Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2003 С. 117 – 127

С. В. Пухов, Е. А. Сухарева

СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ И КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА ГАУССА

Дано обобщение квадратурной формулы Гаусса для системы функций, любой обобщенный многочлен по которой имеет ограниченное число нулей.

The generalization of Gauss quadrature formula for system of functions such that the number of roots of any generalized polynomial on it is bounded is given.

УДК УДК 517.53.

0. Введение. Отечественный математик М. Г. Крейн (см. [2]), а также американский математик С. Карлин (см. [1]) получили обобщения квадратурной формулы Гаусса для линейных пространств, натянутых на так называемые чебышевские системы функций. В данной работе дается обобщение некоторых из этих результатов для более общей, чем чебышевская, систем функций, любой обобщенный многочлен по которой имеет ограниченное число нулей. Данная работа примыкает к работе [3] и является ее продолжением.

1. Об интерполяции. Пусть на множестве X определено семейство функций $F(x,\alpha)$, где $\alpha \in A$ и носит смысл параметра. Пусть также в множестве X выделены точки $\{x_i\}_{i=1}^{k}$, которые будут называться узлами интерполяции, и дана функция f, определенная на X.

Требуется выбрать такое значение параметра $\alpha \in A$, чтобы

$$f(x_i) = F(x_i,\alpha), \quad i = \overline{1,k}.$$

Часто в качестве семейства $F(x,\alpha)$ выступают функции вида

$$F(x,\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i(x),$$

а в качестве X промежуток прямой. В этом случае говорят о линейной интерполяции. При этом по аналогии с классической интерполяцией алгебраическими многочленами выражение

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i(x)$$

называют обобщенным многочленом по системе функций $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$.

Выясним, какими свойствами должна обладать система функций $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$, чтобы была разрешима задача интерполяции в следующем обобщенном смысле: для любых $y_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0,n}$, существует единственный набор $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ такой, что обобщенный многочлен

$$u(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i u_i(x)$$

интерполирует $\{y_j\}_{j=0}^n$, то есть $u(x_j) = y_j$, $j = \overline{0,n}$. Отметим, что, в свою очередь, данные y_j могут быть значениями функции $f(x)$ в точках x_j, $j = \overline{0,n}$, где $f(x)$ — некоторая функция, определенная на X.

Предложение 1. *Пусть X содержит хотя бы $n+1$ различную точку. Обобщенная задача интерполяции разрешима в указанном смысле тогда и только тогда, когда*

$$\det\ (u_i(x_j))_{i,j=\overline{0,n}} \neq 0,$$

где $\{x_j\}_{j=0}^n$ — произвольный набор различных точек из X.

Замечание 1. Условие, которое приведено в предложении 1, выполненное для различных точек $x_i \in X$ $(i = \overline{0,n})$, называется условием Хаара и известно в теории аппроксимации как необходимое и достаточное условие единственности наилучшего чебышевского приближения.

Замечание 2. Из условия Хаара следует, что система функций $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$ линейно независима на $[a,b]$. Действительно, если обобщенный многочлен

$$u(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i u_i(x)$$

тождественно равен нулю на X, то для любых различных $x_j \in X$, $j = \overline{0,n}$, имеем

$$u(x_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i u_i(x_j) = 0, \quad j = \overline{0,n},$$

а так как выполнено условие Хаара, то $\alpha_i = 0$, $i = \overline{0,n}$, что и означает линейную независимость системы $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$.

Условие Хаара эквивалентно другому условию о количестве нулей обобщенного многочлена $u(x)$.

Предложение 2. *Система $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$ функций, определенных на X, удовлетворяет условию Хаара тогда и только тогда, когда любой нетривиальный обобщенный многочлен по этой системе $u(x)$ (то есть $u(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i u_i(x) \not\equiv 0$ на X, где не все $\alpha_i = 0$, $i = \overline{0,n}$) имеет не более n различных нулей.*

Пусть теперь $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$ — конечный отрезок прямой. Рассмотрим геометрическую интерпретацию условия линейной независимости системы $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$ и условия Хаара для этой системы.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}$ кривую

$$U = \left\{\overline{u}(x) = (u_0(x), \ldots, u_n(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ a \leqslant x \leqslant b\right\}.$$

Предложение 3. *Система функций $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$ линейно независима тогда и только тогда, когда кривая U не содержится в подпространстве размерности n (а значит, и в подпространстве размерности меньше n).*

Геометрически условие линейной независимости системы $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$ можно представить так. Рассмотрим $L = \operatorname{lin} U$ — линейную оболочку кривой U, т. е. "наименьшее" линейное подпространство $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащее кривую U. Система $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$ линейно независима тогда и только тогда, когда $\dim(\operatorname{lin} U) = n+1$.

Аналогично рассматривается геометрический смысл условия Хаара. Однако сейчас оно означает более сильное условие. А именно, что любые $n+1$ точек $\overline{u}(x_j)$, $j = \overline{0,n}$ (x_j — различны) кривой U не могут лежать в подпространстве размерности меньше $n+1$.

Приведем конкретный пример, показывающий различие понятий линейной независимости системы $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$ и условия Хаара для этой системы.

Пусть $n = 1$, $u_0(x) = \sin x$, $u_1(x) = \cos x$. Как известно, система $\{\sin x, \cos x\}$ линейно независима на любом промежутке прямой $\mathbb{R}$. В то же время при $x_0 = \frac{\pi}{4}$ и $x_1 = \frac{5\pi}{4}$ получаем

$$\det(u_i(x_j)\ )_{i,j=0,1} = 0,$$

а значит, система $\{\sin x, \cos x\}$ не удовлетворяет условию Хаара на любом отрезке $[a,b]$, содержащем эти точки (в то же время на этом отрезке система $\{\sin x, \cos x\}$ линейно независима).

2. Системы функций с ограниченным числом нулей.

Определение. *Обобщенный многочлен $u(x)$ имеет на (a,b) изолированный нуль $x_0 \in (a,b)$ четной кратности, если $u(x_0) = 0$ и $u(x)$ не изменяет знака в x_0. Все другие нули, включая нули в граничных точках a и b, называют нулями нечетной кратности.*

Обозначим через $\tilde{Z}(u(t))$ число нулей обобщенного многочлена $u(t)$ с учетом их кратности (то есть внутренний нуль, в окрестности которого $u(t)$ сохраняет знак, считаем дважды, а если в этой окрестности $u(t)$ меняет знак, то один раз; если же нулем является конец отрезка, то один раз).

Будем теперь предполагать, что система $\mathcal{U} = \{u_i(t)\}_{i=0}^n$ линейно независимых функций, для которой существует строго положительный обобщенный многочлен, обладает также следующим важным свойством: *любой нетривиальный обобщенный многочлен имеет только изолированные нули, число которых с учетом их кратности ограничено некоторой константой, единой для всех обобщенных многочленов по этой системе.* Наименьшую такую константу обозначим через

$$N(\mathcal{U}) = N(\{u_i(t)\}_{i=0}^n).$$

Это означает, что

$$\tilde{Z}(u(t)) \leqslant N(\mathcal{U}), \quad \forall u(t) \in L = \operatorname{lin}\{u_0(t), \dots, u_n(t)\},$$

а также существует обобщенный многочлен $\hat{u}(t) \in L$ такой, что равенство достигается, то есть

$$\tilde{Z}(\hat{u}(t)) = N(\mathcal{U}).$$

Систему, обладающую этим свойством, назовем *системой с ограниченным числом нулей.*

Примером систем с ограниченным числом нулей могут служить системы Чебышева (T-системы), см. [1, 2].

Определение. *Система $\{u_i(t)\}_{i=0}^n$ функций, определенных на $[a,b]$ и непрерывных на нем, называется системой Чебышева (или T-системой), если для любого набора точек $\{t_j\}_{j=0}^n$, $a \leqslant t_0 < \dots < t_n \leqslant b$, выполняется условие*

$$\det(u_i(t_j))_{i,j=\overline{0,n}} > 0.$$

Любая T-система является линейно независимой на $[a,b]$. Известно также, что для T-систем

$$N(\mathcal{U}) = n.$$

Очевидно, что этот пример не исчерпывает все системы с ограниченным числом нулей. Например, система из пяти функций ($n = 4$):

$$1,\ t,\ t^2,\ t^3,\ t^5, \tag{1}$$

любой обобщенный многочлен по которой, как известно, имеет не более пяти нулей с учетом их кратности, не является T-системой на $[-4;5]$, так как можно построить обобщенный многочлен, например

$$u(t) = t^5 - 24t^3 - 26t^2 + 87t + 90,$$

у которого число нулей с учетом их кратности на $[-4;5]$ равно пяти, то есть $\tilde{Z}(u(t)) = 5$. Действительно, точки $t_1 = -1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 5$ являются нулями нечетной кратности, а $t_4 = -3$ — нуль четной кратности обобщенного многочлена $u(t)$ на $[-4;5]$. Таким образом, для системы (1) $N(\mathcal{U}) = 5$.

Итак, в дальнейшем будем предполагать, что система $\{u_i(t)\}_{i=0}^n$ обладает следующими свойствами:

A_1. $u_i(t)$, $i = \overline{0,n}$, — непрерывные функции, определенные на отрезке $[a,b]$ и линейно независимые на нем.

A_2. Существует строго положительный обобщенный многочлен по этой системе.

A_3. $\{u_i(t)\}_{i=0}^n$ — система с ограниченным числом нулей.

В работе [3] (см. следствие из теоремы 2) установлено, что когда система $\{u_i(t)\}_{i=0}^n$ обладает только свойствами A_1 и A_2, то для любой точки $c \neq 0$ из моментного пространства

$$\mathcal{M}_{n+1} = \big\{c \in \mathbb{R}^{n+1} \ :\ c = \int_a^b \overline{u}(t)\,d\sigma(t), \quad \sigma(t) \in \Sigma^{(+)}\big\},$$

где $\overline{u}(t) = (u_0(t), \dots, u_n(t))$ и $\Sigma^{(+)}$ — множество всех неубывающих на $[a,b]$ функций ограниченной вариации, существуют $\lambda_i > 0$ $(i = \overline{1,r})$ и t_i $(i = \overline{1,r})$, $a \leqslant t_1 < \dots < t_r \leqslant b$, такие, что

$$c = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{u}(t_i),$$

где $r \leqslant n+1$.

Число точек в последнем представлении, где каждая внутренняя точка t_i отрезка $[a,b]$ считается за единицу, а граничная за $\frac{1}{2}$, назовем индексом представления точки. Наименьший индекс представления по всем возможным представлениям точки $c \in \mathcal{M}_{n+1}$ назовем индексом точки c и обозначим $I(c)$. Очевидно, что $1 \leqslant I(c) \leqslant n+1$.

В следующих теоремах дается характеристика внутренних и граничных точек моментного пространства $\mathcal{M}_{n+1}$ с помощью понятия индекса точки.

Теорема 1. *Если система $\{u_i(t)\}_{i=0}^{n}$ обладает свойствами A_1 – A_3 и $c^* \in \partial(\mathcal{M}_{n+1})$, $c^* \neq 0$, то*

$$I(c^*) \leqslant \frac{1}{2} N(\mathcal{U}).$$

Доказательство. Поскольку c^* — граничная точка множества $\mathcal{M}_{n+1}$, а само множество является замкнутым и выпуклым, то точку и это множество можно отделить гиперплоскостью. Таким образом, существует $\bar{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\bar{a} \neq 0$, такое, что для любого $c \in \mathcal{M}_{n+1}$ имеем

$$(\bar{a}, c) \geqslant (a, c^*). \tag{2}$$

Отсюда при $c = 0$ получаем

$$(\bar{a}, c^*) \leqslant 0.$$

Так как $\mathcal{M}_{n+1}$ — конус, то из неравенства (2) следует, что для любого $\lambda > 0$ и любого $c \in \mathcal{M}_{n+1}$ выполнено неравенство

$$(\bar{a}, \lambda c) \geqslant (\bar{a}, c^*),$$

то есть $(\bar{a}, \lambda c)$ ограничены снизу. Значит,

$$(\bar{a}, c) \geqslant 0$$

для любого $c \in \mathcal{M}_{n+1}$.

Покажем, что $(\bar{a}, c^*) = 0$. Если бы это было не так, то есть $(\bar{a}, c^*) < 0$, то, положив в неравенстве (2) $c = 2c^*$, приходим к противоречию.

Итак, для любого $c \in \mathcal{M}_{n+1}$ выполнено неравенство

$$(\bar{a}, c) \geqslant 0 \tag{3}$$

и $(\bar{a}, c^*) = 0$. Отсюда для обобщенного полинома

$$u^*(t) = (\bar{a}, \bar{u}(t)) = \sum_{i=0}^{n} a_i u_i(t)$$

имеем

$$(\bar{a}, c^*) = \left(\bar{a}, \int_a^b \bar{u}(t)\, d\sigma_*(t)\right) =$$

$$= \int_a^b (\bar{a}, \bar{u}(t))\, d\sigma_*(t) = \int_a^b u^*(t)\, d\sigma_*(t) = 0, \quad (4)$$

где $c^* = \displaystyle\int_a^b \bar{u}(t)\, d\sigma_*(t)$.

Далее аналогично из неравенства (3) получаем

$$\int_a^b u^*(t) d\sigma(t) \geqslant 0 \quad (5)$$

для любой $\sigma(t) \in \Sigma^{(+)}$.

Обозначим различные нули обобщенного многочлена $u^*(t)$, который не равен тождественно нулю (т. е. $\bar{a} \neq 0$), через t_j, $j = \overline{1, r}$, где $a \leqslant t_1 < \cdots < t_r \leqslant b$. Из неравенства (5) следует, что $u^*(t) \geqslant 0$ для любого $t \in [a, b]$. Действительно, если существует $t^* \in [a, b]$ такая, что $u^*(t^*) < 0$, то из непрерывности следует, что существуют $\sigma > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $u(t) \leqslant -\sigma$ для любого

$$t \in (t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon) \cap [a, b].$$

Тогда, взяв в качестве $\sigma(t)$ непрерывную функцию из $\Sigma^{(+)}$, которая строго монотонно возрастает на $(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon) \cap [a, b]$, а на остальных участках отрезка $[a, b]$ постоянна, получим

$$\int_a^b u^*(t)\, d\sigma(t) < 0,$$

что противоречит неравенству (5).

Из равенства (4) следует, что $\sigma_*(t)$ — ступенчатая функция, которая может иметь скачки только в точках t_j, $j = \overline{1, r}$ — нулях обобщенного многочлена $u^*(t)$. Действительно, если $\hat{t} \in [a, b]$, $\hat{t} \notin \{t_j\}_{j=1}^{r}$ и функция $\sigma_*(t)$ не постоянна в некоторой окрестности этой точки, то существует промежуток $[\alpha, \beta]$ такой, что $\hat{t} \in [\alpha, \beta]$ и $\sigma_*(\alpha) < \sigma_*(\beta)$. Причем промежуток $[\alpha, \beta]$ не содержит нулей обобщенного многочлена $u^*(t)$. Тогда получаем, что

$$\int_a^b u^*(t)\, d\sigma_*(t) > 0,$$

а это противоречит равенству (4).

Таким образом, с точностью до константы и значений в точках скачков (что не влияет на значение интеграла) имеем

$$\sigma_*(t) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \Theta(t - t_j),$$

где $\lambda_j \geqslant 0$ $(j = \overline{1, r})$ и $\Theta(t)$ — функция Хевисайда:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Поэтому для c^* имеем

$$c^* = \int_a^b \bar{u}(t)\, d\sigma_*(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \bar{u}(t_j) \cdot (\sigma_*(t_j + 0) - \sigma_*(t_j - 0)) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \bar{u}(t_j).$$

Таким образом, имеем представление точки c^*:

$$c^* = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \bar{u}(t_j),$$

где $\lambda_j \geqslant 0,\ j = \overline{1, r}$ и $a \leqslant t_1 < \cdots < t_r \leqslant b$.

Отсюда для индекса точки c^* имеем:

$$I(c^*) \leqslant r.$$

Из следствия к теореме 2 в работе [3] известно, что имеются представления, где $r \leqslant n + 1$, а значит, $I(c^*) \leqslant n + 1$. Но сейчас мы дадим уточненную оценку величины $I(c^*)$ исходя из оценки числа нулей обобщенного многочлена $u^*(t)$ с учетом их кратности.

Имеем, что точки t_j, $j = \overline{1, r}$, являются нулями обобщенного многочлена $u^*(t)$, который неотрицателен на $[a, b]$, поэтому число нулей обобщенного многочлена $u^*(t)$ с учетом их кратности $\tilde{Z}(u^*(t))$ равно $2r$, если $t_1 \neq a$ и $t_r \neq b$; или $2r - 1$, если $t_1 = a$ или $t_r = b$ (но не одновременно), или $2r - 2$, если $t_1 = a$ и $t_r = b$.

Таким образом, в первом случае:

$$\tilde{Z}(u^*(t)) = 2r \leqslant N(\mathcal{U}), \quad \text{а} \quad I(c^*) \leqslant r \leqslant \frac{1}{2} N(\mathcal{U});$$

во втором случае:

$$\tilde{Z}(u^*(t)) = 2r - 1 \leqslant N(\mathcal{U}), \quad \text{а} \quad I(c^*) \leqslant r - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} N(\mathcal{U}),$$

и в третьем случае:

$$\tilde{Z}(u^*(t)) = 2r - 2 \leqslant N(\mathcal{U}), \quad \text{а} \quad I(c^*) \leqslant r - 1 \leqslant \frac{1}{2} N(\mathcal{U}).$$

Отсюда для индекса точки c^* имеем:

$$I(c^*) \leqslant \frac{1}{2} N(\mathcal{U}).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если система* $\{u_i(t)\}_{i=0}^{n}$ *обладает свойствами* A_1 – A_3 *и* $c^* \in \mathrm{int}(\mathcal{M}_{n+1})$, *то для любого* t^* *из* $[a, b]$ *существует представление*

$$c^* = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \bar{u}(t_j), \tag{6}$$

где $\lambda_j \geqslant 0,\ j = \overline{1, r},\ a \leqslant t_1 < \cdots < t_r \leqslant b$. *Причем* $t^* \in \{t_j\}_{j=r}^{r}$ *и*

$$I(c^*) \leqslant \frac{N(\mathcal{U})}{2} + 1.$$

Доказательство. Проведем через c^* любое сечение S множества $\mathcal{M}_{n+1}$. Выберем $\alpha > 0$ так, чтобы точка $\hat{c} = \alpha\bar{u}(t^*) \in S$. Если $\hat{c} = c^*$, то утверждение теоремы очевидно.

Пусть $\hat{c} \neq c^*$. Тогда проведем в сечении S луч с началом в точке $\hat{c}$, проходящий через c^*. Этот луч лежит в сечении S и пересекает границу конуса $\mathcal{M}_{n+1}$ в какой-то точке, которую обозначим $\tilde{c},\ \tilde{c} \neq 0$. Имеем, что c^* — внутренняя точка отрезка $[\hat{c}, \tilde{c}]$. Поэтому существует $\lambda,\ 0 < \lambda < 1$, такое, что

$$c^* = \lambda\hat{c} + (1 - \lambda)\tilde{c}.$$

Так как $\tilde{c} \in \partial(\mathcal{M}_{n+1})$, то по предыдущей теореме существует представление точки $\tilde{c}$ индекса

$$I(\tilde{c}) \leqslant \frac{1}{2}N(\mathcal{U})$$

такое, что

$$\tilde{c} = \sum_{j=1}^{p} \tilde{\lambda}_j \bar{u}(\tilde{t}_j), \quad \tilde{\lambda}_j > 0, \quad a \leqslant \tilde{t}_1 < \cdots < \tilde{t}_p \leqslant b.$$

Имеем также, что

$$\hat{c} = \alpha\bar{u}(t^*),$$

откуда получаем требуемое представление:

$$c^* = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \bar{u}(t_j),$$

где $t^* \in \{t_j\}_{j=1}^{r},\ a \leqslant t_1 < \cdots < t_r \leqslant b,\ \lambda_j > 0,\ j = \overline{1, r}$. При этом индексы представлений точек c^* и $\tilde{c}$ отличаются не более чем на единицу ввиду того, что в представлении точки c^* по сравнению с представлением точки $\tilde{c}$ добавляется не более одной точки (t^*), то есть индекс представления точки c^* не более $\frac{1}{2}N(\mathcal{U}) + 1$, а значит,

$$I(c^*) \leqslant \frac{1}{2}N(\mathcal{U}) + 1 = \frac{N(\mathcal{U}) + 2}{2}.$$

Теорема доказана.

3. Квадратурные формулы. Обратимся к задаче построения квадратурной формулы вида

$$\int_a^b f(t)\,d\sigma(t) \;\sim\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(t_i), \tag{7}$$

где $\sigma(t) \in \Sigma^{(+)}$ фиксирована.

Пусть дана система функций $\{u_i(t)\}_{i=0}^{n}$, обладающая свойствами A_1 – A_3. Требуется в квадратурной форме (7) выбрать весовые коэффициенты λ_i $(i = \overline{1,k})$ и узлы t_i $(i = \overline{1,k})$ так, чтобы квадратурная формула (7) была точна на $L = \operatorname{lin}\{u_0(t),\ldots,u_n(t)\}$ — пространстве всех обобщенных многочленов по данной системе функций $\{u_i(t)\}_{i=0}^{n}$ и число узлов (весов) было как можно меньше.

Пусть

$$\bar u(t) = (u_0(t),\ldots,u_n(t)), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

а также

$$c = \int_a^b \bar u(t)\,d\sigma(t).$$

Из теорем 1 и 2 для точки $c = (c_0,\ldots,c_n) \in \mathcal{M}_{n+1}$ получим представление:

$$c = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \bar u(t_i), \tag{8}$$

где $\lambda_i > 0,\ a \leqslant t_1 < \cdots < t_r \leqslant b$. Причем, если $c \in \partial(\mathcal{M}_{n+1})$, то

$$r \leqslant \frac{N(\mathcal{U})}{2} + 1,$$

если $c \in \operatorname{int}(\mathcal{M}_{n+1})$, то

$$r \leqslant \frac{N(\mathcal{U})}{2} + 2,$$

и в представлении (8) одна из точек $t_i,\ i = \overline{1,r}$ (а значит, один из узлов квадратурной формулы) может быть выбрана заранее.

Таким образом, итоговая оценка для r (независимо от того является ли точка c внутренней или граничной точкой моментного пространства $\mathcal{M}_{n+1}$) такова:

$$r \leqslant \frac{N(\mathcal{U})}{2} + 2.$$

Далее имеем

$$c_j = \int_a^b u_j(t)\,d\sigma(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_j(t_i), \quad i = \overline{0,n}.$$

Тогда для любого обобщенного многочлена $u(t) \in L$ имеем

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j u_j(t)$$

и

$$\int_a^b u(t)\,d\sigma(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j \int_a^b u_j(t)\,d\sigma(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j c_j =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_j(t_i) \right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sum_{j=0}^{n} a_j u_j(t_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u(t_i),$$

где $r \leqslant \frac{N(\mathcal{U})}{2} + 2$. Добавляя нулевые веса и фиктивные узлы, можно считать, что

$$r = \left[\frac{N(\mathcal{U})}{2} \right] + 2 = k.$$

Таким образом, мы получили квадратурную формулу вида

$$\int_a^b f(t)d\sigma(t) \;\sim\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(t_i),$$

где $\sigma(t) \in \Sigma^{(+)}$, $k = \left[\frac{N(\mathcal{U})}{2}\right] + 2$, точную для всех обобщенных многочленов по системе функций $\{u_0(t), \dots, u_n(t)\}$, обладающей свойствами $A_1 - A_3$. При этом $\lambda_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,k}$, а также, если $c \in \mathrm{int}(\mathcal{M}_{n+1})$, то среди узлов $t_i,\ i = \overline{1,k}$ имеется один заранее выбранный t^*.

Отметим, что если система $\{u_i(t)\}_{i=0}^{n}$ такова, что с помощью ее обобщенных многочленов может быть решена задача интерполяции, то можно построить квадратурную формулу интерполяционного типа с числом узлов (весов) $k = n + 1$, точную на

$$L = \mathrm{lin}\{u_0(t), \dots, u_n(t)\}.$$

Если же система $\{u_i(t)\}_{i=0}^{n}$ такова, что

$$\frac{1}{2}N(\mathcal{U}) + 2 < n + 1, \tag{9}$$

то можно построить квадратурную формулу вида (7), точную на $L = \mathrm{lin}\{u_0(t), \dots, u_n(t)\}$, но имеющую меньшее число узлов (весов), а именно

$$k = \left[\frac{1}{2} N(\mathcal{U}) \right] + 2 \leqslant \frac{1}{2} N(\mathcal{U}) + 2 < n + 1.$$

В частности, если $\{u_i(t)\}_{i=0}^{n}$ — система Чебышева (для которой, как известно, $N(\mathcal{U}) = n$), то условие (9) выполнено, а значит, для систем Чебышева может быть построена квадратурная формула с меньшим числом узлов (весов) по сравнению с квадратурными формулами интерполяционного типа, а именно

$$k = \left[\frac{1}{2} n \right] + 2 < n + 1.$$

Отметим также, что за счет того, что для T-систем $N(\mathcal{U}) = n$, мы можем сравнить размерность пространства

$$L = \mathrm{lin}\{u_0(t), \ldots, u_n(t)\},$$

которая равна $n + 1$, с общим количеством параметров (весов и узлов) квадратуры, которое равно

$$2k = 2\left(\left[\frac{1}{2}n\right] + 2\right) = 2\left[\frac{1}{2}n\right] + 4,$$

и увидеть, что они отличаются не более чем на 3. Это достаточно близко к свойствам квадратурных формул Гаусса, где есть совпадение размерности пространства L и числа параметров.

Библиографический список

1. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
2. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи: (Идеи и проблемы П. Л. Чебышева и А. А. Маркова и их дальнейшее развитие). М.: Наука, 1973.
3. *Пухов С. В., Сухарева Е. А.* Конические оболочки кривых и моментные пространства // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2002. Вып. 3. С. 134—140.