теорему.

Итак, перечислим соответствующие названным выше центрирующим точкам B_v совокупности $\{M_t(B_v)\}$. При записи координат точек $M_t(B_v)$ через Z^k обозначена координатная строка, в которой координата $x^k = 1$, а остальные координаты равны 0. После названия некоторых из точек $M_t(B_v)$ в скобках стоит целое число (например, $B_v(2)$), означающее, что при составлении суммы $\sum_t \Phi(M_t(B_v))$ слагаемое $\Phi(M_t(B_v))$ умножается на это число.

$$1)B_1(2), B_1 + Z^0 - Z^2, B_1 + Z^1 - Z^2, -B_1 + Z^2 - Z^i, \quad i = 3, 4, 5, 6;$$

$$2)B_2(2), B_2 + Z^0 - Z^i, \ i = 1, 2, ..., 6;$$

$$3)B_3(4), B_3 + Z^0 - Z^i, \ i = 1, 2, ..., 6;$$

$$4)B_4(4), 2(B_4 - Z^2) + Z^0, 2(B_4 - Z^2) + Z^1, -B_4 + Z^2 + Z^i, \ i = 3, 4, 5, 6;$$

$$5)B_5(3), B_5 + Z^0 - Z^1(2), -B_5 + Z^1 + Z^i, \ i = 2, 3, ..., 6;$$

$$6) B_6(5), 2B_6 - Z^2 - Z^3 + Z^i(2), -B_6 + Z^j + Z^s,$$

$$B_6 - Z^j + Z^i, \ \ i = 0, 1; j = 2, 3; s = 4, 5, 6;$$

$$7) B_7, B_7 + Z^0 - Z^2, -B_7 + Z^0 + Z^3, 2B_7 + Z^0 - Z^2 - Z^3,$$

$$2B_7 + Z^0 + Z^1 - Z^2 - Z^3 + Z^i, 3B_7 + Z^0 + Z^1 - 2Z^2 - Z^i, \ \ i = 4, 5, 6;$$

$$8) B_8, B_8 + Z^0 - Z^1, B_8 + Z^0 - Z^2, -B_8 + Z^1 + Z^2, 2B_8 + Z^0 - Z^1 - Z^2,$$

$$-2B_8 + Z^1 + Z^2 - Z^0 + Z^i + Z^j, \ \ \{i, j\} \subset \{3, 4, 5, 6\}, i < j.$$

Проверив для каждого из множеств 1) – 8) обращение в 0 суммы значений функции $\Phi(M)$, заканчиваем доказательство теоремы. В качестве примера приводим запись для случая 1)(множитель $\frac{1}{16}$ опущен):

$$2\Phi(-1, -1, 2, 1, 1, 1, 1) + \Phi(3, -1, -2, 1, 1, 1, 1) + \Phi(-1, 3, -2, 1, 1, 1, 1)+$$

$$\Phi(1, 1, 4, 3, -1, -1, -1) + \Phi(1, 1, 4, -1, 3, -1, -1) + \Phi(1, 1, 4, -1, -1, 3, -1)+$$

$$+\Phi(1, 1, 4, -1, -1, -1, 3) = 0.\bullet$$

Следствие. *В L-разбиениях 6-мерных решеток нет симплексов, высота которых была бы равна $4p$ или $5p$, где $p = 1, 2, \ldots$.*

Путь, которым в теореме 2 исследованы высоты 4 и 5, при больших высотах требует во много раз более громоздких вычислений. Для таких исследований предпочтительнее оказался метод заслоняющих точек.

Библиографический список

1. *Барановский Е. П.* Симплексы L-разбиений евклидовых пространств // Мат. заметки. 1971. Т.10. *N* 6. С. 659—670.
2. *Барановский Е. П.* Объемы L-симплексов пятимерных решеток // Мат. заметки. 1973. Т. 13. *N* 5. С. 771—782.
3. *Барановский Е. П.* Условия, при которых симплекс 6-мерной решетки является L-симплексом // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 2. Иваново, 1999. С. 18—24.
4. *Dutour M., Deza M.* The hypermetric cone on seven vertices // 2001. Preprint in Laboratore interdisciplinaire de geometrie appliquee, CNRS/ENS, Paris.